

2009 年全国硕士研究生入学统一考试

数学二试题

一、选择题：1~8 小题，每小题 4 分，共 32 分，下列每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求，把所选项前的字母填在题后的括号内。

(1) 函数 $f(x) = \frac{x-x^3}{\sin nx}$ 的可去间断点的个数，则 ()

(A) 1. (B) 2. (C) 3. (D) 无穷多个.

【答案】 C

【解析】

$$f(x) = \frac{x-x^3}{\sin nx}$$

则当 x 取任何整数时， $f(x)$ 均无意义

故 $f(x)$ 的间断点有无穷多个，但可去间断点为极限存在的点，故应是 $x-x^3=0$ 的解

$$x_{1,2,3} = 0, \pm 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x-x^3}{\sin nx} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-3x^2}{\pi \cos nx} = \frac{1}{\pi}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-x^3}{\sin nx} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-3x^2}{\pi \cos nx} = \frac{2}{\pi}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x-x^3}{\sin nx} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{1-3x^2}{\pi \cos nx} = \frac{2}{\pi}$$

故可去间断点为 3 个，即 $0, \pm 1$

(2) 当 $x \rightarrow 0$ 时， $f(x) = x - \sin ax$ 与 $g(x) = x^2 \ln(1-bx)$ 是等价无穷小，则 ()

(A) $a=1, b=-\frac{1}{6}$. (B) $a=1, b=\frac{1}{6}$. (C) $a=-1, b=-\frac{1}{6}$. (D) $a=-1, b=\frac{1}{6}$.

【答案】 A

【解析】 $f(x) = x - \sin ax, g(x) = x^2 \ln(1-bx)$ 为等价无穷小，则

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin ax}{x^2 \ln(1-bx)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin ax}{x^2 \cdot (-bx)} \stackrel{\text{洛}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - a \cos ax}{-3bx^2} \stackrel{\text{洛}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^2 \sin ax}{-6bx}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^2 \sin ax}{\frac{6b}{a} \cdot ax} = -\frac{a^3}{6b} = 1 \quad \therefore a^3 = -6b \quad \text{故排除 } B, C。$$

另外 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - a \cos ax}{-3bx^2}$ 存在，蕴含了 $1 - a \cos ax \rightarrow 0$ ($x \rightarrow 0$) 故 $a = 1$ 。排除 D 。

所以本题选 A 。

(3) 设函数 $z = f(x, y)$ 的全微分为 $dz = xdx + ydy$ ，则点 $(0, 0)$ ()

(A) 不是 $f(x, y)$ 的连续点。 (B) 不是 $f(x, y)$ 的极值点。

(C) 是 $f(x, y)$ 的极大值点。 (D) 是 $f(x, y)$ 的极小值点。

【答案】 (D)

【解析】因 $dz = xdx + ydy$ 可得 $\frac{\partial z}{\partial x} = x, \frac{\partial z}{\partial y} = y$

$$A = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 1, B = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = 0, C = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 1$$

又在 $(0, 0)$ 处, $\frac{\partial z}{\partial x} = 0, \frac{\partial z}{\partial y} = 0$

$$AC - B^2 = 1 > 0$$

故 $(0, 0)$ 为函数 $z = f(x, y)$ 的一个极小值点

(4) 设函数 $f(x, y)$ 连续，则 $\int_1^2 dx \int_x^2 f(x, y) dy + \int_1^2 dy \int_y^{4-y} f(x, y) dx =$ ()

$$(A) \int_1^2 dx \int_1^{4-x} f(x, y) dy. \quad (B) \int_1^2 dx \int_x^{4-x} f(x, y) dy.$$

$$(C) \int_1^2 dy \int_1^{4-y} f(x, y) dx. \quad (D) \int_1^2 dy \int_y^2 f(x, y) dx$$

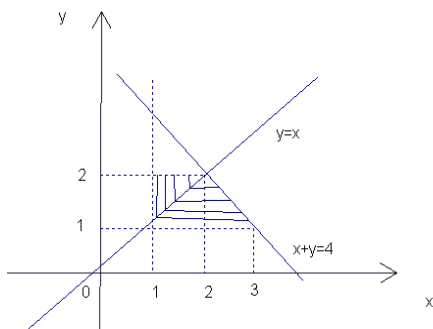
【答案】 (C)

