2010 年全国硕士研究生入学统一考试

数学三试题参考答案

一、选择题：1～8 小题，每小题 4 分，共 32 分，下列每题给出的四个选项中，只有一个选项符合题目要求，请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上.

(1) 若 $\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{1}{x}-\left(\frac{1}{x}-a\right)e^x\right]=1$，则 a 等于 (　　)

(A) 0　　(B) 1　　(C) 2　　(D) 3

答案：C

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\left(\frac{1}{x}-a\right)e^x\right)=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\left(1-e^x\left(1-ax\right)\right)=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\left(1-e^x+axe^x\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1-e^x}{x}+\frac{axe^x}{x}\right)$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-e^x}{x}+\lim_{x\to 0}\frac{axe^x}{x}=-1+a=1$$

所以 $a=2$。

(2) 设 y_1,y_2 是一阶线性非齐次微分方程 $y'+p(x)y=q(x)$ 的两个特解，若常数 λ,u 使 λy_1+uy_2 是该方程的解，λy_1-uy_2 是该方程对应的齐次方程的解，则 (　　)

(A) $\lambda=\frac{1}{2},u=\frac{1}{2}$　　(B) $\lambda=-\frac{1}{2},u=-\frac{1}{2}$

(C) $\lambda=\frac{2}{3},u=\frac{1}{3}$　　(D) $\lambda=\frac{2}{3},u=\frac{2}{3}$

答案：A

详解：因 $\lambda y_1-\mu y_2$ 是 $y'+P(x)y=0$ 的解；故 $(\lambda y_1-\mu y_2)'+P(x)(\lambda y_1-\mu y_2)=0$

所以 $\lambda\left(y_1'+P(x)y_1\right)-\mu\left(y_2'+\mu y_2\right)=0$

而由已知 $y_1'+P(x)y_1=q, y_2'+P(x)y_2=q$

所以 $(\lambda-\mu)q(x)=0$

又 $\lambda y_1+\mu y_2$ 是非齐次 $y'+P(x)y=q(x)$ 的解；

故 $(\lambda y_1+\mu y_2)'+P(x)(\lambda y_1+\mu y_2)=q(x)$

所以 $(\lambda+\mu)q(x)=q(x)$

所以 $\lambda=\mu=\frac{1}{2}$

(3)设函数 $f(x), g(x)$ 具有二阶导数，且 $g''(x)<0$， $g(x_0)=a$ 是 $g(x)$ 的极值，则 $f(g(x))$ 在 x_0 的极大值的一个充分条件是 ( )

(A) $f'(a)<0$ (B) $f'(a)>0$ (C) $f''(a)<0$ (D) $f''(a)>0$

答案：B

详解：$\{f[g(x)]\}'=f'[g(x)]\cdot g'(x)$

$\{f[g(x)]\}''=\{f'[g(x)]\cdot g'(x)\}'=f''[g(x)]\cdot[g'(x)]^2+f'[g(x)]\cdot g''(x)$

由于 $g(x_0)=a$ 是 $g(x)$ 的极值，所以 $g'(x_0)=0$。

所以 $\{f[g(x_0)]\}''=f'[g(x_0)]\cdot g''(x_0)=f'(a)\cdot g''(x_0)$

由于 $g''(x_0)<0$，要使 $\{f[g(x)]\}''<0$，必须有 $f'(a)>0$

(4)设 $f(x)=\ln^{10}x, g(x)=x, h(x)=e^{\frac{x}{10}}$，则当 x 充分大时有 ( )

(A) $g(x)<h(x)<f(x)$ (B) $h(x)<g(x)<f(x)$

(C) $f(x)<g(x)<h(x)$ (D) $g(x)<f(x)<h(x)$

答案：C

详解：因为 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{h(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{\frac{x}{10}}}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}e^{\frac{x}{10}}\dfrac{1}{10}=+\infty$

所以，当 x 充分大时，$h(x)>g(x)$

又因为 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln^{10}x}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}10\dfrac{\ln^9 x\cdot\frac{1}{x}}{1}=10\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln^9 x}{x}$

