

2005 年数学一试题分析、详解和评注

一、填空题 (本题共 6 小题, 每小题 4 分, 满分 24 分. 把答案填在题中横线上)

(1) 曲线 $y = \frac{x^2}{2x+1}$ 的斜渐近线方程为 $y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}$.

【分析】 本题属基本题型, 直接用斜渐近线方程公式进行计算即可.

【详解】 因为 $a = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{2x^2 + x} = \frac{1}{2}$,

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - ax] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-x}{2(2x+1)} = -\frac{1}{4},$$

于是所求斜渐近线方程为 $y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}$.

【评注】 如何求垂直渐近线、水平渐近线和斜渐近线, 是基本要求, 应熟练掌握. 这里应注意两点: 1) 当存在水平渐近线时, 不需要再求斜渐近线; 2) 若当 $x \rightarrow \infty$ 时, 极限 $a = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}$ 不存在, 则应进一步讨论 $x \rightarrow +\infty$ 或 $x \rightarrow -\infty$ 的情形, 即在右或左侧是否存在斜渐近线.

完全类似例题见《数学复习指南》(理工类) P.192 【例 7.32】

(2) 微分方程 $xy' + 2y = x \ln x$ 满足 $y(1) = -\frac{1}{9}$ 的解为 $y = \frac{1}{3}x \ln x - \frac{1}{9}x$.

【分析】 直接套用一阶线性微分方程 $y' + P(x)y = Q(x)$ 的通解公式:

$$y = e^{-\int P(x)dx} \left[\int Q(x)e^{\int P(x)dx} dx + C \right],$$

再由初始条件确定任意常数即可.

【详解】 原方程等价于

$$y' + \frac{2}{x}y = \ln x,$$

于是通解为 $y = e^{-\int \frac{2}{x}dx} \left[\int \ln x \cdot e^{\int \frac{2}{x}dx} dx + C \right] = \frac{1}{x^2} \cdot \left[\int x^2 \ln x dx + C \right]$

$$= \frac{1}{3}x \ln x - \frac{1}{9}x + C \frac{1}{x^2},$$

由 $y(1) = -\frac{1}{9}$ 得 $C=0$, 故所求解为 $y = \frac{1}{3}x \ln x - \frac{1}{9}x$.

【评注】 本题虽属基本题型, 但在用相关公式时应注意先化为标准型. 另外, 本题也可如下求解: 原方程可化为

$$x^2 y' + 2xy = x^2 \ln x, \text{ 即 } [x^2 y]' = x^2 \ln x, \text{ 两边积分得}$$

$$x^2 y = \int x^2 \ln x dx = \frac{1}{3} x^3 \ln x - \frac{1}{9} x^3 + C,$$

再代入初始条件即可得所求解为 $y = \frac{1}{3} x \ln x - \frac{1}{9} x$.

完全类似公式见《数学复习指南》(理工类) P.154

(3) 设函数 $u(x, y, z) = 1 + \frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{12} + \frac{z^2}{18}$, 单位向量 $\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{3}}\{1, 1, 1\}$, 则

$$\left. \frac{\partial u}{\partial n} \right|_{(1,2,3)} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

【分析】 函数 $u(x, y, z)$ 沿单位向量 $\vec{n} = \{\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma\}$ 的方向导数为:

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial u}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial u}{\partial z} \cos \gamma$$

因此, 本题直接用上述公式即可.

【详解】 因为 $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{x}{3}$, $\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{y}{6}$, $\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{z}{9}$, 于是所求方向导数为

$$\left. \frac{\partial u}{\partial n} \right|_{(1,2,3)} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

【评注】 本题若 $\vec{n} = \{m, n, l\}$ 非单位向量, 则应先将其单位化, 从而得方向余弦为:

$$\cos \alpha = \frac{m}{\sqrt{m^2 + n^2 + l^2}}, \cos \beta = \frac{n}{\sqrt{m^2 + n^2 + l^2}}, \cos \gamma = \frac{l}{\sqrt{m^2 + n^2 + l^2}}.$$

完全类似例题见《数学复习指南》(理工类) P.330 【例 12.30】

(4) 设 Ω 是由锥面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 与半球面 $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$ 围成的空间区域, Σ 是 Ω 的整个边界的外侧, 则 $\iint_{\Sigma} x dy dz + y dz dx + z dx dy = 2\pi(1 - \frac{\sqrt{2}}{2})R^3$.