【解析】 $\int_1^2 dx \int_x^2 f(x, y) dy + \int_1^2 dy \int_x^2 f(x, y) dx$ 的积分区域为两部分：

$$D_1 = \{(x, y) | 1 \leq x \leq 2, x \leq y \leq 2\}, \quad D_2 = \{(x, y) | 1 \leq y \leq 2, y \leq x \leq 4 - y\}$$

将其写成一块 $D = \{(x, y) | 1 \leq y \leq 2, 1 \leq x \leq 4 - y\}$

故二重积分可以表示为 $\int_1^2 dy \int_1^{4-y} f(x, y) dx$ ，故答案为 C



(5) 若 $f''(x)$ 不变号，且曲线 $y = f(x)$ 在点 $(1,1)$ 上的曲率圆为 $x^2 + y^2 = 2$ ，则 $f(x)$ 在

区间 $(1,2)$ 内 ()

(A) 有极值点，无零点. (B) 无极值点，有零点.

(C) 有极值点，有零点. (D) 无极值点，无零点.

【答案】 B

【解析】 由题意可知， $f(x)$ 是一个凸函数，即 $f''(x) < 0$ ，且在点 $(1,1)$ 处的曲率

$$\rho = \frac{|y''|}{(1+(y')^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \text{ 而 } f'(1) = -1, \text{ 由此可得, } f''(1) = -2$$

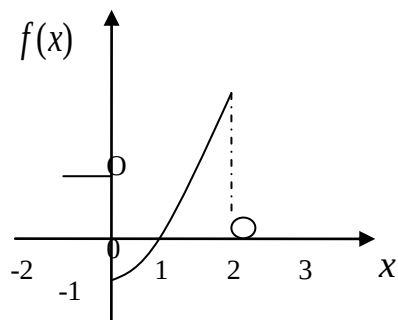
在 $[1,2]$ 上， $f'(x) \leq f'(1) = -1 < 0$ ，即 $f(x)$ 单调减少，没有极值点。

对于 $f(2) - f(1) = f'(\zeta) < -1$ ， $\zeta \in (1,2)$ ， (拉格朗日中值定理)

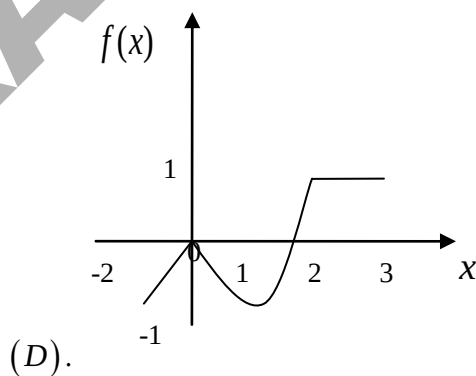
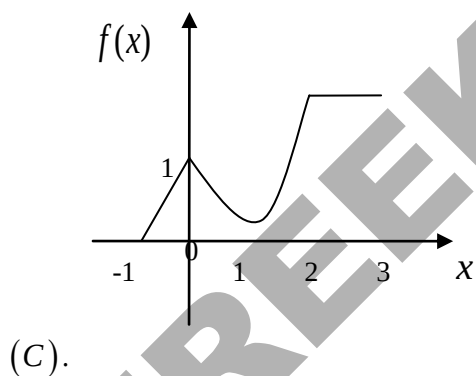
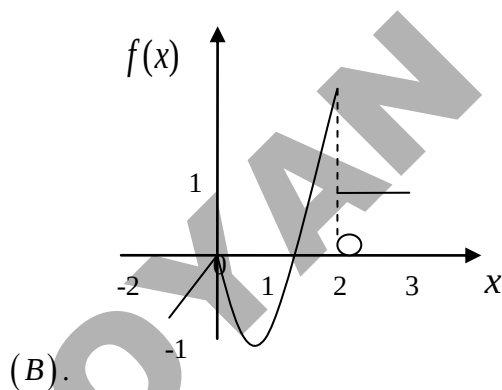
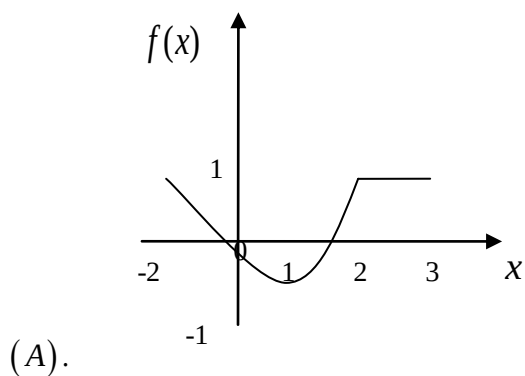
$\therefore f(2) < 0$ 而 $f(1) = 1 > 0$