$=10\cdot 9\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln^8 x\cdot\frac{1}{x}}{1}=\cdots=10\cdot 9\cdots 2\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}=10!\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=0$

所以当 x 充分大时， $f(x)<g(x)$

所以当 x 充分大， $f(x)<g(x)<h(x)$。

(5) 设向量组 $I:\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_r$ 可由向量组 $II:\beta_1,\beta_2,\cdots\beta_s$ 线性表示，下列命题正确的是( )

(A) 若向量组 I 线性无关，则 $r\le s$ (B) 若向量组 I 线性相关，则 $r>s$

(C) 若向量组 II 线性无关，则 $r\le s$ (D) 若向量组 II 线性相关，则 $r>s$

答案：A

详解：由于向量组I能由向量组II线性表示，所以$r(I)\le r(II)$，即

$$r(\alpha_1,\cdots,\alpha_r)\le r(\beta_1,\cdots,\beta_s)\le s$$

若向量组I线性无关，则$r(\alpha_1,\cdots,\alpha_r)=r$，所以$r=r(\alpha_1,\cdots,\alpha_r)\le r(\beta_1,\cdots,\beta_s)\le s$，即$r\le s$，选(A).

(6) 设A为4阶实对称矩阵，且$A^2+A=0$，若A的秩为3，则A相似于 (　)

(A) $\begin{pmatrix}1&&&\\&1&&\\&&1&\\&&&0\end{pmatrix}$　(B) $\begin{pmatrix}1&&&\\&1&&\\&&-1&\\&&&0\end{pmatrix}$

(C) $\begin{pmatrix}1&&&\\&-1&&\\&&-1&\\&&&0\end{pmatrix}$　(D) $\begin{pmatrix}-1&&&\\&-1&&\\&&-1&\\&&&0\end{pmatrix}$

答案：D

详解：设λ为A的特征值，由于$A^2+A=0$，所以$\lambda^2+\lambda=0$，即$(\lambda+1)\lambda=0$，这样A的特征值为-1或0。由于A为实对称矩阵，故A可相似对角化，即$A\sim\Lambda$，$r(A)=r(\Lambda)=3$，

因此，$\Lambda=\begin{pmatrix}-1&&&\\&-1&&\\&&-1&\\&&&0\end{pmatrix}$，即$A\sim\Lambda=\begin{pmatrix}-1&&&\\&-1&&\\&&-1&\\&&&0\end{pmatrix}$。

(7) 设随机变量的分布函数$F(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ \dfrac{1}{2}, & 0\le x<1\\ 1-e^{-x}, & x\ge 1\end{cases}$，则$P\{x=1\}=$ (　)

(A) 0　(B) $\dfrac{1}{2}$　(C) $\dfrac{1}{2}-e^{-1}$　(D) $1-e^{-1}$

答案：C

详解：$P\{X=1\}=P\{X\le 1\}-P\{X<1\}=F(1)-F(1-0)=1-e^{-1}-\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}-e^{-1}$

(8) 设$f_1(x)$为标准正态分布的概率密度，$f_2(x)$为$[-1,3]$上均匀分布的概率密度，若$f(x)=\begin{cases}af_1(x) & x\le 0\\ bf_2(x) & x>0\end{cases}(a>0,b>0)$为概率密度，则$a,b$应满足 (　)

(A) $2a+3b=4$　　(B) $3a+2b=4$　　(C) $a+b=1$　　(D) $a+b=2$

答案：A

详解：$f_1\left(x\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-x^2}{2}}$，$f_2\left(x\right)=\begin{cases}\frac{1}{4}, & -1\le x\le 3\\ 0, & 其它\end{cases}$

利用概率密度的性质

$$1=\int_{-\infty}^{+\infty}f\left(x\right)dx=\int_{-\infty}^{0}af_1\left(x\right)dx+\int_{0}^{+\infty}bf_2\left(x\right)dx=\frac{a}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}f_1\left(x\right)dx+b\int_0^3\frac{1}{4}dx=\frac{a}{2}+\frac{3}{4}b$$

所以 $2a+3b=4$

二、填空题：9-14 小题，每小题 4 分，共 24 分，请将答案写在答题纸指定位置上.

