2010年全国硕士研究生入学统一考试

数学二试题参考答案

一、选择题：1～8小题，每小题4分，共32分，下列每题给出的四个选项中，只有一个选项符合题目要求，请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上.

(1) 函数 $f\left(x\right)=\dfrac{x^2-x}{x^2-1}\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}$ 的无穷间断点数为 ( )

(A) 0　　(B)1　　(C) 2　　(D)3

答案：B

详解： $f(x)=\dfrac{x^2-x}{x^2-1}\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}$ 有间断点 $x=0,\pm1$

$$\lim_{x\to0}f(x)=\lim_{x\to0}\frac{x(x-1)}{(x+1)(x-1)}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to0}x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}，$$

$$\lim_{x\to0^+}x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}=1,\lim_{x\to0^-}=x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}=-1$$

所以 $x=0$ 为第一类间断点

$$\lim_{x\to1}f(x)=\frac{1}{2}\sqrt{1+1}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$，所以 $x=1$ 为连续点

$$\lim_{x\to-1}f(x)=\lim_{x\to-1}\frac{x(x-1)}{(x+1)(x-1)}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}=\infty$$，所以 $x=-1$ 为无穷间断点.

所以选择B.

(2) 设 y_1,y_2 是一阶非齐次微分方程 $y'+p\left(x\right)y=q\left(x\right)$ 的两个特解，若常数 λ，μ 使 $\lambda y_1+\mu y_2$ 是该方程的解，$\lambda y_1-\mu y_2$ 是该方程对应的齐次方程的解，则 ( )

(A) $\lambda=\dfrac{1}{2},\mu=\dfrac{1}{2}$　　(B) $\lambda=-\dfrac{1}{2},\mu=-\dfrac{1}{2}$

(C) $\lambda=\dfrac{2}{3},\mu=\dfrac{1}{3}$　　(D) $\lambda=\dfrac{2}{3},\mu=\dfrac{2}{3}$

答案：A

详解：因 $\lambda y_1-\mu y_2$ 是 $y'+p\left(x\right)y=0$ 的解；故 $\left(\lambda y_1-\mu y_2\right)'+p\left(x\right)\left(\lambda y_1-\mu y_2\right)=0$

所以 $\lambda\left(y_1'+p\left(x\right)y_1\right)-\mu\left(y_2'+p\left(x\right)y_2\right)=0$

而由已知 $y_1'+p\left(x\right)y_1=q(x),y_2'+p\left(x\right)y_2=q(x)$

所以$(\lambda-\mu)q(x)=0$

又$\lambda y_1+\mu y_2$是非齐次$y'+p(x)y=q(x)$的解；

故$(\lambda y_1+\mu y_2)'+p(x)(\lambda y_1+\mu y_2)=q(x)$

所以$(\lambda+\mu)q(x)=q(x)$

所以$\lambda=\mu=\dfrac{1}{2}$.

(3) 曲线$y=x^2$与曲线$y=a\ln x(a\neq 0)$相切，则$a=$ ( )

(A)4e (B)3e (C)2e (D)e

答案：C

详解：因$y=x^2$与$y=a\ln x(a\neq 0)$相切，故$2x=a\cdot\dfrac{1}{x}\Rightarrow x=\sqrt{\dfrac{a}{2}}$

在$y=x^2$上，$x=\sqrt{\dfrac{a}{2}}$时$y=\dfrac{a}{2}$

在$y=a\ln x(a\neq 0)$上，$x=\sqrt{\dfrac{a}{2}}$时 $y=a\ln\sqrt{\dfrac{a}{2}}=a\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{a}{2}$

$\Rightarrow\dfrac{a}{2}=\dfrac{a}{2}\cdot\ln\dfrac{a}{2}\ \Rightarrow\ln\dfrac{a}{2}=1\ \Rightarrow\dfrac{a}{2}=e\ \Rightarrow a=2e$

所以选择C

(4) 设m,n是正整数，则反常积分$\int_0^1\dfrac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}}dx$的收敛性 ( )

(A) 仅与m的取值有关 (B) 仅与n的取值有关

(C) 与m,n取值都有关 (D) 与m,n取值都无关

答案：B

详解：$\int_0^1\dfrac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}}dx=\int_0^{\frac{1}{2}}\dfrac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}}dx+\int_{\frac{1}{2}}^1\dfrac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}}dx$,

