2007年全国硕士研究生入学统一考试数学试题数学三试题

试题详解与评析　水木艾迪考研辅导班

一、　选择题（本题共10小题，每小题4分，满分40分，在每小题给的四个选项中，只有一项符合题目要求，把所选项前的字母填在题后括号内）

（1）　当 $x\to 0^+$ 时，与 $\sqrt{x}$ 等价的无穷小量是

（A）$1-e^{\sqrt{x}}$　　（B）$\ln(1+\sqrt{x})$　　（C）$\sqrt{1+\sqrt{x}}-1$　　（D）$1-\cos\sqrt{x}$

【解】答案B。考点：等价无穷小量的广义化运用，水木艾迪辅导的星级考点。参见水木艾迪考研数学36计例1-1等题目。

（2）设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，下列命题错误的是

（A）若 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}$ 存在，则 $f(0)=0$　　（B）若 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)+f(-x)}{x}$ 存在，则 $f(0)=0$

（C）若 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}$ 存在，则 $f'(0)$ 存在　　（D）若 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(-x)}{x}$ 存在，则 $f'(0)$ 存在

【解】答案 D。考点：点连续概念，导数定义，无穷小量比阶概念与极限运算法则。(D)的成立不一定保证导致可导的两个极限存在。

（3）如图，连续函数 $y=f(x)$ 在敬意 $[-3,-2],[2,3]$ 上的图形分别是直径为1的上、下半圆周，在区间 $[-2,0],[0,2]$ 上的图形分别是直径为2的上、下半圆周，设 $F(x)=\int_0^x f(t)dt$，则下列结论正确的是

（A）$F(3)=-\dfrac{3}{4}F(-2)$　　（B）$F(3)=\dfrac{5}{4}F(2)$

（C）$F(-3)=\dfrac{3}{4}F(2)$　　（D）$F(-3)=-\dfrac{5}{4}F(-2)$

【解】答案C。利用积分的几何意义，并注意代数面积的概念（水木艾迪辅导的星级考点）。

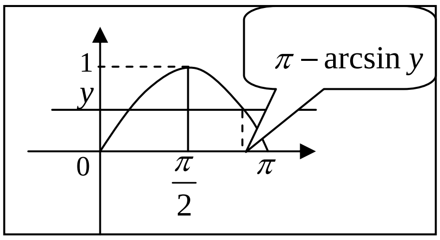
（4）设函数 $f(x,y)$ 连续，则二次计分 $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}dx\int_{\sin x}^{1}f(x,y)dy$ 等于（　　　）。

（A）$\int_0^1 dy\int_{\pi+\arcsin y}^{\pi}f(x,y)dx$　　（B）$\int_0^1 dy\int_{\pi-\arcsin y}^{\pi}f(x,y)dx$

（C）$\int_0^1 dy\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi+\arcsin y}f(x,y)dx$　　（D）$\int_0^1 dy\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi-\arcsin y}f(x,y)dx$

【解】答案：B。二次积分交换积分次序的过程：二次积分 $\Rightarrow$ 确定区域、二重积分 $\Rightarrow$ 二次积分。

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}dx\int_{\sin x}^{1}f(x,y)dy=\int_0^1 dy\int_{\pi-\arcsin y}^{\pi}f(x,y)dx$$



(5)设某商品的需求函数为$Q=160-2P$，其中 Q,P 分别表示需要量和价格，如果该商品需求弹性的绝对值等于 1,则商品的价格是

（A）10　　（B）20　　（C）30　　（D）40

【解】答案 D。商品需求弹性的绝对值等于$\left|\frac{dQ}{dP}\frac{P}{Q}\right|=\left|\frac{-2P}{160-2P}\right|=1$，则$P=40$。