(9)设可导函数 $y=y(x)$ 由方程 $\int_0^{x+y}e^{-x^2}dx=\int_0^x x\sin^2 t dt$ 确定.，则 $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0}=$ _________.

答案：-1

详解：$\int_0^{x+y}e^{-t^2}dt=x\int_0^x\sin^2 tdt$，令 $x=0$，得 $y=0$

等式两端对 x 求导：$e^{-(x+y)^2}(1+\frac{dy}{dx})=\int_0^x\sin^2 tdt+x\sin^2 x$

将 $x=0$ 时 $y=0$ 代入上式，得 $1+\frac{dy}{dx}=0$

所以 $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0}=-1$

(10)设位于曲线 $y=\frac{1}{\sqrt{x(1+\ln^2 x)}}(e\le x<+\infty)$ 下方，x 轴上方的无界区域为 G，则.G 绕 x 轴旋转一周所得空间区域的体积是_________.

答案：$\frac{\pi^2}{4}$

详解：

$$V=\int_e^{+\infty}\pi y^2dx=\int_e^{+\infty}\pi\frac{dx}{x\left(1+\ln^2 x\right)}$$

$$=\pi\int_e^{+\infty}\frac{d\ln x}{1+\ln^2 x}=\pi\cdot\left[\arctan\left(\ln x\right)\right]_e^{+\infty}=\pi\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi^2}{4}$$

(11)设某商品的收益函数为 $R(P)$，收益弹性为 $1+P^3$，其中 P 为价格，且 $R(1)=1$，则 $R(P)=$

_________.

答案：$P\cdot e^{\frac{1}{3}\left(P^3-1\right)}$

详解：由弹性的定义，得 $\frac{dR}{dP}\cdot\frac{P}{R}=1+P^3$

$\therefore \frac{dR}{R}=\left(\frac{1}{P}+P^2\right)dP$

$\therefore \ln R=\ln P+\frac{1}{3}P^2+C$

又 $R\left(1\right)=1$，所以 $C=-\frac{1}{3}$

$\therefore \ln R=\ln P+\frac{1}{3}P-\frac{1}{3}$

$\therefore R=P\cdot e^{\frac{1}{3}\left(P^3-1\right)}$

(12)若曲线 $y=x^3+ax^2+bx+1$ 有拐点 $(-1,0)$，则 $b=$ _________.

答案：$b=3$

详解：

$y=x^3+ax^2+bx+1$

$y'=3x^2+2ax+b$

$y''=6x+2a$

令 $y''=0$，得 $x=-\frac{a}{3}=-1$，所以 $a=3$

又曲线过点 $\left(-1,0\right)$，代入曲线方程，得 $b=3$

(13)设 A， B 为 3 阶矩阵，且 $\left|A\right|=3$， $\left|B\right|=2$， $\left|A^{-1}+B\right|=2$ 。则 $\left|A+B^{-1}\right|=$ _________.

答案：3

详解：由于 $A(A^{-1}+B)B^{-1}=(E+AB)B^{-1}=B^{-1}+A$，所以

$$\left|A+B^{-1}\right|=\left|A(A^{-1}+B)B^{-1}\right|=\left|A\right|\left|A^{-1}+B\right|\left|B^{-1}\right|$$

因为 $\left|B\right|=2$，所以 $\left|B^{-1}\right|=\left|B\right|^{-1}=\frac{1}{2}$，因此

$\left|A+B^{-1}\right|=\left|A\right|\left|A^{-1}+B\right|\left|B^{-1}\right|=3\times2\times\frac{1}{2}=3.$

(14)设 $X_1,\ldots,X_n$ 为来自总体 $N(\mu,\sigma^2)$ $(\sigma>0)$ 的简单随机样本，统计量 $T=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2$ 则

$ET=$ _________.

