2006 年全国硕士研究生入学考试数学（四）

答案解析与点评

水木艾迪考研辅导班命题研究中心

清华大学数学科学系 刘坤林 谭泽光 俞正光 葛余博

1. 06 年考题仍然以基本的概念，理论和技巧为主，注意考察基础知识的理解与简单综合运用。除概率统计比 05 年考题难度略有增加以外，试卷难度普遍降低，估计平均难度系数为 55-62%，平均分数为 80-83 分；而前几年为 38-45%，平均分数只有 60-63 分。
2. 各套试题共用题目比例有较大幅度提高，在大纲要求的共同范围内难度趋于统一。特别是数三数四连续几年并无任何经济特色，正如我们在讲座和教学中强调的那样，考的是数学，确切说是理工类数学的能力。这是对 07 年考生的重要参考。
3. 06 年考题进一步说明了我们在水木艾迪考研辅导中教学策略的正确性，教学内容的准确性和有效性，包括基础班、强化班及考研三十六计冲刺班，对广大学员的教学引导与训练，使更大面积的考生最大限度受益。

就四套试题的全局而言，水木艾迪考研辅导教学题型、方法与技巧在 06 年的考试中得到完美的体现，许多试题为水木艾迪考研辅导教学或模拟试题的原题，还有大量题目仅仅有文字和符号的差别，问题类型及所含知识点与所用方法完全相同，特别是水木艾迪考研数学三十六计为广大学员提供了全盛的锐利武器。

在面向 07 年考研的水木艾迪考研辅导教学中，水木艾迪的全体清华大学教师将进一步总结经验，不辜负广大考生的支持和赞誉，以独树一帜的杰出教学质量回报考生朋友，为打造他们人生的 U-形转弯倾心工作，送他们顺利走上成功之路。

一、填空题（每小题 4 分，共 24 分）

（1）. $\lim\limits_{n\to\infty}(\dfrac{n+1}{n})^{(-1)^n}=\underline{1}$

【解析与点评】 应注意：本题并非 $\lim\limits_{n\to\infty}(\dfrac{n+1}{n})^n$ 的形式，考点为初等函数性质与极限运算。

令 $u_n=(\dfrac{n+1}{n})^{(-1)^n},n=1,2,3,\ldots,$

则当 $n=2k-1$ 时，$u_n=(\dfrac{2k}{2k-1})^{-1}=\dfrac{2k-1}{2k}=1-\dfrac{1}{2k}=1-\dfrac{1}{n+1}$，

则当 $n=2k$ 时，$u_n=(\dfrac{2k+`}{2k})^1=1+\dfrac{1}{2k}=1+\dfrac{1}{n}$，

故 $\lim\limits_{n\to\infty}(\dfrac{n+1}{n})^{(-1)^n}=1$。

可参见**水木艾迪 2006 考研数学基础班讲义例 1.17，例 1.32，强化班例 18 等题目。**

(2) 设函数 $f(x)$ 在 $x=2$ 的某邻域内可导,且 $f'(x)=e^{f(x)}$, $f(2)=1$ 则 $f'''(2)=\underline{2e^3}$.

【解析与点评】由题设 $f(x)$ 在 $x=2$ 的某邻域内可导以及 $f'(x)=e^{f(x)}$，可知 $f'(x)$ 也在 $x=2$ 的同一邻域内可导，于是在该邻域内函数 $f(x)$ 二阶可导，且

$$f''(x)=[e^{f(x)}]'=f'(x)e^{f(x)}=e^{2f(x)}。$$

利用上式可知 $f''(x)$ 也在 $x=2$ 的同一邻域内可导，于是在该邻域内函数 $f(x)$ 三阶可导，且 $f'''(x)=[e^{2f(x)}]'=2f'(x)e^{2f(x)}=2e^{3f(x)}$。

将 $f(2)=1$ 代入即得 $f'''(2)=2e^3$.

参见水木艾迪 2006 考研数学 36 计例 4-6，4-7。百分训练营模拟试题数二第 3 题，

(3) 设函数 $f(u)$ 可微，且 $f'(0)=\frac{1}{2}$，则 $z=f(4x^2-y^2)$ 在点 $(1,2)$ 处的全微分 $dz|_{(1,2)}=\underline{4dx-2dy}$。

【解析与点评】 该题为多元函数微分学基本题。利用一阶全微分形式不变性直接计算可得

$$dz=f'(u)du=f'(4x^2-y^2)\cdot d(4x^2-y^2)$$

$$=f'(4x^2-y^2)\cdot(8xdx-2ydy)$$

$$=2f'(4x^2-y^2)\cdot(4xdx-ydy)$$

于是 $dz|_{(1,2)}=2f'(0)(4dx-2dy)=4dx-2dy$.

