# 2009年全国硕士研究生入学统一考试

# 数学二试题

**一、选择题：1～8小题，每小题4分，共32分，下列每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求，把所选项前的字母填在题后的括号内.**

（1）函数 $f\left(x\right)=\dfrac{x-x^3}{\sin nx}$ 的可去间断点的个数，则（　　）

$(A)$1.　　$(B)$2.　　$(C)$3.　　$(D)$无穷多个.

【答案】C

【解析】

$$f\left(x\right)=\frac{x-x^3}{\sin \pi x}$$

则当 $x$ 取任何整数时，$f\left(x\right)$ 均无意义

故 $f\left(x\right)$ 的间断点有无穷多个，但可去间断点为极限存在的点，故应是 $x-x^3=0$ 的解

$$x_{1,2,3}=0,\pm1$$

$$\lim_{x\to0}\frac{x-x^3}{\sin\pi x}=\lim_{x\to0}\frac{1-3x^2}{\pi\cos\pi x}=\frac{1}{\pi}$$
$$\lim_{x\to1}\frac{x-x^3}{\sin\pi x}=\lim_{x\to1}\frac{1-3x^2}{\pi\cos\pi x}=\frac{2}{\pi}$$
$$\lim_{x\to-1}\frac{x-x^3}{\sin\pi x}=\lim_{x\to-1}\frac{1-3x^2}{\pi\cos\pi x}=\frac{2}{\pi}$$

故可去间断点为3个，即 $0,\pm1$

（2）当 $x\to0$ 时，$f\left(x\right)=x-\sin ax$ 与 $g\left(x\right)=x^2\ln\left(1-bx\right)$ 是等价无穷小，则（　　）

$(A)$ $a=1,b=-\dfrac{1}{6}$.　$(B)$ $a=1,b=\dfrac{1}{6}$.　$(C)$ $a=-1,b=-\dfrac{1}{6}$.　$(D)$ $a=-1,b=\dfrac{1}{6}$.

【答案】 $A$

【解析】 $f(x)=x-\sin ax,g(x)=x^2ln(1-bx)$ 为等价无穷小，则

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to0}\frac{x-\sin ax}{x^2\ln(1-bx)}=\lim_{x\to0}\frac{x-\sin ax}{x^2\cdot(-bx)}\overset{洛}{=}\lim_{x\to0}\frac{1-a\cos ax}{-3bx^2}\overset{洛}{=}\lim_{x\to0}\frac{a^2\sin ax}{-6bx}$$



$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^2\sin ax}{-\dfrac{6b}{a}\cdot ax}=-\dfrac{a^3}{6b}=1 \qquad \therefore a^3=-6b$ 故排除 $B,C$。

另外 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-a\cos ax}{-3bx^2}$ 存在，蕴含了 $1-a\cos ax\to 0\left(x\to 0\right)$ 故 $a=1$. 排除 $D$。
所以本题选 A。

（3）设函数 $z=f\left(x,y\right)$ 的全微分为 $dz=xdx+ydy$，则点 $\left(0,0\right)$（　）

$\left(A\right)$ 不是 $f\left(x,y\right)$ 的连续点.　　$\left(B\right)$ 不是 $f\left(x,y\right)$ 的极值点.

$\left(C\right)$ 是 $f\left(x,y\right)$ 的极大值点.　　$\left(D\right)$ 是 $f\left(x,y\right)$ 的极小值点.

【答案】 $\left(D\right)$

【解析】因 $dz=xdx+ydy$ 可得 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=x,\dfrac{\partial z}{\partial y}=y$

$A=\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=1, B=\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=0, C=\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=1$

又在（0，0）处，$\dfrac{\partial z}{\partial x}=0,\dfrac{\partial z}{\partial y}=0$

$AC-B^2=1>0$

故（0，0）为函数 $z=f(x,y)$ 的一个极小值点

（4）设函数 $f\left(x,y\right)$ 连续，则 $\int_1^2 dx\int_x^2 f\left(x,y\right)dy+\int_1^2 dy\int_y^{4-y} f\left(x,y\right)dx=$（　）

$\left(A\right)\int_1^2 dx\int_1^{4-x} f\left(x,y\right)dy$.　　$\left(B\right)\int_1^2 dx\int_x^{4-x} f\left(x,y\right)dy$.