本题考点：导函与微分应用。相同例题参见水木艾迪 2007 模拟试题数四 18 题。

(6)曲线$y=\frac{1}{x}+\ln(1+e^{x})$，渐近线的条数为

（A）0　　（B）1　　（C）2　　（D）3

【解】答案 D。垂直渐近线$x=0$，水平渐近线$y=0(x\to-\infty)$，斜渐近线$y=x(x\to+\infty)$。

特别提示：渐近线的实质是极限问题，应从单侧极限入手考察单侧渐近线的存在性。参见水木艾迪考研数学 36 计例 5-10，基础班讲义例 4-24，强化班第 2 讲例 43。

（7）设向量组a_1,a_2,a_3线性无关，则下列向量组线性相关的是

（A）a_1-a_2,a_2-a_3,a_3-a_1　　（B）a_1+a_2,a_2+a_3,a_3-a_1

（C）$a_1-2a_2,a_2-2a_3,a_3-2a_1$　　（D）$a_1+2a_2,a_2+2a_3,a_3+2a_3$

【解】答案 A。因为$(\alpha_1-\alpha_2)+(\alpha_2-\alpha_3)+(\alpha_3-\alpha_1)=0$，所以$\alpha_1-\alpha_2,\alpha_2-\alpha_3,\alpha_3-\alpha_1$线性相关。

考点：线性相关与线性无关的概念。

参考：水木艾迪强化班向量例 17。

（8）设矩阵$A=\begin{bmatrix}2&-1&-1\\-1&2&-1\\-1&-1&2\end{bmatrix},B=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{bmatrix}$.则 A 与 B

(A)合同，且相似。　　（B）合同，但不相似。

（C）不合同，　但相似。　　（D）既不合同，也不相似。

【解】答案 B。因为A的特征值为$3, 3, 0$，所以A和B不相似。又A和B的秩都为 2 且正惯性指数也都为 2，所以A和B合同。

考点：矩阵的相似与合同概念，相似矩阵的性质，合同矩阵的性质，惯性定理等。

参考：水木艾迪基础班二次型例 2 例 3。强化班二次型例 2，冲刺班特征值例 35。36 计之例 23-5。

（9）某人向同一目标独立重复射击，每次射击命中目标的概率为$p(0<p<1)$，则此人第 4 次射击恰好第 2 次命中目标的概率为

(A) $3p(1-p)^2$　　(B) $6p(1-p)^2$

(C) $3p^2(1-p)^2$　　　　　　(D) $6p^2(1-p)^2$

【解析与点评】P{第 4 次射击恰好第 2 次命中目标}

=P{第 4 次射击命中，且前 3 次中恰好命中 1 次}

$$= p \cdot C_3^1 p(1-p)^2 = 3p^2(1-p)^2$$

故选 C。

本题是 Bernoulli 试验中的典型问题，可参见水木艾迪 2006 考研数学基础班讲义例 1.33，强化班第一讲问题 7，考研 36 技之例 29-25 等题目和内容。

(10) 设随机变量 (X,Y) 服从二维正态分布，且 X 与 Y 不相关，$f_X(x)$, $f_Y(y)$ 分别表示 X，Y 的概率密度，则在 $Y=y$ 的条件下，X 的条件概率密度 $f_{X|Y}(x|y)$ 为

（A） $f_X(x)$　　(B) $f_Y(y)$　　(C) $f_X(x)f_Y(y)$　　(D) $\dfrac{f_X(x)}{f_Y(y)}$

【解析与点评】 由于 (X,Y) 服从二维正态分布，且 X 与 Y 不相关，所以 X 与 Y 相互独立，

从而 $f_{X|Y}(x|y) = \dfrac{f(x,y)}{f_Y(y)} = f_X(x)$，故选 **A.**

本题主要考查了二维正态分布的不相关性与独立性的等价关系，属于最基本的内容。

二、填空题：**11-16** 小题，每小题 **4** 分，共 **24** 分，请将答案写在答题纸指定位置上。

（11） $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3+x^2+1}{2^x+x^3}(\sin x+\cos x)=$ ________________