由零点定理知，在 $[1,2]$ 上， $f(x)$ 有零点。 故应选 (B)

(6) 设函数 $y = f(x)$ 在区间 $[-1,3]$ 上的图形为：



则函数 $F(x) = \int_0^x f(t)dt$ 的图形为 ()



【答案】D

【解析】此题为定积分的应用知识考核，由 $y = f(x)$ 的图形可见，其图像与 x 轴及 y 轴、

$x = x_0$ 所围的图形的代数面积为所求函数 $F(x)$ ，从而可得出几个方面的特征：

- ① $x \in [0, 1]$ 时， $F(x) \leq 0$ ，且单调递减。
- ② $x \in [1, 2]$ 时， $F(x)$ 单调递增。
- ③ $x \in [2, 3]$ 时， $F(x)$ 为常函数。
- ④ $x \in [-1, 0]$ 时， $F(x) \leq 0$ 为线性函数，单调递增。

⑤由于 $F(x)$ 为连续函数

结合这些特点，可见正确选项为 D 。

(7) 设 A 、 B 均为 2 阶矩阵， A^* 、 B^* 分别为 A 、 B 的伴随矩阵。若 $|A|=2, |B|=3$ ，则分

块矩阵 $\begin{pmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{pmatrix}$ 的伴随矩阵为 ()

$$(A). \begin{pmatrix} 0 & 3B^* \\ 2A^* & 0 \end{pmatrix} \quad (B). \begin{pmatrix} 0 & 2B^* \\ 3A^* & 0 \end{pmatrix}$$

$$(C). \begin{pmatrix} 0 & 3A^* \\ 2B^* & 0 \end{pmatrix} \quad (D). \begin{pmatrix} 0 & 2A^* \\ 3B^* & 0 \end{pmatrix}$$

【答案】 B

【解析】 根据 $CC^* = |C|E$ 若 $C^* = |C|C^{-1}, C^{-1} = \frac{1}{|C|}C^*$

分块矩阵 $\begin{pmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{pmatrix}$ 的行列式 $\begin{vmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{2 \times 2} |A||B| = 2 \times 3 = 6$ 即分块矩阵可逆

$$\begin{pmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{pmatrix}^* = \begin{vmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{vmatrix} \begin{pmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{pmatrix}^{-1} = 6 \begin{pmatrix} 0 & B^{-1} \\ A^{-1} & 0 \end{pmatrix} = 6 \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{|B|}B^* \\ \frac{1}{|A|}A^* & 0 \end{pmatrix}$$

$$= 6 \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3}B^* \\ \frac{1}{2}A^* & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2B^* \\ 3A^* & 0 \end{pmatrix}$$

(8) 设 A 、 P 均为 3 阶矩阵， P^T 为 P 的转置矩阵，且 $P^TAP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ ，若

$P = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ ， $Q = (\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2, \alpha_3)$ ，则 $Q^T A Q$ 为 ()

$$(A). \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad (B). \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$(C). \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad (D). \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

【答案】 A

【解析】 $Q = (\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2, \alpha_3) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) E_{12}(1)$, 即:

$$Q = P E_{12}(1)$$

$$Q^T A Q = [P E_{12}(1)]^T A [P E_{12}(1)] = E_{12}^T(1) [P^T A P] E_{12}(1)$$

$$= E_{21}^T(1) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} E_{12}(1)$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

二、填空题: 9-14 小题, 每小题 4 分, 共 24 分, 请将答案写在答题纸指定位置上.