$\left(C\right)\int_1^2 dy\int_1^{4-y} f\left(x,y\right)dx$.　　$\left(D\right).\int_1^2 dy\int_y^2 f\left(x,y\right)dx$

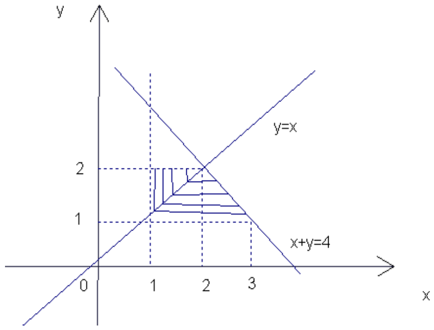
【答案】$\left(C\right)$

【解析】$\int_1^2 dx\int_x^2 f(x,y)dy+\int_1^2 dy\int_x^2 f(x,y)dx$ 的积分区域为两部分：

$D_1=\left\{(x,y)\middle|1\le x\le 2,x\le y\le 2\right\}$，$D_2=\left\{(x,y)\middle|1\le y\le 2,y\le x\le 4-y\right\}$

将其写成一块 $D=\left\{(x,y)\middle|1\le y\le 2,1\le x\le 4-y\right\}$

故二重积分可以表示为$\int_1^2 dy\int_1^{4-y} f(x,y)dx$，故答案为 C




（5）若$f''(x)$不变号，且曲线$y=f(x)$在点$(1,1)$上的曲率圆为$x^2+y^2=2$，则$f(x)$在区间$(1,2)$内（　　）

$(A)$有极值点，无零点.　$(B)$无极值点，有零点.

$(C)$有极值点，有零点.　$(D)$无极值点，无零点.

【答案】　B

【解析】由题意可知，$f(x)$是一个凸函数，即$f''(x)<0$，且在点$(1,1)$处的曲率

$$\rho=\frac{|y''|}{(1+(y')^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$，而$f'(1)=-1$，由此可得，$f''(1)=-2$