对于$\int_0^{\frac{1}{2}}\dfrac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}}dx$，瑕点为$x=0$

设$n>1$，$\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{[\ln^2(1-x)]^{\frac{1}{m}}}{x^{\frac{1}{n}}}\cdot x^{\frac{1}{n}}=0, 0<\dfrac{1}{n}<1$故收敛。

设 $n=1,m=1,2,\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{[\ln^2(1-x)]^{\frac{1}{m}}}{x}$ 存在，$\int_0^{\frac{1}{2}}\dfrac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}}dx$ 不是反常积分

设 $n=1,m>2,\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{[\ln^2(1-x)]^{\frac{1}{m}}}{x}\cdot x^{1-\frac{2}{m}}$ 存在，$0<1-\dfrac{2}{m}<1$，故 $\int_0^{\frac{1}{2}}\dfrac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}}dx$ 收敛。

对于，$\int_{\frac{1}{2}}^1\dfrac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}}dx$，瑕点为 $x=1$，当 m 为正整数时，$\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{[\ln^2(1-x)]^{\frac{1}{m}}}{x^{\frac{1}{n}}}\cdot(1-x)^{\delta}=0$，

其中 $0<\delta<1$，故 $\int_{\frac{1}{2}}^1\dfrac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}}dx$ 收敛

故选(D)。

(5) 设函数 $z=z(x,y)$,由方程 $F(\dfrac{y}{x},\dfrac{z}{x})=0$ 确定，其中 F 为可微函数，且 $F_2'\neq0$，则

$x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}=$　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　(　)

(A) x　　　　(B) z　　　　(C) $-x$　　　　(D) $-z$

答案：B

详解：$\dfrac{\partial z}{\partial x}=-\dfrac{F_x'}{F_z'}=-\dfrac{F_1'\left(-\dfrac{y}{x^2}\right)+F_2'\left(-\dfrac{z}{x^2}\right)}{F_2'\cdot\dfrac{1}{x}}=\dfrac{F_1'\cdot\dfrac{y}{x}+F_2'\cdot\dfrac{z}{x}}{F_2'}$,

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y'}{F_z'}=-\frac{F_1'\cdot\frac{1}{x}}{F_2'\cdot\frac{1}{x}}=-\frac{F_1'}{F_2'},$$

$$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{yF_1'+zF_2'}{F_2'}-\frac{yF_1'}{F_2'}=\frac{F_2'\cdot z}{F_2'}=z$$

(6) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^n\sum\limits_{j=1}^n\dfrac{n}{(n+i)(n^2+j^2)}=$　　　　　　　　　　　　　　　　　　(　)

(A) $\int_0^1dx\int_0^x\dfrac{1}{(1+x)(1+y^2)}dy$　　　　(B) $\int_0^1dx\int_0^x\dfrac{1}{(1+x)(1+y)}dy$

(C) $\int_0^1dx\int_0^1\dfrac{1}{(1+x)(1+y)}dy$　　　　(D) $\int_0^1dx\int_0^1\dfrac{1}{(1+x)(1+y^2)}dy$

答案：D

详解：$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}\frac{n}{(n+i)(n^2+j^2)}=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}\frac{n}{n\left(1+\frac{i}{n}\right)\cdot n^2\cdot\left(1+\left(\frac{j}{n}\right)^2\right)}$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{n^2}\cdot\frac{1}{1+\frac{i}{n}}\cdot\frac{1}{1+\left(\frac{j}{n}\right)^2}=\int_0^1dx\int_0^1\frac{1}{(1+x)(1+y^2)}dy$$

(7) 设向量组$I:\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_r$可由向量组$II:\beta_1,\beta_2,\cdots\beta_s$线性表示，下列命题正确的是(　)

(A) 若向量组I线性无关，则$r\le s$　　(B) 若向量组I线性相关，则$r>s$

(C) 若向量组II线性无关，则$r\le s$　　(D) 若向量组II线性相关，则$r>s$

答案：A

详解：由于向量组I能由向量组II线性表示，所以$r(I)\le r(II)$，即

$$r(\alpha_1,\cdots,\alpha_r)\le r(\beta_1,\cdots,\beta_s)\le s$$

若向量组I线性无关，则$r(\alpha_1,\cdots,\alpha_r)=r$，所以$r=r(\alpha_1,\cdots,\alpha_r)\le r(\beta_1,\cdots,\beta_s)\le s$，即$r\le s$，选(A).