(9) 曲线 $\begin{cases} x = \int_0^{1-t} e^{-u^2} du \\ y = t^2 \ln(2-t^2) \end{cases}$ 在 $(0, 0)$ 处的切线方程为_____

【答案】 $y = 2x$

【解析】 $\frac{dy}{dt} = 2t \ln(2-t^2) - t^2 \cdot \frac{2t}{2-t^2} \Big|_{t=1} = -2$

$$\frac{dx}{dt} = e^{-(1-t)^2} \cdot (-1) \Big|_{t=1} = -1$$

所以 $\frac{dy}{dx} = 2$

所以 切线方程为 $y = 2x$

(10) 已知 $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{k|x|} dx = 1$, 则 $k =$ _____

【答案】 -2

【解析】 $1 = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{k|x|} dx = 2 \int_0^{+\infty} e^{kx} dx = 2 \lim_{b \rightarrow +\infty} \frac{1}{k} e^{kx} \Big|_0^b$

因为极限存在所以 $k < 0$

$$1 = 0 - \frac{2}{k}$$

$$k = -2$$

$$(11) \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 e^{-x} \sin nx dx = \underline{\hspace{2cm}}$$

【答案】 0

【解析】 令 $I_n = \int e^{-x} \sin nx dx = -e^{-x} \sin nx + n \int e^{-x} \cos nx dx$

$$= -e^{-x} \sin nx - ne^{-x} \cos nx - n^2 I_n$$

$$\text{所以 } I_n = -\frac{n \cos nx + \sin nx}{n^2 + 1} e^{-x} + C$$

$$\begin{aligned} \text{即 } \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 e^{-x} \sin nx dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(-\frac{n \cos nx + \sin nx}{n^2 + 1} e^{-x} \Big|_0^1 \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(-\frac{n \cos n + \sin n}{n^2 + 1} e^{-1} + \frac{n}{n^2 + 1} \right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$(12) \text{ 设 } y = y(x) \text{ 是由方程 } xy + e^y = x + 1 \text{ 确定的隐函数, 则 } \frac{d^2 y}{dx^2} \Big|_{x=0} = \underline{\hspace{2cm}}$$

【答案】 -3

【解析】 对方程 $xy + e^y = x + 1$ 两边关于 x 求导有 $y + xy' + y'e^y = 1$, 得 $y' = \frac{1-y}{x+e^y}$

对 $y + xy' + y'e^y = 1$ 再次求导可得 $2y' + xy'' + y''e^y + (y')^2 e^y = 0$,

$$\text{得 } y'' = -\frac{2y' + (y')^2 e^y}{x + e^y} \quad (*)$$

当 $x=0$ 时, $y=0$, $y'_{(0)} = \frac{1-0}{e^0} = 1$, 代入 (*) 得

$$y''(0) = -\frac{2y'(0) + (y'(0))^2 e^0}{(0+e^0)^3} = -(2+1) = -3$$

$$(13) \text{ 函数 } y = x^{2x} \text{ 在区间 } (0,1] \text{ 上的最小值为 } \underline{\hspace{2cm}}$$

【答案】 $e^{-\frac{2}{e}}$

【解析】 因为 $y' = x^{2x} (2 \ln x + 2)$, 令 $y' = 0$ 得驻点为 $x = \frac{1}{e}$.

$$\text{又 } y'' = x^{2x} (2 \ln x + 2)^2 + x^{2x} \cdot \frac{2}{x}, \text{ 得 } y'' \left(\frac{1}{e} \right) = 2e^{-\frac{2}{e}+1} > 0,$$

故 $x = \frac{1}{e}$ 为 $y = x^{2x}$ 的极小值点, 此时 $y = e^{-\frac{2}{e}}$,

又当 $x \in \left(0, \frac{1}{e}\right)$ 时, $y'(x) < 0$; $x \in \left(\frac{1}{e}, 1\right)$ 时, $y'(x) > 0$, 故 y 在 $\left(0, \frac{1}{e}\right)$ 上递减, 在 $\left(\frac{1}{e}, 1\right)$ 上递增。