【解】 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3+x^2+1}{2^x+x^3}(\sin x+\cos x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3 2^{-x}+x^2 2^{-x}+2^{-x}}{1+x^3 2^{-x}}(\sin x+\cos x)=0$。

考点：无穷大量与无穷小量的比阶概念与方法。参见水木艾迪考研数学 36 计例 1-2，1-3。

（12）设函数 $y=\dfrac{1}{2x+3}$，则 $y^{(n)}(0)=$ ________________

【解】 $y'=\dfrac{(-1)2}{(2x+3)^2}$, $y^{(n)}=\dfrac{(-1)^n 2^n n!}{(2x+3)^{n+1}}$, $y^{(n)}(0)=\dfrac{(-1)^n 2^n n!}{3^{n+1}}$。

考点：对特定结构的函数求高阶导数，这是水木艾迪考研数学强调的星级考点之一，有关处理方法及相同例题相同例题参见水木艾迪考研数学 36 计之 2 计的说明与例题。

（13）设 $f(u,v)$ 是二元可微函数，$z=f\left(\dfrac{y}{x},\dfrac{x}{y}\right)$,则 $\dfrac{\partial z}{\partial x}-y\dfrac{\partial z}{\partial y}=$ ________________

【解】答案：$-f_u'\dfrac{y}{x}+f_v'\dfrac{x}{y}-f_u'\dfrac{y}{x}+f_v'\dfrac{x}{y}$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=f_u'\left(\frac{-y}{x^2}\right)+f_v'\left(\frac{1}{y}\right),\quad \frac{\partial z}{\partial y}=f_u'\left(\frac{1}{x}\right)+f_v'\left(-\frac{x}{y^2}\right)$$

$$x\frac{\partial z}{\partial x}-y\frac{\partial z}{\partial y}=-f_u'\frac{y}{x}+f_v'\frac{x}{y}-f_u'\frac{y}{x}+f_v'\frac{x}{y}$$

$$=-2\left(f_u'\frac{y}{x}-f_v'\frac{x}{y}\right)$$

考点：具有抽象函数记号的多元复合函数的偏导数计算，这是一道很单纯的题目，参见水木艾迪基础班第 10 讲 19 题。

（14）微分方程 $\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}-\frac{1}{2}\left(\frac{y}{x}\right)^3$ 满足 $y\big|_{x=1}=1$ 的特解为 $y=$__________

【解】（方法 1）（方法 1）零次齐次方程：令 $u=\frac{y}{x}, y=xu, y'=u+xu'$

方程变为： $u+xu'=u-\frac{1}{2}u^3\Rightarrow xu'=-\frac{1}{2}u^3\Rightarrow\frac{du}{u^3}=-\frac{1}{2}\frac{dx}{x}$

$$\Rightarrow d(1/u^2)=d(\ln x)\Rightarrow(x^2/y^2)=\ln(cx);$$

再由 $y\big|_{x=1}=1\Rightarrow\ln c=1, c=e$。则得特解为： $y=\frac{x}{\sqrt{1+\ln x}}, x>e^{-1}$。

（方法 2）贝努利方程：原方程 $\begin{cases}y'-\frac{1}{x}y=-\frac{1}{2x^3}y^3\\ y(1)=1\end{cases}$

化为 $\begin{cases}y^{-3}y'-\frac{1}{x}y^{-2}=-\frac{1}{2x^3}\\ y(1)=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}(y^{-2})'+\frac{2}{x}y^{-2}=\frac{1}{x^3}\\ y(1)=1\end{cases}$

两边同乘 x^2 得 $\begin{cases}x^2(y^{-2})'+2xy^{-2}=\frac{1}{x}\\ y(1)=1\end{cases}$，凑微分得 $\begin{cases}(x^2y^{-2})'=\frac{1}{x}\\ y(1)=1\end{cases}$