答案：$\sigma^2+\mu^2$

详解：$E\left(T\right)=E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2\right)=\frac{1}{n}E\left(\sum_{i=1}^{n}X_i^2\right)=\frac{1}{n}nE\left(X^2\right)=E\left(X^2\right)=\sigma^2+\mu^2$

三、解答题：15－23 小题，共 94 分.请将解答写在答题纸指定的位置上.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(15)(本题满分 10 分)

求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^{\frac{1}{x}}-1)^{\frac{1}{\ln x}}$

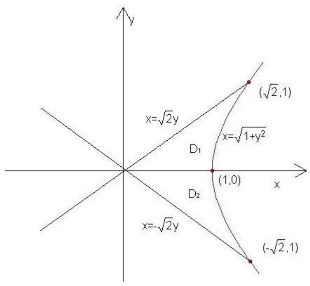
详解：

$$\lim_{x\to+\infty}\left(x^{\frac{1}{x}}-1\right)^{\frac{1}{\ln x}}=\lim_{x\to+\infty}e^{\frac{\ln\left(x^{\frac{1}{x}}-1\right)}{\ln x}}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(x^{\frac{1}{x}}-1\right)}{\ln x}}$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x^{\frac{1}{x}}-1}\cdot\left(x^{\frac{1}{x}}\right)\frac{1-\ln x}{x^2}}{\frac{1}{x}}}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1-\ln x}{x\left(x^{\frac{1}{x}}-1\right)}}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1-\ln x}{x\left(e^{\frac{1}{x}\ln x}-1\right)}}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1-\ln x}{x\cdot\frac{1}{x}\ln x}}=e^{-1}.$$

(16)(本题满分 10 分)

计算二重积分 $\iint\limits_{D}(x+y)^3dxdy$，其中 D 由曲线 $x=\sqrt{1+y^2}$ 与直线 $x+\sqrt{2}y=0$ 及 $x-\sqrt{2}y=0$ 围成



详解：积分区域如图

$D=D_1\bigcup D_2$，

其中 $D_1=\left\{(x,y)\middle|0\le y\le1,\sqrt{2}y\le x\le\sqrt{1+y^2}\right\}$

$D_2=\left\{(x,y)\middle|-1\le y\le0,-\sqrt{2}y\le x\le\sqrt{1+y^2}\right\}$

$\iint\limits_{D}\left(x+y\right)^3dxdy=\iint\limits_{D}\left(x^3+3x^2y+3xy^2+y^3\right)dxdy$ 因为区域 D 关于 x 轴对称，被积函数 $3x^2y+y^3$ 是 y 的奇函数，所以 $\iint\limits_{D}\left(3x^2y+y^3\right)dxdy=0$

$$\iint\limits_{D}\left(x+y\right)^3dxdy=\iint\limits_{D}\left(x^3+3xy^2\right)dxdy=2\iint\limits_{D_1}\left(x^3+3xy^2\right)dxdy=2\left[\int_0^1dy\int_{\sqrt{2}y}^{\sqrt{1+y^2}}\left(x^3+3xy^2\right)dx\right]$$

$$=2\int_0^1\left(\frac{1}{4}x^4+\frac{3}{2}x^2y^2\right)\Bigg|_{\sqrt{2}y}^{\sqrt{1+y^2}}dy=2\int_0^1\left(-\frac{9}{4}y^4+2y^2+\frac{1}{4}\right)dy=\frac{14}{15}$$

(17)(本题满分 10 分)

求函数 $M=xy+2yz$ 在约束条件 $x^2+y^2+z^2=10$ 下的最大值和最小值

详解：令 $F\left(x,y,z,\lambda\right)=xy+2yz+\lambda\left(x^2+y^2+z^2-10\right)$

$$\therefore\begin{cases}F_x'=y+2\lambda x=0\\F_y'=x+2z+2\lambda y=0\\F_z'=2y+2\lambda z=0\\F_\lambda'=x^2+y^2+z^2-10=0\end{cases}$$

解得$\begin{cases}x=1,y=\pm\sqrt{5},z=2\\x=-1,y=\pm\sqrt{5},z=-2\end{cases}$

$\therefore M\left(1,\sqrt{5},2\right)=M\left(-1,-\sqrt{5},-2\right)=5\sqrt{5}$ 为最大值，

$M\left(1,-\sqrt{5},2\right)=M\left(-1,\sqrt{5},-2\right)=-5\sqrt{5}$ 为最小值.