可参见水木艾迪 2006 考研数学 36 计例 15-5 等题

(4) 已知 a_1,a_2 为 2 维列向量，矩阵 $A=(2a_1+a_2,a_1-a_2)$，$B=(a_1,a_2)$．若行列式 $|A|=6$，则 $|B|=$______.　**答案** $|B|=-2$。

【解析与点评】本题主要考查矩阵的行列式计算．

【解】 $A=(2\alpha_1+\alpha_2,\alpha_1-\alpha_2)=(\alpha_1,\alpha_2)\begin{pmatrix}2&1\\1&-1\end{pmatrix}=B\begin{pmatrix}2&1\\1&-1\end{pmatrix}$，

$$|A|=|B|\begin{vmatrix}2&1\\1&-1\end{vmatrix}=-3|B|,$$

所以，$|B|=-2$.

(5) 设矩阵 $A=\begin{pmatrix}2&1\\-1&2\end{pmatrix}$，$E$ 为 2 阶单位矩阵，矩阵 B 满足 $BA=B+2E$，则 $B=$_______ .

【解析与点评】本题主要考查矩阵运算，阶矩阵方程，求逆矩阵等．

【解】 由 $BA=B+2E$，得 $B(A-E)=2E$，于是

$B=2(A-E)^{-1}$，$A-E=\begin{pmatrix}1&1\\-1&1\end{pmatrix}$，$(A-E)^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&-1\\1&1\end{pmatrix}$，**答案** $B=\begin{pmatrix}1&-1\\1&1\end{pmatrix}$.

(6) 设随机变量 X 与 Y 相互独立，且均服从区间 $[1,3]$ 上的均匀分布，由

$P(\max\{X,Y\}\le 1)=$__________ 【答案】 $\frac{1}{9}$

【解析与点评】 $P(\max\{X,Y\}\le 1)=P(X\le 1,Y\le 1)=P(X\le 1)P(Y\le 1)=\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{9}$

考研大纲明确提出均匀分布是要求熟练掌握的重要分布之一，而最（大、小）值函数是要求熟练掌握的随机向量的函数分布。本题是这两个重要基本知识和基本技能的结合，是我们水木艾迪历次辅导班讲课的重点。例如 36 计（冲刺班）的、强化班的、基础班的

二、选择题（每小题 4 分，共 32 分）

（7）设函数 $y=f(x)$ 具有二阶导数，且 $f'(x)>0,\ f''(x)>0$， Δx 为自变量 x 在 x_0 处的增量，Δy 与 dy 分别为 $f(x)$ 在点 x_0 处对应的增量与微分，若 $\Delta x>0$，则【 A 】

（A） $0<dy<\Delta y$　　　　（B） $0<\Delta y<dy$

（C） $\Delta y<dy<0$　　　　（D） $dy<\Delta y<0$

【解析与点评】 因为 $f'(x)>0$, 则$f(x)$严格单调增加

$f''(x)>0$, 则$f(x)$是凹的，又 $\Delta x>0$，故 $0<dy<\Delta y$。

(8) 设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续,且 $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(h^2)}{h^2}=1$,则 【 C 】

(A) $f(0)=0$ 且 $f'_-(0)$ 存在。 (B) $f(0)=1$ 且 $f'_-(0)$ 存在。

(C) $f(0)=0$ 且 $f'_+(0)$ 存在。 (D) $f(0)=1$ 且 $f'_+(0)$ 存在

【解析与点评】令 $x=h^2$，可得

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(h^2)}{h^2}=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)}{x}=1。$$

于是 $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{f(x)}{x}\cdot x=1\cdot 0=0=f(0)$

进一步有 $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=f'_+(0)=1$。

应选 C。

出自水木艾迪 2006 考研数学冲刺班 36 计例 4-8，例 4-9，基础班例 3.4，强化班第 2 讲例 14。还可参见清华大学出版社《大学数学考研清华经典备考教程 微积分上》（刘坤林、谭泽光编写）第 5 章综例 5.3.2，例 5.3.3。

（9）．设函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，且 $f(x)\le g(x)$，且对任何 $c\in(0,1)$ 【 C 】

(A) $\int_{\frac{1}{2}}^{c} f(t)dt \ge \int_{\frac{1}{2}}^{c} g(t)dt$ (B) $\int_{\frac{1}{2}}^{c} f(t)dt \le \int_{\frac{1}{2}}^{c} g(t)dt$

(C) $\int_{c}^{1} f(t)dt \ge \int_{c}^{1} g(t)dt$ (D) $\int_{c}^{1} f(t)dt \le \int_{c}^{1} g(t)dt$

由 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，且 $f(x) \le g(x)$，所以 $c \in (0,1)$ 时 $g(x) - f(x) \ge 0$。

则对任何 $c \in (0,1)$，有 $\int_{c}^{1} (g(t) - f(t))dt \ge 0$，即

$\int_{c}^{1} f(t)dt \le \int_{c}^{1} g(t)dt$。故选 D。

【解析与点评】 本题属于**积分的保序性与比较性质的简单应用，是水木艾迪 2006 考研数学 36 计中特别强调的考点与题型。参见水木艾迪 2006 考研数学 36 计中例 7-6，基础班例 6.1,强化班第 4 讲例 27 等例题。**