积分：$(x^2y^{-2})\big|_{x=1}^{x}=\int_1^x\frac{1}{x}dx$， $x^2y^{-2}-1=\ln x$，得特解为：

$$y=\frac{x}{\sqrt{1+\ln x}}, x>e^{-1}$$

或令 $u=y^{-2}$， $u'=-2y^{-3}y'$，原方程 $\begin{cases}y'-\frac{1}{x}y=-\frac{1}{2x^3}y^3\\ y(1)=1\end{cases}$ 化为

$$\begin{cases} u'+\dfrac{2}{x}u=\dfrac{1}{x^3}, \\ u(1)=1 \end{cases} \quad u=y^{-2}=\frac{1}{x^2}\left(\int\frac{1}{x}dx+C\right)=\frac{1}{x^2}(C+\ln x)，C=1$$

特解为 $y=\dfrac{x}{\sqrt{1+\ln x}}, x>e^{-1}$。

考点：这是一道微分方程基本题，属于基本计算题型，是水木艾迪辅导中提出的常考的星级考点之一。相同例题参见水木艾迪强化班第 **7** 讲类型 **1-8**）。

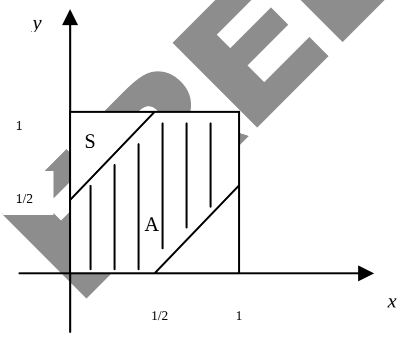
(15)设矩阵 $A=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$，则 A^3 的秩为 ____1____

【解】$A^3=\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$，所以 $r(A^3)=1$。

考点：矩阵的运算和矩阵的秩。

（16）在区间（0，1）中随机的取两个数，则这两个数之差的绝对值小于 $\dfrac{1}{2}$ 的概率为___3/4____。

【解析与点评】 由几何概型计算（见图），可知所求概率 $=\dfrac{|A|}{|S|}=\dfrac{1-(\frac{1}{2})^2}{1}=\dfrac{3}{4}$



本题是几何概型的典型题目，许多几何分布的概率题可以化为几何概型来解决，类似的题目可参见水木艾迪 2006 考研数学基础班讲义例 1.8，例 1.10，强化班例 1.10，考研 36 技之例 29-24 等题目。

三、解答题：**17-24** 小题，共 **86** 分。请将解答写在答题纸指定位置上，解答应写出文字说明过程或演算步骤。

（17）（本题满分 10 分）设函数 $y=y(x)$ 由方程 $y\ln y-x+y=0$ 确定，试判断曲线 $y=y(x)$ 在点（1,1）附近的凹凸性。

【解】 $y'\ln y + + y' - 1 + y' = 0$

$$y' = \frac{1}{2+\ln y}，\quad y'(1) = \frac{1}{2}$$

$$y'' = -\frac{(y')^2}{y(2+\ln y)}，\quad y''(1) = -\frac{1}{8}$$

曲线 $y = y(x)$ 在点（1,1）附近为上凸的。

考点：隐函数的偏导数计算，函数曲线的凸性。“曲线 $y = y(x)$ 在点（1,1）附近为凸的”也是正确的。

（18）（本题满分 11 分）设二元函数

$$f(x,y) = \begin{cases} x^2 & |x|+|y|\le 1, \\ \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} & 1<|x|+|y|\le 2, \end{cases}$$

计算二重积分 $\iint\limits_{\sigma} f(x,y)d\sigma$，其中 $D = |(x,y)\|x|+|y|\le 2|$。

【解】 $\iint\limits_D f(x,y)dxdy = 4\iint\limits_{D_1} f(x,y)dxdy$， 其中 D_1 为 D 在第一象限部分。

$$\iint\limits_{D_1} f(x,y)dxdy = \iint\limits_{D_{11}} f(x,y)dxdy + \iint\limits_{D_{12}} f(x,y)dxdy,$$