【分析】 本题 Σ 是封闭曲面且取外侧, 自然想到用高斯公式转化为三重积分, 再用球面(或柱面)坐标进行计算即可.

【详解】
$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma} x dy dz + y dz dx + z dx dy &= \iiint_{\Omega} 3 dx dy dz \\ &= 3 \int_0^R \rho^2 d\rho \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin \varphi d\varphi \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi(1 - \frac{\sqrt{2}}{2})R^3. \end{aligned}$$

【评注】 本题属基本题型，不论是用球面坐标还是用柱面坐标进行计算，均应特别注意计算的准确性，主要考查基本的计算能力。

完全类似例题见《数学复习指南》（理工类）P.325【例 12.22】

(5) 设 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 均为 3 维列向量，记矩阵

$$A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3), \quad B = (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_1 + 2\alpha_2 + 4\alpha_3, \alpha_1 + 3\alpha_2 + 9\alpha_3),$$

如果 $|A| = 1$ ，那么 $|B| = \underline{\quad 2 \quad}$.

【分析】 将 B 写成用 A 右乘另一矩阵的形式，再用方阵相乘的行列式性质进行计算即可.

【详解】 由题设，有

$$B = (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_1 + 2\alpha_2 + 4\alpha_3, \alpha_1 + 3\alpha_2 + 9\alpha_3)$$

$$= (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{bmatrix},$$

于是有 $|B| = |A| \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{vmatrix} = 1 \times 2 = 2.$

【评注】 本题相当于矩阵 B 的列向量组可由矩阵 A 的列向量组线性表示，关键是将其转化为用矩阵乘积形式表示。一般地，若

$$\beta_1 = a_{11}\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + \cdots + a_{1n}\alpha_n,$$

$$\beta_2 = a_{21}\alpha_1 + a_{22}\alpha_2 + \cdots + a_{2n}\alpha_n,$$

$$\cdots \cdots \cdots \cdots$$

$$\beta_m = a_{m1}\alpha_1 + a_{m2}\alpha_2 + \cdots + a_{mn}\alpha_n,$$

则有
$$[\beta_1 \quad \beta_2 \quad \cdots \quad \beta_m] = [\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n] \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

完全类似例题见《数学复习指南》（理工类）P.356【例 1.5】

(6) 从数 1,2,3,4 中任取一个数，记为 X，再从 1,2,...,X 中任取一个数，记为 Y，则

$$P\{Y = 2\} = \underline{\frac{13}{48}}.$$

【分析】 本题涉及到两次随机试验，想到用全概率公式，且第一次试验的各种两两互不相容的结果即为完备事件组或样本空间的划分。

$$\begin{aligned} \text{【详解】 } P\{Y=2\} &= P\{X=1\}P\{Y=2|X=1\} + P\{X=2\}P\{Y=2|X=2\} \\ &\quad + P\{X=3\}P\{Y=2|X=3\} + P\{X=4\}P\{Y=2|X=4\} \\ &= \frac{1}{4} \times (0 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}) = \frac{13}{48}. \end{aligned}$$

【评注】 全概率公式综合考查了加法公式、乘法公式和条件概率，这类题型一直都是考查的重点。

完全类似例题见《数学复习指南》(理工类) P.492 【例 1.32】

二、选择题 (本题共 8 小题，每小题 4 分，满分 32 分。每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求，把所选项前的字母填在题后的括号内)

(7) 设函数 $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1+|x|^{3n}}$ ，则 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内

- (A) 处处可导. (B) 恰有一个不可导点.
(C) 恰有两个不可导点. (D) 至少有三个不可导点. [C]

【分析】 先求出 $f(x)$ 的表达式，再讨论其可导情形。

【详解】 当 $|x| < 1$ 时， $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1+|x|^{3n}} = 1$ ；

当 $|x| = 1$ 时， $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1+1} = 1$ ；

当 $|x| > 1$ 时， $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} |x|^3 \left(\frac{1}{|x|^{3n}} + 1 \right)^{\frac{1}{n}} = |x|^3$ 。

即 $f(x) = \begin{cases} -x^3, & x < -1, \\ 1, & -1 \leq x \leq 1, \\ x^3, & x > 1. \end{cases}$ 可见 $f(x)$ 仅在 $x = \pm 1$ 时不可导，故应选(C)。

