2006 年考研数学（三）真题

一、**填空题**：1－6 小题，每小题 4 分，共 24 分. 把答案填在题中横线上.

（**1**）$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^{(-1)^n}=$______.

（**2**）设函数 $f(x)$ 在 $x=2$ 的某邻域内可导,且 $f'(x)=\mathrm{e}^{f(x)}$， $f(2)=1$，则 $f'''(2)=$____.

（**3**）设函数 $f(u)$ 可微,且 $f'(0)=\dfrac{1}{2}$,则 $z=f\left(4x^2-y^2\right)$ 在点(1,2)处的全微分 $\mathrm{d}z\big|_{(1,2)}=$_____.

（**4**）设矩阵 $A=\begin{pmatrix}2&1\\-1&2\end{pmatrix}$， E 为 2 阶单位矩阵，矩阵 B 满足 $BA=B+2E$，则 $|B|=$___.

（**5**）设随机变量 X 与 Y 相互独立，且均服从区间 $[0,3]$ 上的均匀分布，则 $P\left\{\max\{X,Y\}\le 1\right\}=$_______.

（**6**）设总体 X 的概率密度为 $f(x)=\dfrac{1}{2}e^{-|x|}\left(-\infty<x<+\infty\right)$, $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为总体 X 的简单随机样本，其样本方差为 S^2，则 $ES^2=$____.

二、**选择题**：**7**－**14** 小题，每小题 4 分，共 32 分. 每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求，把所选项前的字母填在题后的括号内.

（**7**）设函数 $y=f(x)$ 具有二阶导数，且 $f'(x)>0, f''(x)>0$，Δx 为自变量 x 在点 x_0 处的增量，Δy 与 $\mathrm{d}y$ 分别为 $f(x)$ 在点 x_0 处对应的增量与微分，若 $\Delta x>0$，则

(A) $0<\mathrm{d}y<\Delta y$.　　(B) $0<\Delta y<\mathrm{d}y$.

(C) $\Delta y<\mathrm{d}y<0$.　　(D) $\mathrm{d}y<\Delta y<0$.　　[　　]

（**8**）设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，且 $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f\left(h^2\right)}{h^2}=1$，则

(A) $f(0)=0$ 且 $f_-'(0)$ 存在　　(B) $f(0)=1$ 且 $f_-'(0)$ 存在

(C) $f(0)=0$ 且 $f_+'(0)$ 存在　　(D) $f(0)=1$ 且 $f_+'(0)$ 存在　　[　　]

（**9**）若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，则级数

(A) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|$ 收敛 .　　（B） $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ 收敛.

(C) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n a_{n+1}$ 收敛.　　(D) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a_n+a_{n+1}}{2}$ 收敛.　　[　　]

（**10**）设非齐次线性微分方程 $y'+P(x)y=Q(x)$ 有两个不同的解 $y_1(x),y_2(x),C$ 为任意常数，则该方程的通解是

（A）$C\left[y_1(x)-y_2(x)\right]$.　　　（B）$y_1(x)+C\left[y_1(x)-y_2(x)\right]$.

（C）$C\left[y_1(x)+y_2(x)\right]$.　　　（D）$y_1(x)+C\left[y_1(x)+y_2(x)\right]$　　　[　　]

（**11**）设 $f(x,y)$ 与 $\varphi(x,y)$ 均为可微函数，且 $\varphi_y'(x,y)\neq 0$，已知 (x_0,y_0) 是 $f(x,y)$ 在约束条件 $\varphi(x,y)=0$ 下的一个极值点，下列选项正确的是

(A)　若 $f_x'(x_0,y_0)=0$，则 $f_y'(x_0,y_0)=0$.

(B)　若 $f_x'(x_0,y_0)=0$，则 $f_y'(x_0,y_0)\neq 0$.

(C)　若 $f_x'(x_0,y_0)\neq 0$，则 $f_y'(x_0,y_0)=0$.

(D) 若 $f_x'(x_0,y_0)\neq 0$，则 $f_y'(x_0,y_0)\neq 0$.　　　[　　]

（**12**）设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 均为 n 维列向量，A 为 $m\times n$ 矩阵，下列选项正确的是

(A)　若 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性相关，则 $A\alpha_1,A\alpha_2,\cdots,A\alpha_s$ 线性相关.

(B)　若 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性相关，则 $A\alpha_1,A\alpha_2,\cdots,A\alpha_s$ 线性无关.

(C)　若 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性无关，则 $A\alpha_1,A\alpha_2,\cdots,A\alpha_s$ 线性相关.