(10) 设非齐次线性微分方程 $y' + P_{(x)}y = Q_{(x)}$ 有两个的解 $y_1(x), y_2(x), C$ 为任意常数,则该方程通解是 【 B 】

(A) $C\left[y_1(x) - y_2(x)\right]$。 (B) $y_1(x) + C\left[y_1(x) - y_2(x)\right]$。

(C) $C\left[y_1(x) + y_2(x)\right]$。 (D) $y_1(x) + C\left[y_1(x) + y_2(x)\right]$。

【解析与点评】 **该题为考查线性微分方程解的结构知识的基本题。由线性微分方程解的性质可知** $y_1(x) - y_2(x)$ **是齐次线性微分方程** $y' + P(x)y = 0$ **的一个非零解，C 是一个任意常数，** $y_1(x)$ **是非齐次线性微分方程一个特解，从而由线性方程通解的结构可知** $y_1(x) + C[y_1(x) - y_2(x)]$ **是方程** $y' + P(x)y = Q(x)$ **的通解。故选 B。可参见水木艾迪 2006 考研数学 36 计例 111-7 等题**

(11) 设 $f(x, y)$ 与 $\varphi(x, y)$ 均为可微函数，且 $\varphi'(x, y) \ne 0$. 已知 (x_0, y_0) 是 $f(x, y)$ 在约束条件 $\varphi(x, y) = 0$ 下的一个极值点，下列选项正确的是 【 D 】

(A) 若 $f_x'(x_0, y_0) = 0$, 则 $f_y'(x_0, y_0) = 0$

(B) 若 $f_x'(x_0, y_0) = 0$, 则 $f_y'(x_0, y_0) \ne 0$.

(C) 若 $f_x'(x_0, y_0) \ne 0$, 则 $f_y'(x_0, y_0) = 0$

(D) 若 $f_x'(x_0, y_0) \ne 0$, 则 $f_y'(x_0, y_0) \ne 0$.

【解析与点评】【解法 1】 构造格朗日函数 $F = f(x, y) + \lambda\varphi(x, y)$

$$\begin{cases} F_x{}' = f_x{}'(x,y)+\lambda\varphi_x{}'(x,y)=0 \quad (1) \\ F_y{}' = f_y{}'(x,y)+\lambda\varphi_y{}'(x,y)=0 \quad (2) \\ F_\lambda{}' = \varphi(x,y)=0 \end{cases}$$

对（2）由于$\varphi_y{}'(x_0,y_0)\neq 0$，得到$\lambda=-\dfrac{f_x{}'(x_0,y_0)}{\varphi_x{}'(x_0,y_0)}=-\dfrac{f_y{}'(x_0,y_0)}{\varphi_y{}'(x_0,y_0)}$，

从而有　$f_x{}'(x_0,y_0)\cdot\varphi_y{}'(x_0,y_0)=f_y{}'(x_0,y_0)\cdot\varphi_x{}'(x_0,y_0)$

当$f_x{}'(x_0,y_0)=0$时，可推出$f_y{}'(x_0,y_0)\cdot\varphi_x{}'(x_0,y_0)=0$， 而由此推不出：

$f_y{}'(x_0,y_0)\neq 0$,或$f_y{}'(x_0,y_0)=0$， 因而否定 （A），(B)。

当$f_x{}'(x_0,y_0)\neq 0$时，加上$\varphi_y{}'(x_0,y_0)\neq 0$,可推出$f_y{}'(x_0,y_0)\cdot\varphi_x{}'(x_0,y_0)\neq 0$，由此可推出：$f_y{}'(x_0,y_0)\neq 0$。

【解法 2】由极值点必要条件得到

$$\left.\frac{dz}{dx}\right|_{x_0}=f_x(x_0,y_0)+f_y(x_0,y_0)y'\big|_{x=x_0}=f_x(x_0,y_0)-f_y(x_0,y_0)\frac{\varphi_x{}'(x_0,y_0)}{\varphi_y{}'(x_0,y_0)}=0$$

当$f_x{}'(x_0,y_0)=0$，及$\varphi_y{}'(x_0,y_0)\neq 0$时，可推出$f_y{}'(x_0,y_0)\cdot\varphi_x{}'(x_0,y_0)=0$， 而由此推不出：$f_y{}'(x_0,y_0)\neq 0$,或$f_y{}'(x_0,y_0)=0$， 因而否定 （A），(B)。

当$f_x{}'(x_0,y_0)\neq 0$时，加上$\varphi_y{}'(x_0,y_0)\neq 0$,可推出

$$f_x{}'(x_0,y_0)\cdot\varphi_y{}'(x_0,y_0)=f_y{}'(x_0,y_0)\cdot\varphi_x{}'(x_0,y_0)\neq 0，$$

由此可推出：$f_y{}'(x_0,y_0)\neq 0$。因而选 （D）.