其中 $D_{12} = \{(x,y)|0\le x\le 1, 0\le y\le 1-x\}$，

$$D_{12} = \{(x,y)|0\le x\le 1, 1-x\le y\le 2-x\} \cup \{(x,y)|1\le x\le 2, 0\le y\le 2-x\}。$$

$$\iint\limits_{D_{11}} f(x,y)dxdy = \int_0^1 dx\int_0^{1-x} x^2 dy = \frac{1}{12};$$

$\iint\limits_{D_{12}} f(x,y)dxdy$ 可用两种方法计算：

直角坐标积分法：

$$\iint\limits_{D_{12}} f(x,y)dxdy = \int_0^1 dx\int_{1-x}^{2-x} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}dy + \int_1^2 dx\int_0^{2-x}\frac{dy}{\sqrt{x^2+y^2}} = \sqrt{2}\ln\left(\sqrt{2}+1\right),$$

或极坐标积分法：

$$\iint\limits_{D_2} f(x,y)dxdy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_{\frac{1}{\sin\theta+\cos\theta}}^{\frac{2}{\sin\theta+\cos\theta}} dr = \sqrt{2}\ln\left(\sqrt{2}+1\right)。$$

因此 $\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \frac{1}{3} + 4\sqrt{2}\ln\left(\sqrt{2}+1\right)$。

点评：（1）分片定义的函数的积分可以分片计算；

（2）用极坐标计算会简单一点。

（3）正确利用对称性，可简化计算。

参见水木艾迪相同例题参见水木艾迪 2007 模拟试题一套数二 22 题，2007 模拟试题二套数二 19 题，数三 18 题。

（19）（本题满分 11 分）设函数 $f(x), g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内二阶可导且存在相等的最大值，又 $f(a)=g(a), f(b)=g(b)$, 证明：

（Ⅰ）存在 $\eta\in(a,b)$, 使得 $f(\eta)=g(\eta)$;

（Ⅱ）存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $f''(\xi)=g''(\xi)$。

【证】（Ⅰ）移项造辅助函数 $h(x)=f(x)-g(x)$，则 $h(a)=0$，$h(b)=0$。

（方法一）若 $f(x),g(x)$ 的最大值在 (a,b) 内同一点取得，则存在 $\eta\in(a,b)$ 使得 $h(\eta)=0$，即 $f(\eta)=g(\eta)$。

若 $f(x),g(x)$ 的最大值在不在同点取得, 则存在 $x_1\in(a,b)$ 与 $x_2\in(a,b)$，$x_1\neq x_2$ 使得

$$f(x_1)=\max_{x\in[a,b]} f(x)=g(x_2)=\max_{x\in[a,b]} g(x)$$

$$h(x_1)=f(x_1)-g(x_1)>0 \text{ 且 } h(x_2)=f(x_2)-g(x_2)<0$$

由连续函数的零点定理，存在介于 x_1,x_2 之间的 $\eta\in(a,b)$ 使得 $h(\eta)=0$，即 $f(\eta)=g(\eta)$。

（方法二）用反证法也能证明存在 $\eta\in(a,b)$ 使 $h(\eta)=0$。

假设不存在 $\eta\in(a,b)$ 使 $h(\eta)=0$，则 $h(x)>0,\forall x\in(a,b)$；或 $h(x)<0,\forall x\in(a,b)$。不妨假设 $h(x)>0,\forall x\in(a,b)$。

设 $g(x)$ 在 $x_1\in(a,b)$ 取到最大值，则应有 $f(x_1)>g(x_1)$，与已知条件函数 $f(x),g(x)$ 在 (a,b) 内有相等的最大值矛盾。因此假设不成立，即存在 $\eta\in(a,b)$ 使 $h(\eta)=0$。其余步骤同（方法一）。