(18)(本题满分 10 分)

(I) 比较$\int_0^1\left|\ln t\right|\left[\ln(1+t)\right]^n dt$与$\int_0^1 t^n\left|\ln t\right|dt$（$n=1,2,\cdots$）的大小，说明理由

(II) 设$u_n=\int_0^1\left|\ln t\right|\left[\ln(1+t)\right]^n dt$（$n=1,2,\cdots$）求极限$\lim\limits_{n\to\infty}u_n$

解：(I)当$0<x<1$时$0<\ln(1+x)<x$，

故$\left[\ln(1+t)\right]^n<t^n$，所以$\left|\ln t\right|\left[\ln(1+t)\right]^n<\left|\ln t\right|t^n$

$\therefore\int_0^1\left|\ln t\right|\left[\ln(1+t)\right]^n dt<\int_0^1\left|\ln t\right|t^n dt$，（$n=1,2,\cdots$）

(II)$\int_0^1\left|\ln t\right|t^n dt=-\int_0^1\ln t\cdot t^n dt=-\dfrac{1}{n+1}\int_0^1\ln t d\left(t^{n+1}\right)\ =\dfrac{1}{\left(n+1\right)^2}$

故由$0<u_n<\int_0^1\left|\ln t\right|t^n dt=\dfrac{1}{\left(n+1\right)^2}$，根据夹逼定理得$0\le\lim\limits_{n\to\infty}u_n\le\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\left(n+1\right)^2}=0$

故$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$.

(19)(本题满分 10 分)

设函数$f(x)$在$\left[0,3\right]$上连续，在$\left(0,3\right)$内存在二阶导数，且

$2f(0)=\int_0^2 f(x)dx=f(2)+f(3)$，

(I) 证明：存在$\eta\in(0,2)$使$f(\eta)=f(0)$;

(II) 证明存在$\xi\in(0,3)$，使$f''(\xi)=0$

证明：(I) $\because 2f(0)=\int_0^2 f(x)dx$，又$\because f\left(x\right)$在$\left[0,2\right]$上连续

$\therefore$ 由积分中值定理得，至少有一点 $\eta \in (0,2)$，使得 $\int_0^2 f(x)dx = f(\eta)\cdot(2-0)$

$\therefore 2f(0) = 2f(\eta)$，$\therefore$ 存在 $\eta \in (0,2)$ 使得 $f(\eta) = f(0)$。

(II) $\because f(2)+f(3)=2f(0)$，即 $\dfrac{f(2)+f(3)}{2} = f(0)$

又 $\because f(x)$ 在 $[2,3]$ 上连续，由介值定理知，至少存在一点 $\eta_1 \in [2,3]$ 使得 $f[\eta_1] = f(0)$

$\because f(x)$ 在 $[0,2]$ 上连续，在 $(0,2)$ 上可导，且 $f(0) = f(2)$

$\therefore$ 由罗尔中值定理知，$\exists \xi_1 \in (0,2)$，有 $f'(\xi_1) = 0$

又 $\because f(x)$ 在 $[2,\eta_1]$ 上连续，在 $(2,\eta_1)$ 上可导，且 $f(2) = f(0) = f(\eta_1)$

$\therefore$ 由罗尔中值定理知，$\exists \xi_2 \in (2,\eta_1)$，有 $f'(\xi_2) = 0$

又 $\because f(x)$ 在 $[\xi_1,\xi_2]$ 上二阶可导，且 $f'(\xi_1) = f'(\xi_2) = 0$

$\therefore$ 由罗尔中值定理，至少有一点 $\xi \in (\xi_1,\xi_2)$，使得 $f''(\xi) = 0$

(20)(本题满分 11 分)