而 $y(1) = 1$, $y_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x^{2x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{2x \ln x} = e^{\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2 \ln x}{\frac{1}{x}}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{2}{x}}{-\frac{1}{x^2}}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0^+} (-2x)} = 1$,

所以 $y = x^{2x}$ 在区间 $(0, 1]$ 上的最小值为 $y\left(\frac{1}{e}\right) = e^{-\frac{2}{e}}$ 。

(14) 设 α, β 为 3 维列向量, β^T 为 β 的转置, 若矩阵 $\alpha\beta^T$ 相似于 $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, 则 $\beta^T \alpha =$ _____

【答案】 2

【解析】 因为 $\alpha\beta^T$ 相似于 $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, 根据相似矩阵有相同的特征值, 得到 $\alpha\beta^T$ 得特征值是 2, 0, 0 而 $\beta^T \alpha$ 是一个常数, 是矩阵 $\alpha\beta^T$ 的对角元素之和, 则 $\beta^T \alpha = 2 + 0 + 0 = 2$

三、解答题: 15—23 小题, 共 94 分. 请将解答写在答题纸指定的位置上. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(15) (本题满分 9 分) 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x)[x - \ln(1 + \tan x)]}{\sin^4 x}$

【解析】 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x)[x - \ln(1 + \tan x)]}{\sin^4 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2} x^2 [x - \ln(1 + \tan x)]}{\sin^4 x}$
 $= \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\sin^2 x} \cdot \frac{x - \ln(1 + \tan x)}{\sin^2 x} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \ln(1 + \tan x)}{\sin^2 x} = \frac{1}{4}$

(16) (本题满分 10 分)

计算不定积分 $\int \ln\left(1 + \sqrt{\frac{1+x}{x}}\right) dx \quad (x > 0)$

【解析】

$$\text{令 } \sqrt{\frac{1+x}{x}} = t \text{ 得 } x = \frac{1}{t^2-1}, dx = \frac{-2tdt}{(t^2-1)^2}$$

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \int \ln(1+t) \frac{-2t}{(t^2-1)^2} dt = \int \ln(1+t) \frac{-1}{(t^2-1)^2} d(t^2-1) \\ &= \int \ln(1+t) d\left(\frac{1}{t^2-1}\right) \\ &= \frac{\ln(1+t)}{t^2-1} - \int \frac{1}{t^2-1} \cdot \frac{1}{t+1} dt \\ &= \frac{\ln(1+t)}{t^2-1} - \int \left(\frac{1}{4(t-1)} + \frac{-1}{4(t+1)} + \frac{-1}{2(t+1)^2} \right) dt \\ &= \frac{\ln(1+t)}{t^2-1} + \frac{1}{4} \ln \left| \frac{t+1}{t-1} \right| - \frac{1}{2(t+1)} + C \\ &= x \ln(1 + \sqrt{\frac{1+x}{x}}) + \frac{1}{4} \ln \frac{\sqrt{\frac{1+x}{x}} + 1}{\sqrt{\frac{1+x}{x}} - 1} - \frac{1}{2(\sqrt{\frac{1+x}{x}} + 1)} + C \\ &= x \ln(1 + \sqrt{\frac{1+x}{x}}) + \frac{1}{2} \ln(\sqrt{1+x} + \sqrt{x}) - \frac{1}{2} \ln(\sqrt{1+x} - \sqrt{x}) + C \end{aligned}$$

(17) (本题满分 10 分) 设 $z = f(x+y, x-y, xy)$, 其中 f 具有 2 阶连续偏导数, 求 dz 与

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$$

【解析】

$$\frac{\partial z}{\partial x} = f'_1 + f'_2 + yf'_3$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = f'_1 - f'_2 + xf'_3$$

$$\therefore dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy$$

$$= (f'_1 + f'_2 + yf'_3)dx + (f'_1 - f'_2 + xf'_3)dy$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f''_{11} \cdot 1 + f''_{12} \cdot (-1) + f''_{13} \cdot x + f''_{21} \cdot 1 + f''_{22} \cdot (-1) + f''_{23} \cdot x + f'_3 + y[f''_{31} \cdot 1 + f''_{32} \cdot (-1) + f''_{33} \cdot x]$$