【解法 3】由多元函数条件极值点必要条件的几何意义可直接由$\varphi_y{}'(x_0,y_0)\neq 0$和$f_x{}'(x_0,y_0)\neq 0$，直接得到得到$f_y{}'(x_0,y_0)\neq 0$.

该题考查条件极值必要条件的一些代数性质，从代数解，除拉格伦日条件外，其它运用的都是中学代数知识．若从多元函数条件极值点必要条件的几何意义来考查，做法就很简单，有关用这方面内容来设计的题目，可参见水木艾迪 2006 考研数学 36 计例 16-1.

（12）设A为 3 阶矩阵，将A的第 2 行加到第 1 行得B，再将B的第 1 列的-1倍加到第 2

列得C，记$P=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，则

（A）$C=P^{-1}AP.$ （B）$C=PAP^{-1}.$

（C）$C=P^{T}AP.$ （D）$C=PAP^{T}.$ 【 B 】

【解析与点评】本题主要考查矩阵的初等变换，初等矩阵，以及初等变换和初等矩阵的联系．水木艾迪辅导班春季班强化班都有专题进行辅导。只要掌握我们的例题的分析方法，这类题就能迎刃而解。

解：依题意，$\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}A=B$，$B\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=C$，

又$\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=P$，$\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=P^{-1}$，于是$C=PAP^{-1}$．选(B)．

（13） A, B为两个随机事件，且$P(B)>0$，$P(A|B)=1$则有 【 C 】

（A） $P(A\cup B)>P(A)$ （B） $P(A\cup B)>P(B)$

（C） $P(A\cup B)=P(A)$ （C） $P(A\cup B)>P(B)$

【解析与点评】 $1=P(A|B)=P(AB)/P(B)==>P(AB)=P(B)$

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)=P(A)$$

本题考条件概率的概念和概率的一般加法公式。它们同样是我们历次辅导班讲课的重点。例如36计（冲刺班）中第一计“基本概念与基本概率公式的考查要点”的最活跃的概率公式、应用特点和作用，及例1.1.1对$P(A|B)$与P(A)的讨论；强化班对应为§2.1.2和§1.1.2及例2.2.3。

(14) 设随机变量 X 服从正态分布$N\left(\mu_1,\sigma_1^{\ 2}\right)$,随机变量 Y 服从正态分布$N\left(\mu_2,\sigma_2^{\ 2}\right)$,且

$P\left\{\left|X-\mu_1\right|<1\right\}>P\left\{\left|Y-\mu_2\right|<1\right\}$，则必有 【 A 】

(A) $\sigma_1<\sigma_2$。 (B) $\sigma_1>\sigma_2$。

(C) $\mu_1<\mu_2$ 。 (D) $\mu_1>\mu_2$

【解析与点评】$P(|X-\mu_1|<1)=P(|X-\mu_1|/\sigma_1<1/\sigma_1)=P(|X^*|<1/\sigma_1)$，$X^*$是$X$的标准化，

$X^*\sim N(0,1)$，类似有 $P(|Y-\mu_2|<1)=P(|Y^*|<1/\sigma_2)$，$Y^*\sim N(0,1)$

由标准正态分布性质及题设$P\{|X-\mu_1|<1\}>P\{|Y-\mu_2|<1\}$，知选A。

本题考点：正态分布的基本性质和正态分布的标准化技巧。我们历次辅导班都讲“正态分布是天下最重要的分布”，而“标准化是正态分布的行之有效的重要技巧”。课的重点。例如 36 计（冲刺班）中第一计“ ”、强化班的、基础班的

三、解答题（共 94 分）

(15) （7 分）设 $f(x,y)=\dfrac{y}{1+xy}-\dfrac{1-y\sin\frac{\pi x}{y}}{\arctan x}, x>0, y>0$，求

（Ⅰ）$g(x)=\lim\limits_{y\to+\infty}f(x,y)$　　（Ⅱ）$\lim\limits_{x\to0^+}g(x)$。

【解析与点评】（Ⅰ）将 x 视为参数，$\lim\limits_{y\to+\infty}\dfrac{y}{1+xy}=\dfrac{1}{x}\quad(x>0)$，且 $\lim\limits_{y\to+\infty}y\sin\dfrac{\pi x}{y}=\pi x$

$(x>0)$，

于是 $g(x)=\lim\limits_{y\to+\infty}f(x,y)=\lim\limits_{y\to+\infty}\dfrac{y}{1+xy}-\dfrac{1}{\arctan x}\lim\limits_{y\to+\infty}(1-y\sin\dfrac{\pi x}{y})$

$$=\frac{1}{x}-\frac{1}{\arctan x}(1-\pi x)$$

（Ⅱ）$\lim\limits_{x\to0^+}g(x)=\lim\limits_{x\to0^+}[\dfrac{1}{x}-\dfrac{1-\pi x}{\arctan x}]$