(8) 设A为4阶对称矩阵，且$A^2+A=0$，若A的秩为3，则A相似于　(　)

(A) $\begin{pmatrix}1&&&\\&1&&\\&&1&\\&&&0\end{pmatrix}$　　(B) $\begin{pmatrix}1&&&\\&1&&\\&&-1&\\&&&0\end{pmatrix}$

(C) $\begin{pmatrix}1&&&\\&-1&&\\&&-1&\\&&&0\end{pmatrix}$　　(D) $\begin{pmatrix}-1&&&\\&-1&&\\&&-1&\\&&&0\end{pmatrix}$

答案：D

详解：设λ为A的特征值，由于$A^2+A=0$，所以$\lambda^2+\lambda=0$，即$(\lambda+1)\lambda=0$，这样A的特征值为-1或0.由于A为实对称矩阵，故A可相似对角化，即$A\sim\Lambda$，$r(A)=r(\Lambda)=3$，

因此，$\Lambda=\begin{pmatrix}-1&&&\\&-1&&\\&&-1&\\&&&0\end{pmatrix}$，即$A\sim\Lambda=\begin{pmatrix}-1&&&\\&-1&&\\&&-1&\\&&&0\end{pmatrix}$.

二、填空题：9-14小题，每小题4分，共24分，请将答案写在答题纸指定位置上.

(9)3 阶常系数线性齐次微分方程 $y'''-2y''+y'-2y=0$ 的通解为 $y=$ ________.

答案：$y=C_1e^{2x}+C_2\cos x+C_3\sin x$

详解：$y'''-2y''+y'-2y=0$,对应方程为 $\lambda^3-2\lambda^2+\lambda-2=0$,

$\lambda^2(\lambda-2)+(\lambda-2)=0$，$(\lambda-2)(\lambda^2+1)=0$． $\lambda=2,\ \lambda=\pm i$

所以通解为 $y=C_1e^{2x}+C_2\cos x+C_3\sin$

(10)曲线 $y=\dfrac{2x^3}{x^2+1}$ 的渐近线方程为 ________.

答案：$y=2x$

详解：$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\frac{2x^3}{x^2+1}}{x}=2$，

$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3}{x^2+1}-2x=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3-2x^3-2x}{x^2+1}=0$，所以 $y=2x$

(11)函数 $y=\ln(1-2x)$ 在 $x=0$ 处的 n 阶导数 $y^{(n)}(0)=$ ________.

答案：$-2^n\cdot(n-1)!$

详解：由麦克劳林展开有：

$(-1)^{n-1}\cdot\dfrac{1}{n}(-2x)^n=\dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}\cdot x^n$， $\dfrac{-2^n}{n}=\dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}$， $\therefore\ f^{(n)}(0)=-2^n(n-1)!$

(12)当 $0\le\theta\le\pi$ 时，对数螺线 $r=e^{\theta}$ 的弧长为 ________.

答案：$\sqrt{2}\left(e^{\pi}-1\right)$

详解：$0\le x\le\pi$，$r=e^{\theta}$.

$\int_0^{\pi}\sqrt{\left(e^{\theta}\right)^2+\left(e^{\theta}\right)^2}\,d\theta=\int_0^{\pi}\sqrt{2}\cdot e^{\theta}d\theta=\sqrt{2}\left(e^{\pi}-1\right)$

(13)已知一个长方形的长 l 以 $2cm/s$ 的速率增加，宽 w 以 $3cm/s$ 的速率增加.则当 $l=12cm,\ w=5cm$ 时，它的对角线增加速率为 ________.