$$= f'_3 + f''_{11} - f''_{22} + xyf''_{33} + (x+y)f''_{13} + (x-y)f''_{23}$$

(18) (本题满分 10 分) 设非负函数 $y = y(x)$ ($x \geq 0$) 满足微分方程 $xy'' - y' + 2 = 0$, 当

曲线 $y = y(x)$ 过原点时, 其与直线 $x=1$ 及 $y=0$ 围成平面区域 D 的面积为 2, 求 D 绕 y 轴旋转所得旋转体体积。

【解析】

解微分方程 $xy'' - y' + 2 = 0$ 得其通解 $y = C_1 + 2x + C_2x^2$, 其中 C_1, C_2 为任意常数

又因为 $y = y(x)$ 通过原点时与直线 $x=1$ 及 $y=0$ 围成平面区域的面积为 2, 于是可得

$$C_1 = 0$$

$$2 = \int_0^1 y(x) dx = \int_0^1 (2x + C_2x^2) dx = \left(x^2 + \frac{C_2}{3} x^3 \right) \Big|_0^1 = 1 + \frac{C_2}{3}$$

$$\text{从而 } C_2 = 3$$

于是, 所求非负函数 $y = 2x + 3x^2$ ($x \geq 0$)

又由 $y = 2x + 3x^2$ 可得, 在第一象限曲线 $y = f(x)$ 表示为 $x = \frac{1}{3}(\sqrt{1+3y}-1)$

于是 D 围绕 y 轴旋转所得旋转体的体积为 $V = 5\pi - V_1$, 其中

$$\begin{aligned} V_1 &= \int_0^5 \pi x^2 dy = \int_0^5 \pi \cdot \frac{1}{9} (\sqrt{1+3y}-1)^2 dy \\ &= \frac{\pi}{9} \int_0^5 (2+3y-2\sqrt{1+3y}) dy \\ &= \frac{39}{18} \pi \end{aligned}$$

$$V = 5\pi - \frac{39}{18} \pi = \frac{51}{18} \pi = \frac{17}{6} \pi$$

(19) (本题满分 10 分) 求二重积分 $\iint_D (x-y) dx dy$,

其中 $D = \{(x, y) | (x-1)^2 + (y-1)^2 \leq 2, y \geq x\}$

【解析】由 $(x-1)^2 + (y-1)^2 \leq 2$ 得 $r \leq 2(\sin \theta + \cos \theta)$,

$$\therefore \iint_D (x-y) dx dy = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi} d\theta \int_0^{2(\sin \theta + \cos \theta)} (r \cos \theta - r \sin \theta) r dr$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi} \left[\frac{1}{3}(\cos \theta - \sin \theta) \cdot r^3 \right]_{\frac{0}{0}}^{2(\sin \theta + \cos \theta)} d\theta \\
&= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi} \frac{8}{3}(\cos \theta - \sin \theta) \cdot (\sin \theta + \cos \theta) \cdot (\sin \theta + \cos \theta)^2 d\theta \\
&= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi} \frac{8}{3}(\cos \theta - \sin \theta) \cdot (\sin \theta + \cos \theta)^3 d\theta \\
&= \frac{8}{3} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi} (\sin \theta + \cos \theta)^3 d(\sin \theta + \cos \theta) = \frac{8}{3} \times \frac{1}{4} (\sin \theta + \cos \theta)^4 \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi} = -\frac{8}{3}
\end{aligned}$$

(20) (本题满分 12 分)

设 $y = y(x)$ 是区间 $(-\pi, \pi)$ 内过 $(-\frac{\pi}{\sqrt{2}}, \frac{\pi}{\sqrt{2}})$ 的光滑曲线, 当 $-\pi < x < 0$ 时, 曲线上任一点

处的法线都过原点, 当 $0 \leq x < \pi$ 时, 函数 $y(x)$ 满足 $y'' + y + x = 0$ 。求 $y(x)$ 的表达式

【解析】由题意, 当 $-\pi < x < 0$ 时, $y = -\frac{x}{y'}$, 即 $y dy = -x dx$, 得 $y^2 = -x^2 + c$,