设 $A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 0 & \lambda-1 & 0 \\ 1 & 1 & \lambda \end{pmatrix}$，$b = \begin{pmatrix} a \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

已知线性方程组 $Ax = b$ 存在两个不同的解

(I) 求 λ，a；

(II) 求方程组 $Ax = b$ 的通解。

解析：方法一：（I）已知 $Ax = b$ 有 2 个不同的解 $\therefore r(A) = r(A,b) < 3$，对增广矩阵进行初等行变换，得

$$(A,b) = \left(\begin{array}{ccc:c} \lambda & 1 & 1 & a \\ 0 & \lambda-1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & \lambda & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & \lambda & 1 \\ 0 & \lambda-1 & 0 & 1 \\ \lambda & 1 & 1 & a \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & \lambda & 1 \\ 0 & \lambda-1 & 0 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 1-\lambda^2 & a-\lambda \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & \lambda & 1 \\ 0 & \lambda-1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1-\lambda^2 & a-\lambda+1 \end{array}\right)$$

当 $\lambda = 1$ 时，

$$(A,b)\to\left(\begin{array}{ccc:c}1&1&1&1\\0&0&0&1\\0&0&0&a\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc:c}1&1&1&1\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{array}\right)$$

此时，$r(A)=1\neq r(A,b)=2$，$Ax=b$无解，所以$\lambda\neq1$。

当$\lambda=-1$，$(A,b)\to\left(\begin{array}{ccc:c}1&1&-1&1\\0&-2&0&1\\0&0&0&a+2\end{array}\right)$

由于$r(A)=r(A,b)<3$，所以$a=-2$。因此，$\lambda=-1$，$a=-2$。

（II）$(A,b)\to\left(\begin{array}{ccc:c}1&1&-1&1\\0&-2&0&1\\0&0&0&0\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc:c}1&1&-1&1\\0&1&0&-\frac{1}{2}\\0&0&0&0\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc:c}1&0&-1&\frac{3}{2}\\0&1&0&-\frac{1}{2}\\0&0&0&0\end{array}\right)$

原方程组等价为$\begin{cases}x_1-x_3=\frac{3}{2}\\x_2=-\frac{1}{2}\end{cases}$，即$\begin{cases}x_1=x_3+\frac{3}{2}\\x_2=-\frac{1}{2}\\x_3=x_3\end{cases}$，$\therefore\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=x_3\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\frac{3}{2}\\-\frac{1}{2}\\0\end{pmatrix}$。

$\therefore Ax=b$的通解为$x=k\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\frac{3}{2}\\-\frac{1}{2}\\0\end{pmatrix}$，k 为任意常数。

方法二：（I）已知$Ax=b$有 2 个不同的解

$\therefore r(A)=r(A,b)<3$

又$|A|=0$，即$|A|=\begin{vmatrix}\lambda&1&1\\0&\lambda-1&0\\1&1&\lambda\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2(\lambda+1)=0$，知$\lambda=1$或-1。

当$\lambda=1$时，$r(A)=1\neq r(A,b)=2$，此时，$Ax=b$无解，$\therefore\lambda=-1$。代入由$\therefore r(A)=r(A,b)$得$a=-2$。

（Ⅱ）$(A,b)=\left(\begin{array}{ccc:c}-1&1&1&-2\\0&-2&0&1\\1&1&-1&1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc:c}1&-1&-1&2\\0&2&0&-1\\0&0&0&0\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc:c}1&0&-1&\frac{3}{2}\\0&1&0&-\frac{1}{2}\\0&0&0&0\end{array}\right)$

原方程组等价为$\begin{cases}x_1-x_3=\frac{3}{2}\\x_2=-\frac{1}{2}\end{cases}$，即$\begin{cases}x_1=x_3+\frac{3}{2}\\x_2=-\frac{1}{2}\\x_3=x_3\end{cases}$，$\therefore\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=x_3\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\frac{3}{2}\\-\frac{1}{2}\\0\end{pmatrix}$。