上式极限是 $\infty-\infty$ 型未定式，首要和重要手段是通分。根据**水木艾迪 2006 考研数学 36 计之一，对 $\infty-\infty$ 分式极限采用程序化分析法 摸着石头过河：判断一步状态，确定一个方法，作出一步分析与计算。**

对本题而言，通分后，考虑**无穷小量的比较与替换，在可能的情况下运用罗必达法则，但之前应先做予处理。**

$$\lim_{x\to0^+}g(x)=\lim_{x\to0^+}\frac{\arctan x-x+\pi x^2}{x\arctan x}=\lim_{x\to0^+}\frac{\arctan x-1+\pi x^2}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{1+x^2}+2\pi x}{2x}=\lim_{x\to0^+}\frac{1+2\pi x(1+x^2)}{2x(1+x^2)}=0+\pi=\pi$$

参见水木艾迪 2006 考研数学 36 计之一，例 1-4，基础班例 4.36,4.37,4.39 等例题，以及百分训练营模拟试题数一地 4 题。

(16) （7 分）计算二重积分 $\iint\limits_D\sqrt{y^2-xy}\,dxdy$,其中 D 是由直线 $y=x$, $y=1$，$x=0$所围成的平面区域.

【解析与点评】积分区域是直角三角形，D 的不等式表示是

$$D=\{(x,y)|0\le y\le1,0\le x\le y\},$$

故 $$\iint\limits_D\sqrt{y^2-xy}\,dxdy=\int_0^1dy\int_0^y\sqrt{y^2-xy}\,dx=\int_0^1\sqrt{y}\,dy\int_0^y\sqrt{y-x}\,dx$$

$$=\int_0^1\sqrt{y}\left(\frac{-2}{3}\left(\sqrt{y-x}\right)^3\right)\Bigg|_{x=0}^{x=y}dy==\frac{2}{3}\int_0^1 y^2\,dy=\frac{2}{9}$$

这是很典型的二重积分计算题，几乎所有微积分参考书中都有。也可参见水木艾迪 2006 考研数学强化班讲义第十一讲例 17

(17) （10 分） 证明：当 $0<a<b<\pi$ 时，$b\sin b+2\cos b+\pi b>a\sin a+2\cos a+\frac{1}{\pi a}$

【解析与点评】此题属于水木艾迪 2006 考研数学冲刺班 36 计之五的典型例题，即移项做辅助函数，再利用值加增减性分析法是证明等式与不等式的重要手段和技巧。

做辅助函数： $f(x)=x\sin x+2\cos x+\pi x$

只需证明 $0<a<x<\pi$ 时 $f(x)$ 严格单调增加。

$$f'(x)=\sin x+x\cos x-2\sin x+\pi$$

$$=x\cos x-\sin x+\pi$$

$$f''(x)=\cos x-x\sin x-\cos x=-\sin x<0$$

于是 $f'(x)$ 严格单调减少，且 $f'(\pi)=\pi\cos\pi+\pi=0$ （终值）

因此 $0<a<x<\pi$ 时 $f'(x)>f'(\pi)=0$，即 $f(x)$ 严格单调增加。

令 $x=b$，得到 $f(b)>f(a)$。

参见水木艾迪 2006 考研数学冲刺班 36 计之五详细阐述的方法与例题，例 5-6，例 5-7，例 5-8，强化班第 2 讲例 31、34、38 等题。

(18) （8 分）在 XOY 坐标平面上,连续曲线 L 过点 $M(0,1)$ 其上任意点 $P(x,y)(x\neq 0)$ 处的切线低斜率与直线 OP 的斜率之差等于 ax （常数 $a>0$）

（Ⅰ）求 L 的方程:

（Ⅱ）当 L 与直线 $y=ax$ 所围成平面图形的面积为 $\frac{8}{3}$ 时,确定 a 的值.

【解析与点评】（Ⅰ)设 L 的方程为 $y=y(x)$。于是 $y(1)=0$。记 L 在点 $P(x,y)$ 处切线斜率为 $k=y'(x)$，直线 OP 的斜率 $k_1=\frac{y}{x}$。由题设知 $k-k_1=axx$。因此 $y'-\frac{y}{x}=a$

这表明 $y=y(x)$ 是下列一阶线性微分方程初值问题的特解：

$$\begin{cases} y'-\dfrac{y}{x}=ax, \\ y(1)=0 \end{cases}$$

方程的通解为 $y=e^{\int\frac{dx}{x}}[C+\int axe^{-\int\frac{dx}{x}}dx$

$$= x[C + a\int dx] = Cx + ax^2$$

令 $x=1$ 得 $C+a=0$，$C=-a$。故曲线 L 的方程为二次抛物线

$$y = ax(x-1)。$$

(Ⅱ) 曲线 L 与直线 $y=ax$ 的交点满足

$\begin{cases} y = ax(x-1) \\ y = ax \end{cases}$ ，$ax = ax(x-2) = 0$，解出两个交点 $(0,0)$ 与 $(2,2a)$。