又 $y(-\frac{\pi}{\sqrt{2}}) = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$ 代入 $y^2 = -x^2 + c$ 得 $c = \pi^2$, 从而有 $x^2 + y^2 = \pi^2$

当 $0 \leq x < \pi$ 时, $y'' + y + x = 0$ 得 $y'' + y = 0$ 的通解为 $y^* = c_1 \cos x + c_2 \sin x$

令解为 $y_1 = Ax + b$, 则有 $0 + Ax + b + x = 0$, 得 $A = -1, b = 0$,

故 $y_1 = -x$, 得 $y'' + y + x = 0$ 的通解为 $y = c_1 \cos x + c_2 \sin x - x$

由于 $y = y(x)$ 是 $(-\pi, \pi)$ 内的光滑曲线, 故 y 在 $x = 0$ 处连续

于是由 $y(0-) = \pm\pi$, $y(0+) = c_1$, 故 $c_1 = \pm\pi$ 时, $y = y(x)$ 在 $x = 0$ 处连续

又当 $-\pi < x < 0$ 时, 有 $2x + 2y \cdot y' = 0$, 得 $y_-'(0) = -\frac{x}{y} = 0$,

当 $0 \leq x < \pi$ 时, 有 $y' = -c_1 \sin x + c_2 \cos x - 1$, 得 $y_+'(0) = c_2 - 1$

由 $y_-'(0) = y_+'(0)$ 得 $c_2 - 1 = 0$, 即 $c_2 = 1$

故 $y = y(x)$ 的表达式为 $y = \begin{cases} -\sqrt{\pi^2 - x^2}, & -\pi < x < 0 \\ -\pi \cos x + \sin x - x, & 0 \leq x < \pi \end{cases}$ 或

$$y = \begin{cases} \sqrt{\pi^2 - x^2}, & -\pi < x < 0 \\ \pi \cos x + \sin x - x, & 0 \leq x < \pi \end{cases}, \text{ 又过点 } \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right),$$

$$\text{所以 } y = \begin{cases} \sqrt{\pi^2 - x^2}, & -\pi < x < 0 \\ \pi \cos x + \sin x - x, & 0 \leq x < \pi \end{cases}.$$

(21) (本题满分 11 分)

(I) 证明拉格朗日中值定理: 若函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 可导, 则存在

$\xi \in (a, b)$, 使得 $f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a)$

(II) 证明: 若函数 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处连续, 在 $(0, \delta)$ ($\delta > 0$) 内可导, 且 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = A$,

则 $f_+'(0)$ 存在, 且 $f_+'(0) = A$ 。

【解析】(I) 作辅助函数 $\varphi(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$, 易验证 $\varphi(x)$ 满足:

$\varphi(a) = \varphi(b)$; $\varphi(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续, 在开区间 (a, b) 内可导, 且

$$\varphi'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

根据罗尔定理, 可得在 (a, b) 内至少有一点 ξ , 使 $\varphi'(\xi) = 0$, 即

$$f'(\xi) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0, \therefore f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a)$$

(II) 任取 $x_0 \in (0, \delta)$, 则函数 $f(x)$ 满足:

在闭区间 $[0, x_0]$ 上连续, 开区间 $(0, x_0)$ 内可导, 从而有拉格朗日中值定理可得: 存在

$$\xi_{x_0} \in (0, x_0) \subset (0, \delta), \text{ 使得 } f'(\xi_{x_0}) = \frac{f(x_0) - f(0)}{x_0 - 0} \dots\dots (*)$$

又由于 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = A$, 对上式 (*) 两边取 $x_0 \rightarrow 0^+$ 时的极限可得:

$$f'_+(0) = \lim_{x_0 \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0) - f(0)}{x_0 - 0} = \lim_{x_0 \rightarrow 0^+} f'(\xi_{x_0}) = \lim_{\xi_{x_0} \rightarrow 0^+} f'(\xi_{x_0}) = A$$

故 $f'_+(0)$ 存在, 且 $f'_+(0) = A$ 。

$$(22) \text{ (本题满分 11 分) 设 } A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & -2 \end{pmatrix}, \quad \xi_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