（Ⅱ） $f(x),g(x)$ 二阶可导，于是由 Rolle 定理，$\exists\xi_1\in(a,\eta)$ 与 $\xi_2\in(\eta,b)$ 使得 $h'(\xi_1)=0$ 与 $h'(\xi_2)=0$，于是 $\exists\xi\in(\xi_1,\xi_2)\subset(a,b)$，使得 $h''(\xi)=0$，即 $f''(\xi)=g''(\xi)$。

本题考点：连续函数性质，导函数性质及 Rolle 定理运用。移项造辅助函数是水木艾迪考研数学 36 计之一计，相同例题参见水木艾迪 2007 模拟试题二套数一 19 题，考研数学 36 计例 5-7，例 5-8。

（20）（本题满分 10 分）将函数 $f(x)=\dfrac{1}{x^2-3x-4}$ 展开成 $x-1$ 的幂级数，并指出其收敛区间。

【解】 $f(x)=\dfrac{1}{5}(\dfrac{1}{x-4}-\dfrac{1}{x+1})=\dfrac{1}{5}(\dfrac{1}{-3+(x-1)}-\dfrac{1}{2+(x-1)})$

$$=-\frac{1}{5}(\frac{1}{3-(x-1)}+\frac{1}{2+(x-1)})=-\frac{1}{5}(\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1-\frac{x-1}{3}}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+\frac{x-1}{2}})$$

$$=-\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{3^n}-\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^n}(x-1)^n$$

$$=-\frac{1}{30}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{3^n}+\frac{(-1)^n\cdot 3}{2^n}\right)(x-1)^n$$

收敛域为 $|x-1|<2$。

本题考点：幂级数展开，方法是零部件安装法，见水木艾迪考研数学 36 计之 10 计，相同例题参见水木艾迪强化班第讲 6 例 20。

（21）（本题满分 11 分）设线性方程组

$$\begin{cases}x_1+x_2+x_3=0,\\x_1+2x_2+ax_3=0,\\x_1+4x_2+a^2x_3=0,\end{cases}\qquad ①$$

与方程

$$x_1+2x_2+x_3=a-1\qquad ②$$

有公共解，求 a 的值及所有公共解。

【解】 考虑方程组 $\begin{cases}x_1+x_2+x_3=0\\x_1+2x_2+ax_3=0\\x_1+4x_2+a^2x_3=0\\x_1+2x_2+x_3=a-1\end{cases}$

$$\begin{pmatrix}1&1&1&0\\1&2&a&0\\1&4&a^2&0\\1&2&1&a-1\end{pmatrix}\to\cdots\to\begin{pmatrix}1&1&1&0\\0&1&a-1&0\\0&0&-a+1&a-1\\0&0&(a-2)(a-1)&0\end{pmatrix}$$

若$a\neq 2$且$a\neq 1$时，方程组无解，即方程组①和②无公共解。

当$a=1$时，

$$\to\cdots\to\begin{pmatrix}1&0&1&0\\0&1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},$$

齐次线性方程组的基础解系为：$\left(-1,0,1\right)^T$，

①和②的所有公共解为：$k\left(-1,0,1\right)^T$，k为任意常数。

当$a=2$时，

$$\to\cdots\to\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&1\\0&0&1&-1\\0&0&0&0\end{pmatrix},$$

非齐次线性方程组有唯一解：$\left(0,1,-1\right)^T$，①和②的所有公共解为：$\left(0,1,-1\right)^T$。

考点：线性方程组有解的判断条件，齐次线性方程组的解的理论与性质，非齐次线性方程组解的理论与性质，用初等变换求方程组的解等。

参考：水木艾迪基础班线性方程组例 9，强化班线性方程组第 5 类问题。

（22）（本题满分 11 分）设 3 阶实对称矩阵 A 的特征值$\lambda_1=1,\lambda_2=2,\lambda_3=-2,a_1=\left(1,-1,1\right)^{\mathrm{T}}$

是 A 的属于λ_1的一个特征向量。记$B=A^5-4A^3+E,$其中 E 为 3 阶单位矩阵。

（Ⅰ）验证a_1是矩阵 B 的特征向量，并求 B 的全部特征值与特征向量;

（Ⅱ）求矩阵 B.