答案：$3cm/s$

详解：设 $l=x(t),w=y(t)$，

由题意知，在 $t=t_0$ 时刻 $x(t_0)=12,y(t_0)=5$，且 $x'(t_0)=2,y'(t_0)=3$，

又 $S(t)=\sqrt{x^2(t)+y^2(t)}$，

所以 $S'(t)=\dfrac{x(t)x'(t)+y(t)y'(t)}{\sqrt{x^2(t)+y^2(t)}}$

所以 $S'(t_0)=\dfrac{x(t_0)x'(t_0)+y(t_0)y'(t_0)}{\sqrt{x^2(t_0)+y^2(t_0)}}=\dfrac{12\cdot 2+5\cdot 3}{\sqrt{12^2+5^2}}=3$

(14)设 A,B 为 3 阶矩阵，且 $|A|=3,|B|=2,|A^{-1}+B|=2$,则 $|A+B^{-1}|=$_________.

答案：3

详解：由于 $A(A^{-1}+B)B^{-1}=(E+AB)B^{-1}=B^{-1}+A$，所以

$$|A+B^{-1}|=|A(A^{-1}+B)B^{-1}|=|A||A^{-1}+B||B^{-1}|$$

因为 $|B|=2$，所以 $|B^{-1}|=|B|^{-1}=\dfrac{1}{2}$，因此

$|A+B^{-1}|=|A||A^{-1}+B||B^{-1}|=3\times 2\times\dfrac{1}{2}=3.$

三、解答题：15－23 小题，共 94 分.请将解答写在答题纸指定的位置上.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(15)(本题满分 10 分)

求函数 $f(x)=\int_1^{x^2}(x^2-t)e^{-t^2}dt$ 的单调区间与极值.

详解： $f(x)=\int_1^{x^2}(x^2-t)e^{-t^2}dt=x^2\int_1^{x^2}e^{-t^2}dt-\int_1^{x^2}te^{-t^2}dt$

所以 $f'(x)=2x\int_1^{x^2}e^{-t^2}dt+2x^3e^{-x^4}-2x^3e^{-x^4}=2x\int_1^{x^2}e^{-t^2}dt$

令 $f'(x)=0$，则 $x=0,x=\pm 1$

又 $f''(x)=2\int_1^{x^2}e^{-t^2}dt+4x^2e^{-x^4}$

$f''(0)=2\int_1^0 e^{-t^2}dt<0$，所以 $f(0)=\int_1^0(0-t)e^{-t^2}dt=-\dfrac{1}{2}e^{-t^2}\Big|_0^1=\dfrac{1}{2}(1-e^{-1})$ 是极大值.

$f''(\pm 1)=4e^{-1}>0$，所以 $f(\pm 1)=0$ 为极小值.

因为当 $x\ge 1$ 时， $f'(x)>0$， $0\le x<1$ 时， $f'(x)<0$，

$-1\le x<0$ 时， $f'(x)>0$， $x<-1$ 时， $f'(x)<0$

所以 $f(x)$ 的单调递减区间为 $(-\infty,-1)\cup[0,1)$

$f(x)$ 的单调递增区间为 $[-1,0)\cup[1,+\infty)$

(16)(本题满分 10 分)

(I)比较 $\int_0^1 |\ln t|\left[\ln(1+t)\right]^n dt$ 与 $\int_0^1 t^n |\ln t| dt\ (n=1,2,\cdots)$ 的大小，说明理由

(II)记 $u_n=\int_0^1 |\ln t|\left[\ln(1+t)\right]^n dt\ (n=1,2,\cdots)$，求极限 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$

详解：(I)当 $0<x<1$ 时 $0<\ln(1+x)<x$，

故 $\left[\ln(1+t)\right]^n<t^n$，所以 $|\ln t|\left[\ln(1+t)\right]^n<|\ln t|t^n$

$\therefore \int_0^1 |\ln t|\left[\ln(1+t)\right]^n dt<\int_0^1 |\ln t|t^n dt\ (n=1,2,\cdots)$

(II) $\int_0^1 |\ln t|t^n dt=-\int_0^1 \ln t\cdot t^n dt=-\dfrac{1}{n+1}\int_0^1 \ln t d\left(t^{n+1}\right)=\dfrac{1}{(n+1)^2}$

故由 $0<u_n<\int_0^1 |\ln t|t^n dt=\dfrac{1}{(n+1)^2}$，根据夹逼定理得 $0\le\lim\limits_{n\to\infty} u_n\le\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{(n+1)^2}=0$

故 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n=0$.