在$[1,2]$上，$f'(x)\le f'(1)=-1<0$，即$f(x)$单调减少，没有极值点。

对于$f(2)-f(1)=f'(\zeta)<-1$，$\zeta\in(1,2)$，（拉格朗日中值定理）

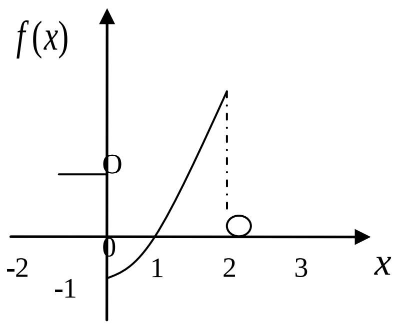
$\therefore\ f(2)<0$而$f(1)=1>0$

由零点定理知，在$[1,2]$上，$f(x)$有零点。　故应选（B）

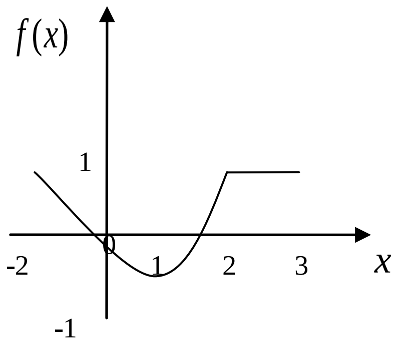
（6）设函数$y=f(x)$在区间$[-1,3]$上的图形为：



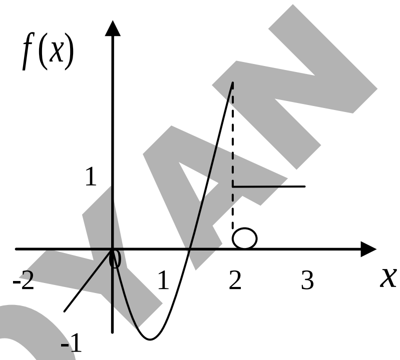
 



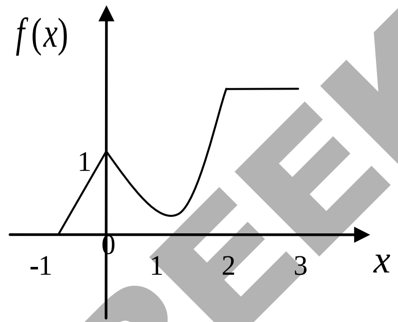

则函数 $F(x)=\int_0^x f(t)dt$ 的图形为（　　）



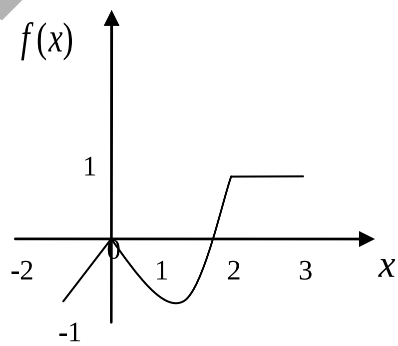

$(A)$.




$(B)$.




$(C)$.




$(D)$.

【答案】$D$

【解析】此题为定积分的应用知识考核，由 $y=f(x)$ 的图形可见，其图像与 $x$ 轴及 $y$ 轴、

$x=x_0$ 所围的图形的代数面积为所求函数 $F(x)$，从而可得出几个方面的特征：

① $x\in[0,1]$ 时，$F(x)\le 0$，且单调递减。

② $x\in[1,2]$ 时，$F(x)$ 单调递增。

③ $x\in[2,3]$ 时，$F(x)$ 为常函数。

④ $x\in[-1,0]$ 时，$F(x)\le 0$ 为线性函数，单调递增。

⑤由于 F(x)为连续函数

结合这些特点，可见正确选项为 $D$。

（7）设 A 、B 均为 2 阶矩阵，$A^*$，$B^*$分别为 A 、B 的伴随矩阵。若$|A|=2,|B|=3$，则分块矩阵$\begin{pmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{pmatrix}$的伴随矩阵为（　）

$(A).\begin{pmatrix} 0 & 3B^* \\ 2A^* & 0 \end{pmatrix}$　　$(B).\begin{pmatrix} 0 & 2B^* \\ 3A^* & 0 \end{pmatrix}$

$(C).\begin{pmatrix} 0 & 3A^* \\ 2B^* & 0 \end{pmatrix}$　　$(D).\begin{pmatrix} 0 & 2A^* \\ 3B^* & 0 \end{pmatrix}$

【答案】 B

【解析】根据 $CC^*=|C|E$ 若 $C^*=|C|C^{-1},C^{-1}=\dfrac{1}{|C|}C^*$

分块矩阵$\begin{pmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{pmatrix}$的行列式$\begin{vmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{vmatrix}=(-1)^{2\times 2}|A||B|=2\times 3=6$即分块矩阵可逆

$$\begin{pmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{pmatrix}^*=\begin{vmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{vmatrix}\begin{pmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{pmatrix}^{-1}=6\begin{pmatrix} 0 & B^{-1} \\ A^{-1} & 0 \end{pmatrix}=6\begin{pmatrix} 0 & \dfrac{1}{|B|}B^* \\ \dfrac{1}{|A|}A^* & 0 \end{pmatrix}$$

$$=6\begin{pmatrix} 0 & \dfrac{1}{3}B^* \\ \dfrac{1}{2}A^* & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 2B^* \\ 3A^* & 0 \end{pmatrix}$$

（8）设 A，P 均为 3 阶矩阵，$P^T$ 为 P 的转置矩阵，且$P^TAP=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$，若

P=（$\alpha_1$，$\alpha_2$，$\alpha_3$），Q=（$\alpha_1+\alpha_2$，$\alpha_2$，$\alpha_3$），则$Q^TAQ$为（　）

$(A).\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$　　$(B).\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

$(C).\begin{pmatrix}2&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$ $(D).\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}$

【答案】 A

【解析】$Q=(\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2,\alpha_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{bmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)E_{12}(1)$，即：

$$\begin{aligned}&Q=PE_{12}(1)\\&Q^TAQ=[PE_{12}(1)]^TA[PE_{12}(1)]=E_{12}^T(1)[P^TAP]E_{12}(1)\\&=E_{21}^T(1)\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{bmatrix}E_{12}(1)\\&=\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&1&0\\1&1&0\\0&0&2\end{bmatrix}\end{aligned}$$