曲线 L 与直线 $y=ax$ 所围成的平面图形面积为

$$S(a) = \int_0^2 [ax - ax(x-1)]dx = a\int_0^2 (2x - x^2)dx$$

$$= a(x^2 - \frac{x^3}{3})\Big|_0^2 = a(4 - \frac{8}{3}) = \frac{4}{3}a。$$

令 $S(a) = \frac{4}{3}a = \frac{8}{3}$ 得到常数 $a=2$。

本题为导数应用与定积分应用的简单综合题目，其题型可参见**水木艾迪 2006 考研数学强化班第 5 讲例 10、16、17，冲刺班 36 计之 8 例 8-2，基础班讲义例 75,例 7.9 等典型例题。**

(19)（10 分）试确定 A，B，C 的常数值，使 $e^x(1+Bx+Cx^2) = 1 + Ax + o(x^3)$ 其中 $o(x^3)$ 是当 $x \to 0$ 时比 x^3 的高阶无穷小。.

【解析与点评】 将 $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)$ 代入已知等式得

$$[1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)][1 + Bx + Cx^2] = 1 + Ax + o(x^3)$$

整理并比较两边同次幂函数得

$$1 + (B+1)x + (C + B + \frac{1}{2})x^2 + \left(\frac{B}{2} + C + \frac{1}{6}\right) + o(x^3) = 1 + Ax + o(x^3)$$

$B + 1 = A$ ①

$C + B + \frac{1}{2} = 0$ ②

$\frac{B}{2} + C + \frac{1}{6} = 0$ ③

②-③得 $\frac{B}{2} + \frac{1}{3} = 0$，$B = -\frac{2}{3}$，$A = \frac{1}{3}$，$C = \frac{1}{6}$。

参见清华大学出版社《考研通用教材》(考研数学应试导引与进阶) 微积分 (上) 例 6.48, 水木艾迪 2006 考研数学强化班第 1 讲例 40 等题。

(20) （13 分）设 4 维向量组 $\alpha_1 = (1+a, 1, 1, 1)^T$，$\alpha_2 = (2, 2+a, 2, 2)^T$，

$\alpha_3=(3,3,3+a,3)^T$，$\alpha_4=(4,4,4,4+a)^T$，问 a 为何值时 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性相关？当 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性相关时，求其一个极大线性无关组，并将其余向量用该极大线性无关组线性表出.

【解析与点评】本题是求向量组的极大线性无关组及向量的线性表示，给出的向量有一个参数，涉及参数的讨论。这里用到的分析方法和解题方法在我们的辅导班上都有重点辅导。只要将相关例题掌握了，这题就不难了。

【解】 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性相关 $\Leftrightarrow$ 行列式 $|\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4|=0$，

$$\begin{vmatrix}1+a & 2 & 3 & 4\\ 1 & 2+a & 3 & 4\\ 1 & 2 & 3+a & 4\\ 1 & 2 & 3 & 4+a\end{vmatrix}=a^3(a+10),$$

于是当 $a=0$ 或 $a=-10$ 时，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性相关.

当 $a=0$ 时，α_1 是 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 的一个极大线性无关组，此时，$\alpha_2=2\alpha_1$，$\alpha_3=3\alpha_1$，$\alpha_4=4\alpha_1$. 当 $a=-10$ 时，

$$\begin{pmatrix}-9 & 2 & 3 & 4\\ 1 & -8 & 3 & 4\\ 1 & 2 & -7 & 4\\ 1 & 2 & 3 & -6\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & -6\\ 0 & -10 & 0 & 10\\ 0 & 0 & -10 & 10\\ 0 & 20 & 30 & -50\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & -6\\ 0 & 1 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

于是，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 的一个极大线性无关组，$\alpha_4=-\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3$.

（21）（13 分）设 3 阶实对称矩阵 A 的各行元素之和均为 3，向量 $\alpha_1=(-1,2,-1)^T$，$\alpha_2=(0,-1,1)^T$ 是线性方程组 $Ax=0$ 的两个解，

（Ⅰ）求 A 的特征值与特征向量；

（Ⅱ）求正交矩阵 Q 和对角矩阵 Λ，使得 $Q^TAQ=\Lambda$.

（Ⅲ）求 A 及 $\left(A-\frac{3}{2}E\right)^6$，其中 E 为 3 阶单位矩阵.

【解析与点评】本题考查实对称矩阵的性质，矩阵的特征值特征向量，施密特正交化，矩阵的相似对角化，以及矩阵的运算等.这里比数学一的 21 题多了一问，求矩阵 A。这在我们辅导班上都讲过相应的例题。所以参加过我们辅导班的同学对这类题都不会陌生的。

[解] （Ⅰ） 由题设 A 的行和均为 3，有

$$A\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\3\\3\end{pmatrix}=3\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},$$

所以，$\alpha_3=\left(1,1,1\right)^T$ 是 A 的属于特征值 3 的特征向量.