(17)(本题满分 11 分)

设函数 $y=f(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x=2t+t^2 \\ y=\psi(t) \end{cases}\ (t>-1)$ 所确定，其中 $\psi(t)$ 具有 2 阶导数，且

$\psi(1)=\dfrac{5}{2}$，$\psi'(1)=6$，已知 $\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{3}{4(1+t)}$，求函数 $\psi(t)$

详解：根据题意得

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{\psi'(t)}{2t+2},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\frac{d\left(\frac{\psi'(t)}{2t+2}\right)}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{\frac{\psi''(t)(2t+2)-2\psi'(t)}{(2t+2)^2}}{2t+2}=\frac{3}{4(1+t)}$$

即 $\psi''(t)(2t+2)-2\psi'(t)=6(t+1)^2$

整理有 $\psi''(t)(t+1)-\psi'(t)=3(t+1)^2$

解 $\begin{cases} \psi''(t)-\dfrac{\psi'(t)}{t+1}=3(t+1) \\ \psi(1)=\dfrac{5}{2},\psi'(1)=6 \end{cases}$

令 $y=\psi'(t)$ 即 $y'-\dfrac{1}{1+t}y=3(1+t)$

$$\therefore y=e^{\int\frac{1}{1+t}dt}\left(\int 3(1+t)e^{-\int\frac{1}{1+t}dt}dt+C\right)=(1+t)(3t+C)$$

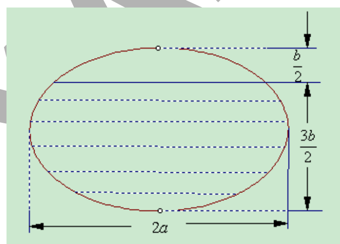
$\because y(1)=\psi'(1)=6\ \therefore C=0\ \therefore y=3t(t+1)$ 即 $\psi'(t)=3t(t+1)$

故 $\psi(t)=\int 3t(t+1)dt=\dfrac{3}{2}t^2+t^3+C_1$

又由 $\psi(1)=\dfrac{5}{2}\ \therefore C_1=0\ \therefore \psi(t)=\dfrac{3}{2}t^2+t^3.$

(18)(本题满分 10 分)

一个高为 l 的 柱体形贮油罐，底面是长轴为 $2a$，短轴为 $2b$ 的椭圆，现将贮油罐平放，当油罐中油面高度为 $\dfrac{3}{2}b$ 时(如图)，计算油的质量.

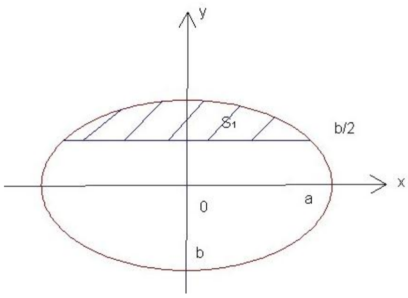


(长度单位为 m，质量单位为 kg，油的密度为常数 $\rho kg/m^3$)

详解：

油的质量 $M=\rho V$，其中油的体积 $V=S_{底}\cdot h_{高}=l\cdot S_{底}$

又 $\because S_{底}=S_{椭圆}-S_1=\pi ab-2\iint\limits_{S_1}dxdy$



$$=\pi ab-2\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}a}dx\cdot\int_{\frac{b}{2}}^{b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}dy$$

$$=\pi ab-2\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}a}\cdot\left(b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}-\frac{b}{2}\right)dx$$

$$=\pi ab-2b\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}a}\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}dx+b\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}a$$

$$=\pi ab+\frac{\sqrt{3}}{2}ab-2ab\cdot\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}a}\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}d\frac{x}{a}$$

$$=\pi ab+\frac{\sqrt{3}}{2}ab-2ab\left(\frac{1}{2}\arcsin\frac{x}{a}+\frac{1}{2}x\cdot\frac{1}{a}\sqrt{1-x^2}\right)\Bigg|_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}a}$$

$$=\pi ab+\frac{\sqrt{3}}{2}ab-2ab\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\sqrt{3}}{8}\right)=\frac{2}{3}\pi ab+\frac{\sqrt{3}}{4}ab$$

故$M=S\cdot h\cdot \rho=\left(\frac{2}{3}\pi ab+\frac{\sqrt{3}}{4}ab\right)\cdot l\cdot \rho$

(19)(本题满分 11 分)

设函数$\mu=f(x,y)$具有二阶连续偏导数，且满足等式$4\frac{\partial^2\mu}{\partial x^2}+12\frac{\partial^2\mu}{\partial x\partial y}+5\frac{\partial^2\mu}{\partial y^2}=0$，确定$a,b$的值，使等式在变换$\xi=x+ay,\eta=x+by$下化简为$\frac{\partial^2\mu}{\partial\xi\partial\eta}=0$.