【解】（Ⅰ） $B\alpha_1=(A^5-4A^3+E)\alpha_1=\alpha_1-4\alpha_1+\alpha_1=-2\alpha_1$，

所以α_1是B的属于特征值-2的特征向量。

设α_2是λ_2的特征向量，则

$$B\alpha_2=(A^5-4A^3+E)\alpha_2=2^5\alpha_2-4\times 2^3\alpha_2+\alpha_2=\alpha_2$$

设α_3是λ_3的特征向量，则

$$B\alpha_3=(A^5-4A^3+E)\alpha_3=(-2^5)\alpha_3-4\times(-2)^3\alpha_3+\alpha_3=\alpha_3$$

所以 B 的全部特征值为 $-2,1,1$。

设 B 的属于 1 的特征向量为 $\alpha=(x_1,x_2,x_3)^T$，则 $\alpha_1{}^T\alpha_2=0$，即

$$x_1-x_2+x_3=0,$$

解得 $(1,1,0)^T$ 和 $(0,1,1)^T$，所以 B 的属于特征值 1 的特征向量为

$\alpha=k_1(1,1,0)^T+k_2(0,1,1)^T$，

其中 k_1,k_2 为不全为零的常数。属于特征值 -2 的特征向量为 $\alpha_1=k(1,-1,1)^T$，其中 k 是不为零的常数。

（Ⅱ）令 $P=\begin{pmatrix}1&1&0\\-1&1&1\\1&0&1\end{pmatrix}$，则 $P^{-1}BP=\begin{pmatrix}-2&&\\&1&\\&&1\end{pmatrix}$，其中 $P^{-1}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1&-1&1\\2&1&-1\\-1&1&2\end{pmatrix}$，则

$$B=P\begin{pmatrix}-2&&\\&1&\\&&1\end{pmatrix}P^{-1}=\begin{pmatrix}0&1&-1\\1&0&1\\-1&1&0\end{pmatrix}。$$

考点：矩阵的特征值与特征向量，实对称矩阵的特征向量的性质，矩阵的相似对角化，求逆矩阵，矩阵的运算等。

参考：水木艾迪基础班特征值例 14，强化班特征值第 6 类问题。

(23)(本题满分 11 分)设二维随机变量 (x,y) 的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}2-x-y & 0<x<1,0<y<1\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

（Ⅰ）求 $P\{X>2Y\}$；

（Ⅱ）求 $Z=X+Y$ 的概率密度。

【解】（Ⅰ） $P\{X>2Y\}=\iint\limits_{x>2y}f(x,y)dxdy=\int_0^1[\int_0^{\frac{x}{2}}(2-x-y)dy]dx$

$$=\int_0^1[x-\frac{5}{8}x^2]dx=\frac{7}{24}$$

（Ⅱ）**【解 1】**

$$F_Z(z)=P(X+Y\le z)=\begin{cases}0, & z<0,\\ \int_0^z[\int_0^{z-x}(2-x-y)dy]dx=z^2-\frac{1}{3}z^3, & 0\le z<1,\\ 1-P(X+Y>z)=1-\int_{z-1}^1[\int_{z-x}^1(2-x-y)dy]dx=1-\frac{1}{3}(2-z)^2, & 1\le z<2,\\ 1, & z\ge 2.\end{cases}$$

从而

$$f_Z(z)=F_Z'(z)=\begin{cases}2z-z^2, & 0\le z<1,\\ (2-z)^2, & 1\le z<2,\\ 0, & 其它.\end{cases}$$