(D) 若 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性无关，则 $A\alpha_1,A\alpha_2,\cdots,A\alpha_s$ 线性无关.　　　[　　]

（**13**）设 A 为 3 阶矩阵，将 A 的第 2 行加到第 1 行得 B，再将 B 的第 1 列的 -1 倍加到第 2 列得 C，记 $P=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，则

（A）$C=P^{-1}AP$.　　　（B）$C=PAP^{-1}$.

（C）$C=P^{\mathrm{T}}AP$.　　　（D）$C=PAP^{\mathrm{T}}$.　　　[　　]

（**14**）设随机变量 X 服从正态分布 $N(\mu_1,\sigma_1^2)$，Y 服从正态分布 $N(\mu_2,\sigma_2^2)$，且

$$P\left\{\left|X-\mu_1\right|<1\right\}>P\left\{\left|Y-\mu_2\right|<1\right\}$$

则必有

(A)　$\sigma_1<\sigma_2$　　　(B)　$\sigma_1>\sigma_2$

(C) $\mu_1 < \mu_2$ (D) $\mu_1 > \mu_2$ [ ]

三 、解答题：15－23 小题，共 94 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

（15）（本题满分 7 分）

设 $f(x,y)=\dfrac{y}{1+xy}-\dfrac{1-y\sin\dfrac{\pi x}{y}}{\arctan x}, x>0, y>0$,求

（Ⅰ）$g(x)=\lim\limits_{y\to+\infty} f(x,y)$；

（Ⅱ）$\lim\limits_{x\to0^+} g(x)$.

（16）（本题满分 7 分）

计算二重积分 $\iint\limits_D \sqrt{y^2-xy}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 D 是由直线 $y=x, y=1, x=0$ 所围成的平面区域.

（17）（本题满分 10 分）

证明：当 $0<a<b<\pi$ 时，

$$b\sin b+2\cos b+\pi b>a\sin a+2\cos a+\pi a.$$

（18）（本题满分 8 分）

在 xOy 坐标平面上，连续曲线 L 过点 $M(1,0)$，其上任意点 $P(x,y)(x\neq0)$ 处的切线斜率与直线 OP 的斜率之差等于 ax（常数 a>0）.

（Ⅰ）求 L 的方程；

（Ⅱ）当 L 与直线 $y=ax$ 所围成平面图形的面积为 $\dfrac{8}{3}$ 时，确定 a 的值.

（19）（本题满分 10 分）

求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}x^{2n+1}}{n(2n-1)}$ 的收敛域及和函数 $s(x)$.

（20）（本题满分 13 分）

设 4 维向量组 $\alpha_1=(1+a,1,1,1)^{\mathrm{T}}, \alpha_2=(2,2+a,2,2)^{\mathrm{T}}, \alpha_3=(3,3,3+a,3)^{\mathrm{T}}$， $\alpha_4=(4,4,4,4+a)^{\mathrm{T}}$，问 a 为何值时 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性相关?当 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性相关时,求其一个极大线性无关组,并将其余向量用该极大线性无关组线性表出.

（21）（本题满分 13 分）

设 3 阶实对称矩阵 A 的各行元素之和均为 3, 向量 $\alpha_1=(-1,2,-1)^{\mathrm{T}}, \alpha_2=(0,-1,1)^{\mathrm{T}}$ 是线性方程组 $Ax=0$ 的两个解.

(Ⅰ)求 A 的特征值与特征向量；

(Ⅱ)求正交矩阵 Q 和对角矩阵 Λ,使得 $Q^{\mathrm{T}}AQ=\Lambda$；

（Ⅲ）求 A 及 $\left(A-\dfrac{3}{2}E\right)^6$，其中 E 为 3 阶单位矩阵.

（22）（本题满分 13 分）

设随机变量 X 的概率密度为

$$f_X(x)=\begin{cases}\frac{1}{2},-1<x<0\\ \frac{1}{4},0\le x<2\\ 0,\quad 其他\end{cases},$$

令 $Y=X^2,F(x,y)$ 为二维随机变量 (X,Y) 的分布函数.

(Ⅰ)求 Y 的概率密度 $f_Y(y)$；

(Ⅱ) $\mathrm{Cov}(X,Y)$；

(III) $F\left(-\frac{1}{2},4\right)$.