详解：由复合函数链式法则得

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial \xi}\cdot\frac{\partial \xi}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial \xi}+\frac{\partial u}{\partial \eta}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial \xi}\cdot\frac{\partial \xi}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial \xi}\cdot a+b\cdot\frac{\partial u}{\partial \eta}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}+\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)$$

$$=\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\cdot\frac{\partial \xi}{\partial x}+\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial\eta}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial x}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial x}+\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial\eta}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial x}$$

$$=\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}+2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial\eta}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}+\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)$$

$$=\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\cdot\frac{\partial \xi}{\partial y}+\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial\eta}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial y}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial y}+\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial\eta}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial y}$$

$$=a\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+b\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}+(a+b)\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial\eta}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(a\frac{\partial u}{\partial \xi}+b\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)=a(a\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+b\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial\eta})+b(a\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}+a\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial\eta})$$

$$=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+b^2\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}+2ab\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial\eta}$$

故$4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+12\frac{\partial u^2}{\partial x\partial y}+5\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$

$$=(5a^2+12a+4)\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+(5b^2+12b+4)\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}+(12(a+b)+10ab+8)\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}=0$$

当 $\begin{cases} 5a^2+12a+4=0 & (1) \\ 5b^2+12b+4=0 & (2) \\ 12(a+b)+10ab+8\neq 0 & (3) \end{cases}$ 时满足等式，则 $a=-\frac{2}{5}$ 或 -2，$b=-\frac{2}{5}$ 或 -2

又因为当 (a,b) 为 $(-2,-2),(-\frac{2}{5},-\frac{2}{5})$ 时方程(3)不满足，

所以当 (a,b) 为 $(-\frac{2}{5},-2)$ ，$(-2,-\frac{2}{5})$ 满足题意.

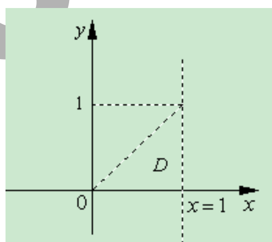
(20)(本题满分 10 分)

计算二重积分 $I=\iint\limits_D r^2\sin\theta\sqrt{1-r^2\cos\theta}drd\theta$，

其中 $D=\left\{(r,\theta)\,|\,0\le r\le\sec\theta,0\le\theta\le\frac{\pi}{4}\right\}$.

详解：$I=\iint\limits_D r^2\sin\theta\sqrt{1-r^2\cos 2\theta}drd\theta$

$$=\iint\limits_D r\sin\theta\sqrt{1-r^2\left(\cos^2\theta-\sin^2\theta\right)}\cdot rdrd\theta$$



$$=\iint\limits_D y\sqrt{1-\left(r\cos\theta\right)^2+\left(r\sin\theta\right)^2}dxdy$$

$$=\iint\limits_D y\sqrt{1-x^2+y^2}dxdy$$

$$=\int_0^1 dx\int_0^x y\sqrt{1-x^2+y^2}dy$$

$$=\int_0^1 dx\int_0^x \frac{1}{2}\sqrt{1-x^2+y^2}d\left(1-x^2+y^2\right)$$

$$=\int_0^1\frac{1}{3}\left[1-\left(1-x^2\right)^{\frac{3}{2}}\right]dx$$

$$=\int_0^1\frac{1}{3}dx-\int_0^1\left(1-x^2\right)^{\frac{3}{2}}dx$$

$$=\frac{1}{3}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos 4\theta d\theta=\frac{1}{3}-\frac{3}{16}\pi$$

(21)(本题满分 10 分)

设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[0,1]$ 上连续，在开区间 $(0,1)$ 内可导，且 $f(0)=0,f(1)=\frac{1}{3}$.