**二、填空题：9-14 小题，每小题 4 分，共 24 分，请将答案写在答题纸指定位置上.**

（9）曲线$\begin{cases}x=\int_0^{1-t}e^{-u^2}du\\y=t^2\ln(2-t^2)\end{cases}$ 在（0，0）处的切线方程为______________

【答案】$y=2x$

【解析】$\dfrac{dy}{dt}=2t\ln(2-t^2)-t^2\cdot\dfrac{2t}{2-t^2}\Big|_{t=1}=-2$

$\dfrac{dx}{dt}=e^{-(1-t)^2}\cdot(-1)\Big|_{t=1}=-1$

所以 $\dfrac{dy}{dx}=2$

所以 切线方程为 $y=2x$

（10）已知$\int_{-\infty}^{+\infty}e^{k|x|}dx=1$,则 k =______________

【答案】$-2$

【解析】$1=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{k|x|}dx=2\int_0^{+\infty}e^{kx}dx=2\lim\limits_{b\to+\infty}\dfrac{1}{k}e^{kx}\Big|_0^b$

因为极限存在所以 $k<0$

$1=0-\frac{2}{k}$

$k=-2$

（11）$\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 e^{-x}\sin nxdx=$______________

【答案】0

【解析】令 $I_n=\int e^{-x}\sin nxdx=-e^{-x}\sin nx+n\int e^{-x}\cos nxdx$

$$=-e^{-x}\sin nx-ne^{-x}\cos nx-n^2I_n$$

所以 $I_n=-\frac{n\cos nx+\sin nx}{n^2+1}e^{-x}+C$

即 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 e^{-x}\sin nxdx=\lim\limits_{n\to\infty}(-\frac{n\cos nx+\sin nx}{n^2+1}e^{-x}\Big|_0^1)$

$$=\lim_{n\to\infty}(-\frac{n\cos n+\sin n}{n^2+1}e^{-1}+\frac{n}{n^2+1})$$

$$=0$$

（12）设 $y=y(x)$ 是由方程 $\mathrm{xy}+e^y=x+1$ 确定的隐函数，则 $\frac{\mathrm{d}^2\mathrm{y}}{\mathrm{dx}^2}\Big|_{\mathrm{x}=0}=$______________

【答案】$-3$

【解析】对方程 $\mathrm{xy}+e^y=x+1$ 两边关于 $x$ 求导有 $y+xy'+y'e^y=1$，得 $y'=\frac{1-y}{x+e^y}$

对 $y+xy'+y'e^y=1$ 再次求导可得 $2y'+xy''+y''e^y+(y')^2e^y=0$，

得 $y''=-\frac{2y'+(y')^2e^y}{x+e^y}$　(*)

当 $x=0$ 时，$y=0$，$y'_{(0)}=\frac{1-0}{e^0}=1$，代入(*)得

$$y''(0)=-\frac{2y'(0)+(y'(0))^2e^0}{(0+e^0)^3}=-(2+1)=-3$$

（13）函数 $y=x^{2x}$ 在区间 $(0,1]$ 上的最小值为_______

【答案】$e^{-\frac{2}{e}}$

【解析】因为 $y'=x^{2x}(2\ln x+2)$，令 $y'=0$ 得驻点为 $x=\frac{1}{e}$。

又 $y''=x^{2x}(2\ln x+2)^2+x^{2x}\cdot\frac{2}{x}$，得 $y''\left(\frac{1}{e}\right)=2e^{-\frac{2}{e}+1}>0$，

故$x=\dfrac{1}{e}$为$y=x^{2x}$的极小值点，此时$y=e^{-\frac{2}{e}}$，

又当$x\in\left(0,\dfrac{1}{e}\right)$时，$y'(x)<0$；$x\in\left(\dfrac{1}{e},1\right]$时，$y'(x)>0$，故$y$在$\left(0,\dfrac{1}{e}\right)$上递减，在$\left(\dfrac{1}{e},1\right)$上递增。