(I) 求满足 $A\xi_2 = \xi_1, A^2\xi_3 = \xi_1$ 的所有向量 ξ_2, ξ_3

(II) 对 (I) 中的任一向量 ξ_2, ξ_3 , 证明: ξ_1, ξ_2, ξ_3 线性无关。

【解析】(I) 解方程 $A\xi_2 = \xi_1$

$$(A, \xi_1) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & -2 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$r(A) = 2$ 故有一个自由变量, 令 $x_3 = 2$, 由 $Ax = 0$ 解得, $x_2 = -1, x_1 = 1$

求特解, 令 $x_1 = x_2 = 0$, 得 $x_3 = 1$

$$\text{故 } \xi_2 = k_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ 其中 } k_1 \text{ 为任意常数}$$

解方程 $A^2\xi_3 = \xi_1$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ -2 & -2 & 0 \\ 4 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(A^2, \xi_1) = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 & -1 \\ -2 & -2 & 0 & 1 \\ 4 & 4 & 0 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \frac{-1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

故有两个自由变量, 令 $x_2 = -1$, 由 $A^2x = 0$ 得 $x_1 = 1, x_3 = 0$

$$\text{求特解 } \eta_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ 故 } \xi_3 = k_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ 其中 } k_2 \text{ 为任意常数}$$

(II) 证明:

$$\begin{aligned} \text{由于 } \begin{vmatrix} -1 & k_1 & k_2 + \frac{1}{2} \\ 1 & -k_1 & -k_2 \\ -2 & 2k_1 + 1 & 0 \end{vmatrix} &= 2k_1k_2 + (2k_1 + 1)(k_2 + \frac{1}{2}) - 2k_1(k_2 + \frac{1}{2}) - k_2(2k_1 + 1) \\ &= \frac{1}{2} \neq 0 \end{aligned} \text{ 故 } \xi_1, \xi_2, \xi_3 \text{ 线性无关.}$$

(23) (本题满分 11 分) 设二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = ax_1^2 + ax_2^2 + (a-1)x_3^2 + 2x_1x_3 - 2x_2x_3$

(I) 求二次型 f 的矩阵的所有特征值;

(II) 若二次型 f 的规范形为 $y_1^2 + y_2^2$, 求 a 的值。

【解析】(I) $A = \begin{pmatrix} a & 0 & 1 \\ 0 & a & -1 \\ 1 & -1 & a-1 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} |\lambda E - A| &= \begin{vmatrix} \lambda - a & 0 & -1 \\ 0 & \lambda - a & 1 \\ -1 & 1 & \lambda - a + 1 \end{vmatrix} = (\lambda - a) \begin{vmatrix} \lambda - a & 1 \\ 1 & \lambda - a + 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & \lambda - a \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \\ &= (\lambda - a)[(\lambda - a)(\lambda - a + 1) - 1] - [0 + (\lambda - a)] \\ &= (\lambda - a)[(\lambda - a)(\lambda - a + 1) - 2] \\ &= (\lambda - a)[\lambda^2 - 2a\lambda + \lambda + a^2 - a - 2] \\ &= (\lambda - a)\{[a\lambda + \frac{1}{2}(1 - 2a)]^2 - \frac{9}{4}\} \\ &= (\lambda - a)(\lambda - a + 2)(\lambda - a - 1) \\ \therefore \lambda_1 &= a, \lambda_2 = a - 2, \lambda_3 = a + 1 \end{aligned}$$

(II) 若规范形为 $y_1^2 + y_2^2$, 说明有两个特征值为正, 一个为 0。则

1) 若 $\lambda_1 = a = 0$, 则 $\lambda_2 = -2 < 0$, $\lambda_3 = 1$, 不符题意

2) 若 $\lambda_2 = 0$, 即 $a = 2$, 则 $\lambda_1 = 2 > 0$, $\lambda_3 = 3 > 0$, 符合

3) 若 $\lambda_3 = 0$, 即 $a = -1$, 则 $\lambda_1 = -1 < 0$, $\lambda_2 = -3 < 0$, 不符题意

综上所述, 故 $a = 2$

FREEKAOYAN