$\therefore Ax=b$的通解为$x=k\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\frac{3}{2}\\-\frac{1}{2}\\0\end{pmatrix}$，k为任意常数。

(21)(本题满分 11 分)

设$A=\begin{pmatrix}0&-1&4\\-1&3&a\\4&a&0\end{pmatrix}$，正交矩阵$Q$使得$Q^TAQ$为对角矩阵，若$Q$的第 1 列为$\frac{1}{\sqrt{6}}(1,2,1)^T$，求$a,Q$

详解：由于$A=\begin{pmatrix}0&-1&4\\-1&3&a\\4&a&0\end{pmatrix}$，存在正交矩阵$Q$，使得$Q^TAQ$为对角阵，且$Q$的第一列为$\frac{1}{\sqrt{6}}(1,2,1)^T$，故 A 对应于$\lambda_1$的特征向量为$\xi_1=\frac{1}{\sqrt{6}}(1,2,1)^T$，故$A\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{6}}\\\frac{2}{\sqrt{6}}\\\frac{1}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}=\lambda_1\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{6}}\\\frac{2}{\sqrt{6}}\\\frac{1}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}$，即

$\begin{pmatrix}0&-1&4\\-1&3&a\\4&a&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}=\lambda_1\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$，由此可得$a=-1,\lambda_1=2$。

$A=\begin{pmatrix}0&-1&4\\-1&3&-1\\4&-1&0\end{pmatrix}$，由$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda&1&-4\\1&\lambda-3&1\\-4&1&\lambda\end{vmatrix}=0$，可得

$$\begin{vmatrix}\lambda&1&-4\\1&\lambda-3&1\\-4&1&\lambda\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda&1&-4\\1&\lambda-3&1\\-4-\lambda&0&\lambda+4\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda-4&1&-4\\2&\lambda-3&1\\0&0&\lambda+4\end{vmatrix}$$

$$=(\lambda+4)\begin{vmatrix}\lambda-4&1\\2&\lambda-3\end{vmatrix}=(\lambda+4)(\lambda-2)(\lambda-5)=0$$

故A的特征值为$\lambda_1=2,\lambda_2=-4,\lambda_3=5$，且对应于$\lambda_1=2$的特征向量为$\xi_1=\frac{1}{\sqrt{6}}(1,2,1)^T$。

由$(\lambda_2E-A)x=0$，即$\begin{pmatrix}-4&1&-4\\1&-7&1\\-4&1&-4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=0$

$$\begin{pmatrix}-4&1&-4\\1&-7&1\\-4&1&-4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-7&1\\0&-27&0\\0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

可得对应于$\lambda_2=-4$的特征向量为$\xi_2=(-1,0,1)^T$。

由$(\lambda_3E-A)x=0$，即$\begin{pmatrix}5&1&-4\\1&2&1\\-4&1&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=0$

$$\begin{pmatrix}5&1&-4\\1&2&1\\-4&1&5\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&1\\0&9&9\\0&-9&-9\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&1\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

可得对应于$\lambda_3=5$的特征向量为$\xi_3=(1,-1,1)^T$。

由于A为实对称矩阵，ξ_1,ξ_2,ξ_3为对应于不同特征值的特征向量，所以ξ_1,ξ_2,ξ_3相互正交，只需单位化：

$$\eta_1=\frac{\xi_1}{\|\xi_1\|}=\frac{1}{\sqrt{6}}(1,2,1)^T,\eta_2=\frac{\xi_2}{\|\xi_2\|}=\frac{1}{\sqrt{2}}(-1,0,1)^T,\eta_3=\frac{\xi_3}{\|\xi_3\|}=\frac{1}{\sqrt{3}}(1,-1,1)^T,$$

取 $Q=(\eta_1,\eta_2,\eta_3)=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\\ \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{3}}\\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}$，则 $Q^TAQ=\Lambda=\begin{pmatrix}2 & & \\ & -4 & \\ & & 5\end{pmatrix}$。