而$y(1)=1$，$y_+(0)=\lim\limits_{x\to0^+}x^{2x}=\lim\limits_{x\to0^+}e^{2x\ln x}=e^{\lim\limits_{x\to0^+}\frac{2\ln x}{\frac{1}{x}}}=e^{\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\frac{2}{x}}{-\frac{1}{x^2}}}=e^{\lim\limits_{x\to0^+}(-2x)}=1$，

所以$y=x^{2x}$在区间$(0,1]$上的最小值为$y\left(\dfrac{1}{e}\right)=e^{-\frac{2}{e}}$。

(14)设$\alpha$，$\beta$为3维列向量，$\beta^{\mathrm{T}}$为$\beta$的转置，若矩阵$\alpha\beta^{\mathrm{T}}$相似于$\begin{pmatrix}2&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$，则$\beta^{\mathrm{T}}\alpha=$______

【答案】2

【解析】因为$\alpha\beta^T$相似于$\begin{pmatrix}2&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$，根据相似矩阵有相同的特征值，得到$\alpha\beta^T$得特征值是$2,0,0$而$\beta^{\mathrm{T}}\alpha$是一个常数，是矩阵$\alpha\beta^T$的对角元素之和，则$\beta^{\mathrm{T}}\alpha=2+0+0=2$

**三、解答题：15－23小题，共94分.请将解答写在答题纸指定的位置上.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.**

（15）（本题满分9分）求极限$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(1-\cos x)\left[x-\ln(1+\tan x)\right]}{\sin^4 x}$

【解析】$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(1-\cos x)\left[x-\ln(1+\tan x)\right]}{\sin^4 x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\frac{1}{2}x^2\left[x-\ln(1+\tan x)\right]}{\sin^4 x}$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to0}\frac{x^2}{\sin^2 x}\frac{x-\ln(1+\tan x)}{\sin^2 x}=\frac{1}{2}\lim_{x\to0}\frac{x-\ln(1+\tan x)}{\sin^2 x}=\frac{1}{4}$$

（16）（本题满分10 分）

计算不定积分$\int\ln\left(1+\sqrt{\dfrac{1+x}{x}}\right)dx\quad(x>0)$

【解析】

令 $\sqrt{\dfrac{1+x}{x}}=t$ 得 $x=\dfrac{1}{t^2-1},dx=\dfrac{-2tdt}{(t^2-1)^2}$

原式 $=\int\ln(1+t)\dfrac{-2t}{(t^2-1)^2}dt=\int\ln(1+t)\dfrac{-1}{(t^2-1)^2}d(t^2-1)$

$=\int\ln(1+t)d(\dfrac{1}{t^2-1})$

$=\dfrac{\ln(1+t)}{t^2-1}-\int\dfrac{1}{t^2-1}\cdot\dfrac{1}{t+1}dt$

$=\dfrac{\ln(1+t)}{t^2-1}-\int(\dfrac{1}{4(t-1)}+\dfrac{-1}{4(t+1)}+\dfrac{-1}{2（(t+1)^2}）dt$

$=\dfrac{\ln(1+t)}{t^2-1}+\dfrac{1}{4}\ln\left|\dfrac{t+1}{t-1}\right|-\dfrac{1}{2(t+1)}+C$

$=x\ln(1+\sqrt{\dfrac{1+x}{x}})+\dfrac{1}{4}\ln\dfrac{\sqrt{\dfrac{1+x}{x}}+1}{\sqrt{\dfrac{1+x}{x}}-1}-\dfrac{1}{2(\sqrt{\dfrac{1+x}{x}}+1)}+C$

$=x\ln(1+\sqrt{\dfrac{1+x}{x}})+\dfrac{1}{2}\ln(\sqrt{(1+x)}+\sqrt{x})-\dfrac{1}{2}\ln(\sqrt{(1+x)}-\sqrt{x})+C$

（17）（本题满分 10 分）设 $z=f\left(x+y,x-y,xy\right)$，其中 $f$ 具有 2 阶连续偏导数，求 $dz$ 与

$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$

【解析】

$\dfrac{\partial z}{\partial x}=f_1'+f_2'+yf_3'$

$\dfrac{\partial z}{\partial y}=f_1'-f_2'+xf_3'$

$\therefore dz=\dfrac{\partial z}{\partial x}dx+\dfrac{\partial z}{\partial y}dy$