又 α_1,α_2 是 $Ax=0$ 的线性无关的两个解，即 α_1,α_2 是 A 的属于特征值 0 的两个线性无关的特征向量．由此可知，特征值 0 的代数重数不小于 2.

综合之，A 的特征值为 0，0，3． 属于 0 的特征向量为 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2$，其中 k_1,k_2 是不全为零的常数；属于３的特征向量为 $k\alpha_3$，其中 k 是非零常数.

（Ⅱ）将 α_1,α_2 正交化，

令 $\beta_1=\alpha_1$， $\beta_2=\alpha_2-\dfrac{(\alpha_2,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1=\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}-\dfrac{-3}{6}\begin{pmatrix}-1\\2\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\dfrac{1}{2}\\0\\\dfrac{1}{2}\end{pmatrix}$,

单位化

$\gamma_1=\dfrac{\beta_1}{|\beta_1|}=\dfrac{1}{\sqrt6}\left(-1,2,-1\right)^T$，$\gamma_2=\dfrac{\beta_2}{|\beta_2|}=\dfrac{1}{\sqrt2}\left(-1,0\,1\right)^T$，$\gamma_3=\dfrac{\beta_3}{|\beta_3|}=\dfrac{1}{\sqrt3}\left(1,1,1\right)^T$.

令 $Q=\begin{pmatrix}\dfrac{-1}{\sqrt6}&\dfrac{-1}{\sqrt2}&\dfrac{1}{\sqrt3}\\\dfrac{2}{\sqrt6}&0&\dfrac{1}{\sqrt3}\\\dfrac{-1}{\sqrt6}&\dfrac{1}{\sqrt2}&\dfrac{1}{\sqrt3}\end{pmatrix}$，$\Lambda=\begin{pmatrix}0&&\\&0&\\&&3\end{pmatrix}$，则有 $Q^TAQ=\begin{pmatrix}0&&\\&0&\\&&3\end{pmatrix}$.

（Ⅲ）由（Ⅱ），$A=Q\Lambda Q^T$，其中 $Q=\begin{pmatrix}\dfrac{-1}{\sqrt6}&\dfrac{-1}{\sqrt2}&\dfrac{1}{\sqrt3}\\\dfrac{2}{\sqrt6}&0&\dfrac{1}{\sqrt3}\\\dfrac{-1}{\sqrt6}&\dfrac{1}{\sqrt2}&\dfrac{1}{\sqrt3}\end{pmatrix}$，$\Lambda=\begin{pmatrix}0&&\\&0&\\&&3\end{pmatrix}$,

于是

$$A=\begin{pmatrix}\frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\\ \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}}\\ \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\\sqrt{3}&\sqrt{3}&\sqrt{3}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}.$$

$$\left(A-\frac{3}{2}E\right)^6=\left(Q\Lambda Q^T-\frac{3}{2}E\right)^6=\left(Q\frac{3}{2}\begin{pmatrix}-1&&\\&-1&\\&&1\end{pmatrix}Q^T\right)^6$$

$$=\left(\frac{3}{2}\right)^6 Q\begin{pmatrix}-1&&\\&-1&\\&&1\end{pmatrix}^6 Q^T=\left(\frac{3}{2}\right)^6 E=\frac{729}{64}E$$

（22）（13 分）设二维随机变量（X,Y）的概率分布为：

X \ Y	-1	0	1
-1	a	0	0.2
0	0.1	b	0.2
1	0	0.1	c

其中a,b,c为常数，且X的数学期望$EX=-0.2$，$P\{Y\le 0\mid X\le 0\}=0.5$，记$Z=X+Y$

求： (I) a,b,c的值；(II) Z的概率分布；(III) $P\{X=Z\}$

【解析与点评】

（Ⅰ） X 的边缘分布为

X	-1	0	1
P	a+0.2	b+0.3	c+0.1

$EX=-(a+0.2)+(c+0.1)=-0.2$

$$P\{Y\le 0\mid X\le 0\}=\frac{P\{X\le 0,Y\le 0\}}{P\{X\le 0\}}=\frac{a+b+0.1}{a+b+0.5}=0.5$$

$a+b+c+0.2+0.2+0.1+0.1=1$

所以：$a=0.2,b=0.1,c=0.1$

（Ⅱ）

Z	-2	-1	0	1	2
P	0.2	0.1	0.3	0.3	0.1

（Ⅲ） $P\{X=Z\}=P\{Y=0\}=0+0.1+0.1=0.2$

本题考点：二维离散型分布的基本概念与基本性质；条件分布（概率）及随机变量和的分布概念。我们历次辅导班都讲这类典型题的两大主要依据和典型解法。例如 36 计（冲

刺班）中例 1.2.6-1.2.8, 及求离散型 p_{ij} 分量的函数分布的例 1.5.9，1.5.11 等，强化班例 2.3.2-2.3.7 及例 3.3.9，3.3.10。