（23）（本题满分 13 分）

设总体 X 的概率密度为

$$f(x;\theta)=\begin{cases}\theta,\quad 0<x<1,\\ 1-\theta,1\le x<2,\\ 0,\quad 其他,\end{cases}$$

其中 θ 是未知参数 $(0<\theta<1)$，$X_1,X_2...,X_n$ 为来自总体 X 的简单随机样本，记 N 为样本值 $x_1,x_2...,x_n$ 中小于 1 的个数.

（Ⅰ）求 θ 的矩估计；

（Ⅱ）求 θ 的最大似然估计

2006 年考研数学（三）真题解析

二、**填空题**：1－6 小题，每小题 4 分，共 24 分. 把答案填在题中横线上.

（**1**）$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^{(-1)^n}=\underline{1.}$

【分析】将其对数恒等化 $N=\mathrm{e}^{\ln N}$ 求解.

【详解】$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^{(-1)^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\mathrm{e}^{\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)^{(-1)^n}}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)}$，

而数列$\left\{(-1)^n\right\}$有界，$\lim\limits_{n\to\infty}\ln\left(\dfrac{n+1}{n}\right)=0$，所以$\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n\ln\left(\dfrac{n+1}{n}\right)=0$.

故 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^{(-1)^n}=\mathrm{e}^0=1$.

（**2**）设函数 $f(x)$ 在 $x=2$ 的某邻域内可导,且 $f'(x)=\mathrm{e}^{f(x)}$， $f(2)=1$，则 $f'''(2)=\underline{2\mathrm{e}^3.}$

【分析】利用复合函数求导即可.

【详解】由题设知，$f'(x)=\mathrm{e}^{f(x)}$，两边对 x 求导得

$$f''(x)=\mathrm{e}^{f(x)}f'(x)=\mathrm{e}^{2f(x)},$$

两边再对 x 求导得 $f'''(x)=2\mathrm{e}^{2f(x)}f'(x)=2\mathrm{e}^{3f(x)}$，又 $f(2)=1$，

故 $f'''(2)=2\mathrm{e}^{3f(2)}=2\mathrm{e}^3$.

（**3**）设函数 $f(u)$ 可微,且 $f'(0)=\dfrac{1}{2}$,则 $z=f\left(4x^2-y^2\right)$ 在点(1,2)处的全微分 $\mathrm{d}z\Big|_{(1,2)}=\underline{4\mathrm{d}x-2\mathrm{d}y.}$

【分析】利用二元函数的全微分公式或微分形式不变性计算.

【详解】方法一：因为 $\dfrac{\partial z}{\partial x}\Big|_{(1,2)}=f'(4x^2-y^2)\cdot 8x\Big|_{(1,2)}=4$，

$$\frac{\partial z}{\partial y}\Big|_{(1,2)}=f'(4x^2-y^2)\cdot(-2y)\Big|_{(1,2)}=-2,$$

所以 $\mathrm{d}z\Big|_{(1,2)}=\left[\dfrac{\partial z}{\partial x}\Big|_{(1,2)}\mathrm{d}x+\dfrac{\partial z}{\partial y}\Big|_{(1,2)}\mathrm{d}y\right]=4\mathrm{d}x-2\mathrm{d}y$.

方法二：对 $z=f\left(4x^2-y^2\right)$ 微分得

$$\mathrm{d}z = f'(4x^2-y^2)\mathrm{d}(4x^2-y^2) = f'(4x^2-y^2)\left(8x\mathrm{d}x-2y\mathrm{d}y\right),$$

故 $\mathrm{d}z\Big|_{(1,2)} = f'(0)\left(8\mathrm{d}x-2\mathrm{d}y\right) = 4\mathrm{d}x-2\mathrm{d}y$.

（**4**）设矩阵 $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$，$E$ 为 2 阶单位矩阵，矩阵 B 满足 $BA=B+2E$，则 $|B|=$ __2__.

【分析】 将矩阵方程改写为 $AX=B$或$XA=B$或$AXB=C$ 的形式，再用方阵相乘的行列式性质进行计算即可.

【详解】 由题设，有

$$B(A-E)=2E$$

于是有 $|B||A-E|=4$，而 $|A-E|=\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}=2$，所以 $|B|=2$.

（**5**）设随机变量 X 与 Y 相互独立，且均服从区间 $[0,3]$ 上的均匀分布，则

$P\left\{\max\{X,Y\}\le 1\right\}=$ __$\frac{1}{9}$__ .

【分析】 利用 X 与 Y 的独立性及分布计算.