$=(f_1'+f_2'+yf_3')dx+(f_1'-f_2'+xf_3')dy$

$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f_{11}''\cdot1+f_{12}''\cdot(-1)+f_{13}''\cdot x+f_{21}''\cdot1+f_{22}''\cdot(-1)+f_{23}''\cdot x+f_3'+y[f_{31}''\cdot1+f_{32}''\cdot(-1)+f_{33}''\cdot x]$

$=f_3'+f_{11}''-f_{22}''+xyf_{33}''+(x+y)f_{13}''+(x-y)f_{23}''$

（18）（本题满分 10 分）设非负函数 $y=y\left(x\right)\left(x\ge0\right)$ 满足微分方程 $xy''-y'+2=0$，当

曲线 $y=y(x)$ 过原点时，其与直线 $x=1$ 及 $y=0$ 围成平面区域 $D$ 的面积为 2，求 $D$ 绕 $y$ 轴旋转所得旋转体体积。

【解析】

解微分方程 $xy''-y'+2=0$ 得其通解 $y=C_1+2x+C_2x^2$, 其中 $C_1$，$C_2$ 为任意常数

又因为 $y=y(x)$ 通过原点时与直线 $x=1$ 及 $y=0$ 围成平面区域的面积为 2，于是可得

$C_1=0$

$$2=\int_0^1 y(x)dx=\int_0^1(2x+C_2x^2)dx=(x^2+\frac{C_2}{3}x^3)\Big|_0^1=1+\frac{C_2}{3}$$

从而 $C_2=3$

于是，所求非负函数 $y=2x+3x^2\ \ (x\geq 0)$

又由 $y=2x+3x^2$ 可得，在第一象限曲线 $y=f(x)$ 表示为 $x=\frac{1}{3}(\sqrt{1+3y}-1)$

于是 D 围绕 $y$ 轴旋转所得旋转体的体积为 $V=5\pi-V_1$，其中

$$V_1=\int_0^5\pi x^2dy=\int_0^5\pi\cdot\frac{1}{9}(\sqrt{1+3y}-1)^2dy$$
$$=\frac{\pi}{9}\int_0^5(2+3y-2\sqrt{1+3y})dy$$
$$=\frac{39}{18}\pi$$

$$V=5\pi-\frac{39}{18}\pi=\frac{51}{18}\pi=\frac{17}{6}\pi$$

（19）（本题满分 10 分）求二重积分 $\iint\limits_D(x-y)\,dxdy$，

其中 $D=\left\{(x,y)\,\middle|\,(x-1)^2+(y-1)^2\leq 2, y\geq x\right\}$

【解析】由 $(x-1)^2+(y-1)^2\leq 2$ 得 $r\leq 2(\sin\theta+\cos\theta)$，

$$\therefore\iint\limits_D(x-y)dxdy=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi}d\theta\int_0^{2(\sin\theta+\cos\theta)}(r\cos\theta-r\sin\theta)rdr$$

$$=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi}\left[\frac{1}{3}(\cos\theta-\sin\theta)\cdot r^3\Big|_0^{2(\sin\theta+\cos\theta)}\right]d\theta$$

$$=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi}\frac{8}{3}(\cos\theta-\sin\theta)\cdot(\sin\theta+\cos\theta)\cdot(\sin\theta+\cos\theta)^2 d\theta$$

$$=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi}\frac{8}{3}(\cos\theta-\sin\theta)\cdot(\sin\theta+\cos\theta)^3 d\theta$$

$$=\frac{8}{3}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi}(\sin\theta+\cos\theta)^3 d(\sin\theta+\cos\theta)=\frac{8}{3}\times\frac{1}{4}(\sin\theta+\cos\theta)^4\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi}=-\frac{8}{3}$$

（20）（本题满分 12 分）

设 $y=y(x)$ 是区间（$-\pi$，$\pi$）内过（$-\frac{\pi}{\sqrt{2}},\frac{\pi}{\sqrt{2}}$）的光滑曲线，当 $-\pi<x<0$ 时，曲线上任一点处的法线都过原点，当 $0\le x<\pi$ 时，函数 $y(x)$ 满足 $y''+y+x=0$。求 $y(x)$ 的表达式