(23) (13 分) 设随机变量 X 的概率密度为 $f_X(x)=\begin{cases}1/2, & -1<x<0\\ 1/4, & 0\le x<2\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$，令 $Y=X^2$，$F(x,y)$ 为二维随机变量 (X,Y) 的分布函数。

(I) 求 Y 的概率密度 $f_Y(y)$；(Ⅱ) 求 $\mathrm{Cov}(X,Y)$；(Ⅲ) 求 $F(-\frac{1}{2},4)$

【解析与点评】【解法 1】 (I) $y=x^2$ 的反函数有两支，**水木艾迪冲刺班例 1.5.3** 知

$$f_Y(y)=\frac{1}{2\sqrt{y}}[f_Y(\sqrt{y})+f_Y(-\sqrt{y})]$$

当 $-1<x<2\Rightarrow 0<y<4$， 且 $0<y<1\Rightarrow 0<\sqrt{y}<1$ 而 $-1<-\sqrt{y}<0$，此时

$$f_Y(y)=\frac{1}{2\sqrt{y}}[\frac{1}{4}+\frac{1}{2}]=\frac{3}{8\sqrt{y}}$$

且 $1<y<4\Rightarrow 1<\sqrt{y}<2$ 而 $-2<-\sqrt{y}<-1$，此时

$$f_Y(y)=\frac{1}{2\sqrt{y}}[\frac{1}{4}+0]=\frac{1}{8\sqrt{y}}。$$

综上 $$f_Y(y)=F_Y'(y)=\begin{cases}\frac{3}{8\sqrt{y}}, & 0<y<1\\ \frac{1}{8\sqrt{y}}, & 1\le y<4\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

(Ⅱ) $\mathrm{Cov}(X,Y)=E(XY)-EX\ EY=EX^3-EX\ EX^2$

$$EX=\int_{-1}^{0}x\cdot\frac{1}{2}dx+\int_{0}^{2}x\cdot\frac{1}{4}dx=\frac{1}{4}\text{；}EX^2=\int_{-1}^{0}x^2\cdot\frac{1}{2}dx+\int_{0}^{2}x^2\cdot\frac{1}{4}dx=\frac{5}{6}\text{；}$$

$EX^3=\int_{-1}^{0}x^3\cdot\frac{1}{2}dx+\int_{0}^{2}x^3\cdot\frac{1}{4}dx=\frac{7}{8}$，所以 $Cov(X,Y)=\frac{7}{8}-\frac{1}{4}\cdot\frac{5}{6}=\frac{2}{3}$。

(III)

$$F(-\frac{1}{2},4)=P(X\le-\frac{1}{2},Y\le 4)$$

$$=P(X\le -\frac{1}{2}, X^2\le 4)=P(X\le -\frac{1}{2}, -2\le X\le 2)=P(-2\le X\le -\frac{1}{2})$$

$$=P(-1\le X\le -\frac{1}{2})=\frac{1}{2}[L(-1,-\frac{1}{2})/L(-1,0)]=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$$

其中 L(a,b)表示区间(a,b)的长度。

【解法 2】 （I） $F_Y(y)=P(Y\le y)=P(X^2\le y)$

$$F_Y(y)\overset{0\le y<1}{=\!=\!=}P(-\sqrt{y}\le X\le\sqrt{y})=\int_{-\sqrt{y}}^{0}\frac{1}{2}dx+\int_{0}^{\sqrt{y}}\frac{1}{4}dx=\frac{3}{4}\sqrt{y}\text{；}$$

而 $F(y)\overset{1\le y<4}{=\!=\!=}P(-\sqrt{y}\le X\le\sqrt{y})=\int_{-1}^{0}\frac{1}{2}dx+\int_{0}^{\sqrt{y}}\frac{1}{4}dx=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\sqrt{y}$。

所以 $f_Y(y)=F_Y'(y)=\begin{cases}\dfrac{3}{8\sqrt{y}}, & 0<y<1\\ \dfrac{1}{8\sqrt{y}}, & 1\le y<4\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$

（III） $F(-\frac{1}{2},4)=P(X\le -\frac{1}{2}, Y\le 4)$

$$=P(X\le -\frac{1}{2}, X^2\le 4)=P(X\le -\frac{1}{2}, -2\le X\le 2)=P(-2\le X\le -\frac{1}{2})$$

$$=\int_{-1}^{-\frac{1}{2}}\frac{1}{2}dx=\frac{1}{4}\text{。}$$

本题考点：随机变量重要函数的分布；均匀分布的基本概念及联合分布函数的基本概念。它们都是我们辅导班历次讲课重点。例如 36 计（冲刺班）例 1.5.3 求连续型 $Y=X^2$ 一般密度公式及特别情形的计算，强化班的为例 3.3.4.

解法 2 是从联合分布函数的最基本的概率定义入手，对 y 进行适当的讨论得到。这也是辅导班上强调的基本题型。