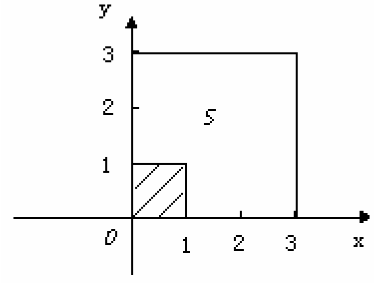
【详解】 由题设知，X 与 Y 具有相同的概率密度

$$f(x)=\begin{cases} \frac{1}{3}, & 0\le x\le 3 \\ 0, & 其他 \end{cases}.$$

则 $P\left\{\max\{X,Y\}\le 1\right\}=P\{X\le 1, Y\le 1\}=P\{X\le 1\}P\{Y\le 1\}$

$$=\left(P\{X\le 1\}\right)^2=\left(\int_0^1 \frac{1}{3}\mathrm{d}x\right)^2=\frac{1}{9}.$$

【评注】 本题属几何概型，也可如下计算，如下图：



则 $P\left\{\max\left\{X,Y\right\}\le 1\right\}=P\left\{X\le 1,Y\le 1\right\}=\dfrac{S_{阴}}{S}=\dfrac{1}{9}$.

（**6**）设总体 X 的概率密度为 $f\left(x\right)=\dfrac{1}{2}e^{-|x|}\left(-\infty<x<+\infty\right),X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为总体 X 的简单随机样本，其样本方差为 S^2，则 $ES^2=\underline{2}$.

【分析】利用样本方差的性质 $ES^2=DX$ 即可.

【详解】因为

$$EX=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x}{2}\mathrm{e}^{-|x|}\mathrm{d}x=0,$$

$$EX^2=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2f(x)\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2}{2}\mathrm{e}^{-|x|}\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}x^2\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x=-x^2\mathrm{e}^{-x}\Big|_0^{+\infty}+2\int_0^{+\infty}x\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$$

$$=-2x\mathrm{e}^{-x}\Big|_0^{+\infty}+2\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x=-2\mathrm{e}^{-x}\Big|_0^{+\infty}=2,$$

所以 $DX=EX^2-\left(EX\right)^2=2-0=2$，又因 S^2 是 DX 的无偏估计量，

所以 $ES^2=DX=2$.

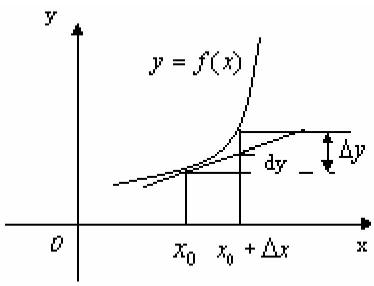
二、**选择题：7－14** 小题，每小题 4 分，共 32 分. 每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求，把所选项前的字母填在题后的括号内.

（**7**）设函数 $y=f(x)$ 具有二阶导数，且 $f'(x)>0,f''(x)>0$，Δx 为自变量 x 在点 x_0 处的增量，Δy与$\mathrm{d}y$ 分别为 $f(x)$ 在点 x_0 处对应的增量与微分，若 $\Delta x>0$，则

(A) $0<\mathrm{d}y<\Delta y$. (B) $0<\Delta y<\mathrm{d}y$.

(C) $\Delta y<\mathrm{d}y<0$. (D) $\mathrm{d}y<\Delta y<0$.

[A]



【分析】 题设条件有明显的几何意义，用图示法求解.

【详解】 由 $f'(x)>0,f''(x)>0$ 知，函数 $f(x)$ 单调增加，曲线 $y=f(x)$ 凹向，作函数 $y=f(x)$ 的图形如右图所示，显然当 $\Delta x>0$ 时，

$\Delta y>\mathrm{d}y=f'(x_0)\mathrm{d}x=f'(x_0)\Delta x>0$，故应选(A).

（**8**）设函数 $f\left(x\right)$ 在 $x=0$ 处连续，且 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f\left(h^2\right)}{h^2}=1$，则

(A) $f\left(0\right)=0$且$f_-'\left(0\right)$存在 (B) $f\left(0\right)=1$且$f_-'\left(0\right)$存在

(C) $f\left(0\right)=0$且$f_{+}'\left(0\right)$存在　　(D) $f\left(0\right)=1$且$f_{+}'\left(0\right)$存在　　[C]

【分析】从$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f\left(h^2\right)}{h^2}=1$入手计算$f(0)$，利用导数的左右导数定义判定$f_{-}'(0), f_{+}'(0)$的存在性.