【解析】由题意，当 $-\pi<x<0$ 时，$y=-\frac{x}{y'}$，即 $ydy=-xdx$，得 $y^2=-x^2+c$，

又 $y(-\frac{\pi}{\sqrt{2}})=\frac{\pi}{\sqrt{2}}$ 代入 $y^2=-x^2+c$ 得 $c=\pi^2$，从而有 $x^2+y^2=\pi^2$

当 $0\le x<\pi$ 时，$y''+y+x=0$ 得 $y''+y=0$ 的通解为 $y^*=c_1\cos x+c_2\sin x$

令解为 $y_1=Ax+b$，则有 $0+Ax+b+x=0$，得 $A=-1,b=0$，

故 $y_1=-x$，得 $y''+y+x=0$ 的通解为 $y=c_1\cos x+c_2\sin x-x$

由于 $y=y(x)$ 是 $(-\pi,\pi)$ 内的光滑曲线，故 $y$ 在 $x=0$ 处连续

于是由 $y(0-)=\pm\pi$，$y(0+)=c_1$，故 $c_1=\pm\pi$ 时，$y=y(x)$ 在 $x=0$ 处连续

又当 $-\pi < x < 0$ 时，有 $2x+2y\cdot y'=0$，得 $y_-'(0)=-\frac{x}{y}=0$，

当 $0\le x<\pi$ 时，有 $y'=-c_1\sin x+c_2\cos x-1$，得 $y_+'(0)=c_2-1$

由 $y_-'(0)=y_+'(0)$ 得 $c_2-1=0$，即 $c_2=1$

故 $y=y(x)$ 的表达式为 $y=\begin{cases}-\sqrt{\pi^2-x^2}, & -\pi<x<0\\ -\pi\cos x+\sin x-x, & 0\le x<\pi\end{cases}$ 或

$y=\begin{cases}\sqrt{\pi^2-x^2}, & -\pi<x<0\\ \pi\cos x+\sin x-x, & 0\le x<\pi\end{cases}$，又过点 $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$，

所以 $y=\begin{cases}\sqrt{\pi^2-x^2}, & -\pi<x<0\\ \pi\cos x+\sin x-x, & 0\le x<\pi\end{cases}$。

（21）（本题满分 11 分）

（Ⅰ）证明拉格朗日中值定理：若函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 $(a,b)$ 可导，则存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$

（Ⅱ）证明：若函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，在 $(0,\delta)(\delta>0)$ 内可导，且 $\lim\limits_{x\to0^+}f'(x)=A$，则 $f_+'(0)$ 存在，且 $f_+'(0)=A$。

【解析】（Ⅰ）作辅助函数 $\varphi(x)=f(x)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$，易验证 $\varphi(x)$ 满足：$\varphi(a)=\varphi(b)$；$\varphi(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，在开区间 $(a,b)$ 内可导，且 $\varphi'(x)=f'(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$。

根据罗尔定理，可得在 $(a,b)$ 内至少有一点 $\xi$，使 $\varphi'(\xi)=0$，即

$$f'(\xi)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=0,\therefore f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$$

（Ⅱ）任取 $x_0\in(0,\delta)$，则函数 $f(x)$ 满足；

在闭区间 $[0,x_0]$ 上连续，开区间 $(0,x_0)$ 内可导，从而有拉格朗日中值定理可得：存在 $\xi_{x_0}\in(0,x_0)\subset(0,\delta)$，使得 $f'\left(\xi_{x_0}\right)=\frac{f(x_0)-f(0)}{x_0-0}\cdots\cdots(*)$

又由于 $\lim\limits_{x\to0^+}f'(x)=A$，对上式（*式）两边取 $x_0\to0^+$ 时的极限可得：

$$f_+^{'}(0)=\lim_{x_0\to0^+}\frac{f(x_0)-f(0)}{x_0-0}=\lim_{x_0\to0^+}f^{'}(\xi_{x_0})=\lim_{\xi_{x_0}\to0^+}f^{'}(\xi_{x_0})=A$$

故 $f_+^{'}(0)$ 存在，且 $f_+^{'}(0)=A$。

（22）（本题满分 11 分设 $A=\begin{pmatrix}1&-1&-1\\-1&1&1\\0&-4&-2\end{pmatrix}$， $\xi_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\-2\end{pmatrix}$