(22)(本题满分 11 分)

设二维随机变量 (X,Y) 的概率密度为 $f(x,y)=Ae^{-2x^2+2xy-y^2}$，$-\infty<x<+\infty$，$-\infty<y<+\infty$，求常数 A 及条件概率密度 $f_{Y|X}(y|x)$

详解：

$$f(x,y)=Ae^{-2x^2+2xy-y^2}=Ae^{-(y-x)^2}e^{-x^2}=A\pi\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}\frac{1}{\sqrt{2}}}e^{-\frac{(y-x)^2}{2\times\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}}\right]\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}\frac{1}{\sqrt{2}}}e^{-\frac{x^2}{2\times\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}}\right]$$

利用概率密度的性质得到

$$1=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dxdy=A\pi\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\frac{1}{\sqrt{2}}}e^{-\frac{x^2}{2\times\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}}dx\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\frac{1}{\sqrt{2}}}e^{-\frac{(y-x)^2}{2\times\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}}dy=A\pi$$

(利用正态分布的概率密度为 1，即 $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}dx=1$)

得到 $A=\pi^{-1}$

即 $f(x,y)=\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}\frac{1}{\sqrt{2}}}e^{-\frac{(y-x)^2}{2\times\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}}\right]\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}\frac{1}{\sqrt{2}}}e^{-\frac{x^2}{2\times\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}}\right]$

X 的边缘概率密度为

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\frac{1}{\sqrt{2}}}e^{-\frac{(y-x)^2}{2\times\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}}dy=\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2}$$

条件概率密度

$$f_{Y|X}(y|x)=\frac{f(x,y)}{f_X(x)}=\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2+2xy-y^2},-\infty<x<+\infty,-\infty<y<+\infty$$

(23)(本题满分 11 分)

箱内有 6 个球，其中红、白、黑球的个数分别为 1、2、3 个，现从箱中随机的取出 2 个球，记 X 为取出的红球个数，Y 为取出的白球个数。

(I)求随机变量 (X,Y) 的概率分布;　　(II)求 $\operatorname{cov}(X,Y)$

详解：(I) X 的所有可能取值为 $0,1$，Y 的所有可能取值为 $0,1,2$

$$P\left\{X=0,Y=0\right\}=\frac{C_3^2}{C_6^2}=\frac{3}{15}=\frac{1}{5}$$ (取到的两个球都是黑球)

$$P\left\{X=0,Y=1\right\}=\frac{C_2^1C_3^1}{C_6^2}=\frac{6}{15}=\frac{2}{5}$$ (取到的一个是白球，一个是黑球)

$$P\left\{X=0,Y=2\right\}=\frac{C_2^2}{C_6^2}=\frac{1}{15}$$ (取到的两个球都是黑球)

$$P\left\{X=1,Y=0\right\}=\frac{C_1^1C_3^1}{C_6^2}=\frac{3}{15}=\frac{1}{5}$$ (取到的一个是红球，一个是黑球)

$$P\left\{X=1,Y=1\right\}=\frac{C_1^1C_2^1}{C_6^2}=\frac{2}{15}$$ (取到的一个是红球，一个是白球)

$$P\left\{X=1,Y=2\right\}=\frac{0}{C_6^2}=0$$

(X,Y) 的联合分布律为

$X \backslash Y$	0	1	2	
0	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{2}{3}$
1	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{15}$	0	$\frac{1}{3}$
	$\frac{2}{5}$	$\frac{8}{15}$	$\frac{1}{15}$	

(II) $Cov(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)$

$E(XY)=1\times1\times\frac{2}{15}=\frac{2}{15}$，$E(X)=0\times\frac{2}{3}+1\times\frac{1}{3}=\frac{1}{3}$，$E(Y)=0\times\frac{2}{5}+1\times\frac{8}{15}+2\times\frac{1}{15}=\frac{2}{3}$

$Cov(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=\frac{2}{15}-\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{-4}{45}$