证明：存在 $\xi\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$，$\eta\in\left(\frac{1}{2},1\right)$，使得 $f'(\xi)+f'(\eta)=\xi^2+\eta^2$.

证明：令 $F(x)=f(x)-\frac{1}{3}x^3$

对于 $F(x)$ 在 $\left[0,\frac{1}{2}\right]$ 上利用 $L-$ 中值定理，得 $\exists\xi\in\left(0,\frac{1}{2}\right),F\left(\frac{1}{2}\right)-F(0)=\frac{1}{2}F'(\xi)$ ①

对于 $F(x)$ 在 $\left[\frac{1}{2},1\right]$ 上利用 $L-$ 中值定理，得 $\exists\eta\in\left(\frac{1}{2},1\right),F(1)-F\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}F'(\eta)$ ②

两式相加得 $f'(\xi)+f'(\eta)=\xi^2+\eta^2$

(22)(本题满分 11 分)

设 $A=\begin{pmatrix}\lambda & 1 & 1\\ 0 & \lambda-1 & 0\\ 1 & 1 & \lambda\end{pmatrix}$，$b=\begin{pmatrix}a\\1\\1\end{pmatrix}$

已知线性方程组 $Ax=b$ 存在两个不同的解

(I) 求 λ,a；

(II) 求方程组 $Ax=b$ 的通解.

解析：方法一：（I）已知 $Ax=b$ 有 2 个不同的解 $\therefore r(A)=r(A,b)<3$，对增广矩阵进行初等行变换，得

$$(A,b)=\left(\begin{array}{ccc:c}\lambda & 1 & 1 & a\\ 0 & \lambda-1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & \lambda & 1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc:c}1 & 1 & \lambda & 1\\ 0 & \lambda-1 & 0 & 1\\ \lambda & 1 & 1 & a\end{array}\right)$$

$$\to\left(\begin{array}{ccc:c}1 & 1 & \lambda & 1\\ 0 & \lambda-1 & 0 & 1\\ 0 & 1-\lambda & 1-\lambda^2 & a-\lambda\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc:c}1 & 1 & \lambda & 1\\ 0 & \lambda-1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1-\lambda^2 & a-\lambda+1\end{array}\right)$$

当 $\lambda=1$ 时，

$$(A,b)\to\left(\begin{array}{ccc:c}1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & a\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc:c}1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)$$

此时，$r(A)=1\neq r(A,b)=2$，$Ax=b$ 无解，所以 $\lambda\neq1$。

当 $\lambda=-1$，$(A,b)\to\left(\begin{array}{ccc:c}1 & 1 & -1 & 1\\ 0 & -2 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & a+2\end{array}\right)$

由于 $r(A)=r(A,b)<3$，所以 $a=-2$。因此，$\lambda=-1$，$a=-2$。

（II）$(A,b) \to \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & -1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

原方程组等价为$\begin{cases} x_1 - x_3 = \frac{3}{2} \\ x_2 = -\frac{1}{2} \end{cases}$，即$\begin{cases} x_1 = x_3 + \frac{3}{2} \\ x_2 = -\frac{1}{2} \\ x_3 = x_3 \end{cases}$，$\therefore \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$。

$\therefore Ax = b$ 的通解为 $x = k\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$，k 为任意常数。

方法二：（I）已知 $Ax = b$ 有 2 个不同的解

$\therefore r(A) = r(A,b) < 3$

又$|A| = 0$，即$|A| = \begin{vmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 0 & \lambda - 1 & 0 \\ 1 & 1 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 1)^2(\lambda + 1) = 0$，知$\lambda = 1$或-1。

当$\lambda = 1$时，$r(A) = 1 \neq r(A,b) = 2$，此时，$Ax = b$无解，$\therefore \lambda = -1$。代入由$\therefore r(A) = r(A,b)$得$a = -2$。

（II）$(A,b) = \left(\begin{array}{ccc:c} -1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & -1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

原方程组等价为$\begin{cases} x_1 - x_3 = \dfrac{3}{2} \\ x_2 = -\dfrac{1}{2} \end{cases}$，即$\begin{cases} x_1 = x_3 + \dfrac{3}{2} \\ x_2 = -\dfrac{1}{2} \\ x_3 = x_3 \end{cases}$，$\therefore \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \dfrac{3}{2} \\ -\dfrac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$。