（Ⅰ）求满足 $A\xi_2=\xi_1,A^2\xi_3=\xi_1$ 的所有向量 $\xi_2,\xi_3$

（Ⅱ）对（Ⅰ）中的任一向量 $\xi_2,\xi_3$，证明：$\xi_1,\xi_2,\xi_3$ 线性无关。

【解析】（Ⅰ）解方程 $A\xi_2=\xi_1$

$$(A,\xi_1)=\begin{pmatrix}1&-1&-1&-1\\-1&1&1&1\\0&-4&-2&-2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-1&-1&-1\\0&0&0&0\\0&2&1&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-1&-1&-1\\0&2&1&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$r(A)=2$ 故有一个自由变量，令 $x_3=2$，由 $Ax=0$ 解得， $x_2=-1,x_1=1$

求特解，令 $x_1=x_2=0$，得 $x_3=1$

故 $\xi_2=k_1\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$，其中 $k_1$ 为任意常数

解方程 $A^2\xi_3=\xi_1$

$$A^2=\begin{pmatrix}2&2&0\\-2&-2&0\\4&4&0\end{pmatrix}$$

$$(A^2,\xi_1)=\begin{pmatrix}2&2&0&-1\\-2&-2&0&1\\4&4&0&2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&0&\frac{-1}{2}\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

故有两个自由变量，令 $x_2=-1$，由 $A^2x=0$ 得 $x_1=1,x_3=0$

求特解$\eta_2=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\0\\0\end{pmatrix}$ 故 $\xi_3=k_2\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\0\\0\end{pmatrix}$ ，其中$k_2$为任意常数

（Ⅱ）证明：

由于$\begin{vmatrix}-1 & k_1 & k_2+\frac{1}{2}\\ 1 & -k_1 & -k_2\\ -2 & 2k_1+1 & 0\end{vmatrix}=2k_1k_2+(2k_1+1)(k_2+\frac{1}{2})-2k_1(k_2+\frac{1}{2})-k_2(2k_1+1)$

$=\frac{1}{2}\neq 0$ 故$\xi_1,\xi_2,\xi_3$ 线性无关.

（23）（本题满分 11 分）设二次型 $f\left(x_1,x_2,x_3\right)=ax_1^2+ax_2^2+\left(a-1\right)x_3^2+2x_1x_3-2x_2x_3$

（Ⅰ）求二次型 $f$ 的矩阵的所有特征值；

（Ⅱ）若二次型 $f$ 的规范形为 $y_1^2+y_2^2$，求$a$的值。

【解析】（Ⅰ） $A=\begin{pmatrix}a & 0 & 1\\ 0 & a & -1\\ 1 & -1 & a-1\end{pmatrix}$

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-a & 0 & -1\\ 0 & \lambda-a & 1\\ -1 & 1 & \lambda-a+1\end{vmatrix}=(\lambda-a)\begin{vmatrix}\lambda-a & 1\\ 1 & \lambda-a+1\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}0 & \lambda-a\\ -1 & 1\end{vmatrix}$$

$=(\lambda-a)[(\lambda-a)(\lambda-a+1)-1]-[0+(\lambda-a)]$

$=(\lambda-a)[(\lambda-a)(\lambda-a+1)-2]$

$=(\lambda-a)[\lambda^2-2a\lambda+\lambda+a^2-a-2]$

$=(\lambda-a)\{[a\lambda+\frac{1}{2}(1-2a)]^2-\frac{9}{4}\}$

$=(\lambda-a)(\lambda-a+2)(\lambda-a-1)$

$\therefore\lambda_1=a,\lambda_2=a-2,\lambda_3=a+1$

（Ⅱ） 若规范形为$y_1^2+y_2^2$，说明有两个特征值为正，一个为 0。则

1) 若$\lambda_1=a=0$，则 $\lambda_2=-2<0$ ，$\lambda_3=1$ ，不符题意

2) 若$\lambda_2=0$ ，即$a=2$，则$\lambda_1=2>0$，$\lambda_3=3>0$，符合

3) 若 $\lambda_3 = 0$ ，即 $a = -1$，则 $\lambda_1 = -1 < 0$ ， $\lambda_2 = -3 < 0$，不符题意

综上所述，故 $a = 2$