【详解】由$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f\left(h^2\right)}{h^2}=1$知，$\lim\limits_{h\to 0}f\left(h^2\right)=0$.又因为$f\left(x\right)$在$x=0$处连续，则

$$f(0)=\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{h\to 0}f\left(h^2\right)=0.$$

令$t=h^2$，则$1=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f\left(h^2\right)}{h^2}=\lim\limits_{t\to 0^+}\dfrac{f\left(t\right)-f(0)}{t}=f_{+}'(0)$.

所以$f_{+}'(0)$存在，故本题选（C）.

（**9**）若级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$收敛，则级数

(A) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|a_n\right|$收敛 .　　（B）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$收敛.

(C) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n a_{n+1}$收敛.　　(D) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a_n+a_{n+1}}{2}$收敛.　　[D]

【分析】　可以通过举反例及级数的性质来判定.

【详解】　由$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$收敛知$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_{n+1}$收敛，所以级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a_n+a_{n+1}}{2}$收敛，故应选(D).

或利用排除法：

取$a_n=(-1)^n\dfrac{1}{n}$，则可排除选项（A），（B）；

取$a_n=(-1)^n\dfrac{1}{\sqrt{n}}$，则可排除选项（C）.故（D）项正确.

（**10**）设非齐次线性微分方程$y'+P(x)y=Q(x)$有两个不同的解$y_1(x), y_2(x), C$为任意常数，则该方程的通解是

（A）$C\left[y_1(x)-y_2(x)\right]$.　　（B）$y_1(x)+C\left[y_1(x)-y_2(x)\right]$.

（C）$C\left[y_1(x)+y_2(x)\right]$.　　（D）$y_1(x)+C\left[y_1(x)+y_2(x)\right]$　　[B]

【分析】　利用一阶线性非齐次微分方程解的结构即可.

【详解】由于$y_1(x)-y_2(x)$是对应齐次线性微分方程$y'+P(x)y=0$的非零解，所以它的通解是

$Y=C\left[y_1(x)-y_2(x)\right]$，故原方程的通解为

$$y=y_1(x)+Y=y_1(x)+C\left[y_1(x)-y_2(x)\right]$$，故应选(B).

【评注】本题属基本题型，考查一阶线性非齐次微分方程解的结构：

$$y=y^*+Y.$$

其中 y^* 是所给一阶线性微分方程的特解，Y 是对应齐次微分方程的通解.

（11）设 $f(x,y)$ 与 $\varphi(x,y)$ 均为可微函数，且 $\varphi_y'(x,y)\neq 0$，已知 (x_0,y_0) 是 $f(x,y)$ 在约束条件 $\varphi(x,y)=0$ 下的一个极值点，下列选项正确的是

(A) 若 $f_x'(x_0,y_0)=0$，则 $f_y'(x_0,y_0)=0$.

(B) 若 $f_x'(x_0,y_0)=0$，则 $f_y'(x_0,y_0)\neq 0$.

(C) 若 $f_x'(x_0,y_0)\neq 0$，则 $f_y'(x_0,y_0)=0$.

(D) 若 $f_x'(x_0,y_0)\neq 0$，则 $f_y'(x_0,y_0)\neq 0$. [D]

【分析】利用拉格朗日函数 $F(x,y,\lambda)=f(x,y)+\lambda\varphi(x,y)$ 在 (x_0,y_0,λ_0)（λ_0 是对应 x_0,y_0 的参数 λ 的值）取到极值的必要条件即可.

【详解】 作拉格朗日函数 $F(x,y,\lambda)=f(x,y)+\lambda\varphi(x,y)$，并记对应 x_0,y_0 的参数 λ 的值为 λ_0，则

$$\begin{cases}F_x'(x_0,y_0,\lambda_0)=0\\ F_y'(x_0,y_0,\lambda_0)=0\end{cases},\quad \text{即}\begin{cases}f_x'(x_0,y_0)+\lambda_0\varphi_x'(x_0,y_0)=0\\ f_y'(x_0,y_0)+\lambda_0\varphi_y'(x_0,y_0)=0\end{cases}.$$

消去 λ_0，得

$$f_x'(x_0,y_0)\varphi_y'(x_0,y_0)-f_y'(x_0,y_0)\varphi_x'(x_0,y_0)=0,$$

整理得 $f_x'(x_0,y_0)=\dfrac{1}{\varphi_y'(x_0,y_0)}f_y'(x_0,y_0)\varphi_x'(x_0,y_0)$.（因为 $\varphi_y'(x,y)\neq 0$），

若 $f_x'(x_0,y_0)\neq 0$，则 $f_y'(x_0,y_0)\neq 0$.故选（D）.