$\therefore Ax = b$的通解为$x = k\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \dfrac{3}{2} \\ -\dfrac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$，k 为任意常数。

(23)(本题满分 11 分)

设$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 4 \\ -1 & 3 & a \\ 4 & a & 0 \end{pmatrix}$，正交矩阵$Q$使得$Q^T AQ$为对角矩阵，若$Q$的第 1 列为$\dfrac{1}{\sqrt{6}}(1,2,1)^T$，求$a,Q$

详解：由于$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 4 \\ -1 & 3 & a \\ 4 & a & 0 \end{pmatrix}$，存在正交矩阵$Q$，使得$Q^T AQ$为对角阵，且$Q$的第一列为$\dfrac{1}{\sqrt{6}}(1,2,1)^T$，故 A 对应于$\lambda_1$的特征向量为$\xi_1 = \dfrac{1}{\sqrt{6}}(1,2,1)^T$，故$A\begin{pmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{6}} \\ \dfrac{2}{\sqrt{6}} \\ \dfrac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{6}} \\ \dfrac{2}{\sqrt{6}} \\ \dfrac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$，即

$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 4 \\ -1 & 3 & a \\ 4 & a & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$，由此可得$a = -1, \lambda_1 = 2$.

$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 4 \\ -1 & 3 & -1 \\ 4 & -1 & 0 \end{pmatrix}$，由$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda & 1 & -4 \\ 1 & \lambda - 3 & 1 \\ -4 & 1 & \lambda \end{vmatrix} = 0$，可得

$$\begin{vmatrix}\lambda & 1 & -4\\ 1 & \lambda-3 & 1\\ -4 & 1 & \lambda\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda & 1 & -4\\ 1 & \lambda-3 & 1\\ -4-\lambda & 0 & \lambda+4\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda-4 & 1 & -4\\ 2 & \lambda-3 & 1\\ 0 & 0 & \lambda+4\end{vmatrix}$$

$$=(\lambda+4)\begin{vmatrix}\lambda-4 & 1\\ 2 & \lambda-3\end{vmatrix}=(\lambda+4)(\lambda-2)(\lambda-5)=0$$

故 A 的特征值为 $\lambda_1=2,\lambda_2=-4,\lambda_3=5$，且对应于 $\lambda_1=2$ 的特征向量为 $\xi_1=\frac{1}{\sqrt{6}}(1,2,1)^T$.

由 $(\lambda_2E-A)x=0$，即 $\begin{pmatrix}-4 & 1 & -4\\ 1 & -7 & 1\\ -4 & 1 & -4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=0$

$$\begin{pmatrix}-4 & 1 & -4\\ 1 & -7 & 1\\ -4 & 1 & -4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & -7 & 1\\ 0 & -27 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

可得对应于 $\lambda_2=-4$ 的特征向量为 $\xi_2=(-1,0,1)^T$.

由 $(\lambda_3E-A)x=0$，即 $\begin{pmatrix}5 & 1 & -4\\ 1 & 2 & 1\\ -4 & 1 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=0$

$$\begin{pmatrix}5 & 1 & -4\\ 1 & 2 & 1\\ -4 & 1 & 5\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 0 & 9 & 9\\ 0 & -9 & -9\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

可得对应于 $\lambda_3=5$ 的特征向量为 $\xi_3=(1,-1,1)^T$.

由于 A 为实对称矩阵，ξ_1,ξ_2,ξ_3 为对应于不同特征值的特征向量，所以 ξ_1,ξ_2,ξ_3 相互正交，只需单位化：

$$\eta_1=\frac{\xi_1}{\|\xi_1\|}=\frac{1}{\sqrt{6}}(1,2,1)^T,\eta_2=\frac{\xi_2}{\|\xi_2\|}=\frac{1}{\sqrt{2}}(-1,0,1)^T,\eta_3=\frac{\xi_3}{\|\xi_3\|}=\frac{1}{\sqrt{3}}(1,-1,1)^T,$$

取 $Q=\left(\eta_1,\eta_2,\eta_3\right)=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\\ \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{3}}\\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}$，则 $Q^TAQ=\Lambda=\begin{pmatrix}2 & & \\ & -4 & \\ & & 5\end{pmatrix}$.