【解 2】 由于 $f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(u,z-u)du$，其中被积函数为

$$f(u,z-u)=\begin{cases}2-z, & 0<u<1,0<z-u<1,\\ 0, & 其它.\end{cases}$$

于是

$$f_Z(z)=\begin{cases}\int_0^z(2-z)du=2z-z^2, & 0\le z<1,\\ \int_{z-1}^1(2-z)du=(2-z)^2, & 1\le z<2,\\ 0, & 其它.\end{cases}$$

【解析与点评】本题是二维连续型随机变量的典型题目，主要考查了二维随机变量的概率的计算和它的函数的分布等基本问题，问题（Ⅰ）只要利用公式

$$P\{(X,Y)\in A\}=\iint_A f(x,y)dxdy,$$

而对问题（Ⅱ），只要大家熟悉二维随机变量的函数的分布的直接求法（即解法一），就容易求得结果，当然，此问题也可以用解法二的公式法获得。这种类型的题目在水木艾迪各级别的辅导中均为最基本的题型，可参见水木艾迪 **2006** 考研数学基础班讲义例 **3.3**、**3.10**、**3.15**、**3.16**、**3.21**，强化班的例 **3.3**、**3.12**、**3.22**，考研 **36** 技之例 **32-2** 至 **32-7** 等等题目。

（24）（本题满分 11 分）设总体 X 的概率密度为

$$f(x,\theta)=\begin{cases}\frac{1}{2\theta} & 0<x<\theta\\ \frac{1}{2(1-\theta)} & 0\le x<1\\ 0 & 其他\end{cases},$$

$X_1,X_2\cdots X_n$ 是来自总体 x 的简单随机样本，$\overline{X}$ 是样本均值

（Ⅰ）求参数θ的矩估计量$\hat{\theta}$；

（Ⅱ）判断$4\overline{X}^2$是否为θ^2的无偏估计量，并说明理由。

【解】（Ⅰ）由于$EX=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x,\theta)dx=\int_0^{\theta}x\frac{1}{2\theta}dx+\int_{\theta}^{1}x\frac{1}{2(1-\theta)}dx=\frac{\theta}{2}+\frac{1}{4}$，

令$EX=\overline{X}$，故得参数θ的矩估计量 $\hat{\theta}=2\overline{X}-\frac{1}{2}$。

（Ⅱ）$4\overline{X}^2$不是为θ^2的无偏估计量。因为

$$E(4\overline{X}^2)=4[D\overline{X}+(E\overline{X})^2]=4[\frac{1}{n}DX+(EX)^2]$$

注意到

$$EX^2=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2f(x,\theta)dx=\int_0^{\theta}x^2\frac{1}{2\theta}dx+\int_{\theta}^{1}x^2\frac{1}{2(1-\theta)}dx=\frac{\theta^2}{3}+\frac{\theta}{6}+\frac{1}{6},$$

故 $DX=EX^2-(EX)^2=\frac{\theta^2}{12}-\frac{\theta}{12}+\frac{5}{48}$

所以

$$E(4\overline{X}^2)=4[\frac{1}{n}DX+(EX)^2]=(1+\frac{1}{3n})\theta^2+(1-\frac{1}{3n})\theta+(\frac{1}{4}+\frac{5}{12n})\neq\theta^2$$

【解析与点评】本题也可以用如下的推断获得结果：

$E(4\overline{X}^2)=4[\frac{1}{n}DX+(EX)^2]=\frac{4}{n}DX+\frac{1}{4}+\theta+\theta^2>\theta^2$（因为$DX\geq 0$，且$\theta>0$）

本题考查了矩估计的求法和无偏性的判断，是数理统计的基本题型。这种类型的题目在水木艾迪各级别的辅导中也均为最基本的题型，可参见水木艾迪 **2006** 考研数学基础班讲义例 **6.11**、**6.16**、**6.20**、**6.22**，强化班的例 **6.3**、**6.11**，考研 **36** 技之例 **35-7** 至 **35-11** 等等题目。