【评注】 本题综合考查了数列极限和导数概念两个知识点。

完全类似例题见《数学复习指南》(理工类) P.56 【例 2.20】

(8) 设 $F(x)$ 是连续函数 $f(x)$ 的一个原函数，“ $M \Leftrightarrow N$ ”表示“ M 的充分必要条件是 N ”，则必有

- (A) $F(x)$ 是偶函数 $\Leftrightarrow f(x)$ 是奇函数.
(B) $F(x)$ 是奇函数 $\Leftrightarrow f(x)$ 是偶函数.
(C) $F(x)$ 是周期函数 $\Leftrightarrow f(x)$ 是周期函数.
(D) $F(x)$ 是单调函数 $\Leftrightarrow f(x)$ 是单调函数. [A]

【分析】 本题可直接推证，但最简便的方法还是通过反例用排除法找到答案。

【详解】 方法一：任一原函数可表示为 $F(x) = \int_0^x f(t)dt + C$ ，且 $F'(x) = f(x)$ 。

当 $F(x)$ 为偶函数时，有 $F(-x) = F(x)$ ，于是 $F'(-x) \cdot (-1) = F'(x)$ ，即 $-f(-x) = f(x)$ ，

也即 $f(-x) = -f(x)$ ，可见 $f(x)$ 为奇函数；反过来，若 $f(x)$ 为奇函数，则 $\int_0^x f(t)dt$ 为偶函数，从而 $F(x) = \int_0^x f(t)dt + C$ 为偶函数，可见(A)为正确选项。

方法二：令 $f(x)=1$ ，则取 $F(x)=x+1$ ，排除(B)、(C)；令 $f(x)=x$ ，则取 $F(x)=\frac{1}{2}x^2$ ，排除(D)；故应选(A)。

【评注】 函数 $f(x)$ 与其原函数 $F(x)$ 的奇偶性、周期性和单调性已多次考查过。请读者思考 $f(x)$ 与其原函数 $F(x)$ 的有界性之间有何关系？

完全类似例题见《数学复习指南》(理工类) P.10 **【例 1.5~1.7】**

(9) 设函数 $u(x, y) = \varphi(x+y) + \varphi(x-y) + \int_{x-y}^{x+y} \psi(t)dt$ ，其中函数 φ 具有二阶导数， ψ 具有一阶导数，则必有

- (A) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$. (B) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$.
 (C) $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$. (D) $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$. [B]

【分析】 先分别求出 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ 、 $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ 、 $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$ ，再比较答案即可。

【详解】 因为 $\frac{\partial u}{\partial x} = \varphi'(x+y) + \varphi'(x-y) + \psi(x+y) - \psi(x-y)$,

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \varphi'(x+y) - \varphi'(x-y) + \psi(x+y) + \psi(x-y),$$

于是 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \varphi''(x+y) + \varphi''(x-y) + \psi'(x+y) - \psi'(x-y)$,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \varphi''(x+y) - \varphi''(x-y) + \psi'(x+y) + \psi'(x-y),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \varphi''(x+y) + \varphi''(x-y) + \psi'(x+y) - \psi'(x-y),$$

可见有 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ ，应选(B)。

【评注】 本题综合考查了复合函数求偏导和隐函数求偏导以及高阶偏导的计算。作为做题技巧，也可取 $\varphi(t) = t^2, \psi(t) = 1$ ，则 $u(x, y) = 2x^2 + 2y^2 + 2y$ ，容易验算只有

$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ 成立, 同样可找到正确选项(B).

完全类似例题见《数学复习指南》(理工类) P.267 【例 10.16】及习题十(第 11 题)

(10) 设有三元方程 $xy - z \ln y + e^{xz} = 1$, 根据隐函数存在定理, 存在点(0,1,1)的一个邻域, 在此邻域内该方程

- (A) 只能确定一个具有连续偏导数的隐函数 $z=z(x,y)$.
 (B) 可确定两个具有连续偏导数的隐函数 $x=x(y,z)$ 和 $z=z(x,y)$.
 (C) 可确定两个具有连续偏导数的隐函数 $y=y(x,z)$ 和 $z=z(x,y)$.
 (D) 可确定两个具有连续偏导数的隐函数 $x=x(y,z)$ 和 $y=y(x,z)$.

[D]

【分析】 本题考查隐函数存在定理, 只需令 $F(x,y,z)=xy - z \ln y + e^{xz} - 1$, 分别求出三个偏导数 F_z, F_x, F_y , 再考虑在点(0,1,1)处哪个偏导数不为 0, 则可确定相应的隐函数.

【详解】 令 $F(x,y,z)=xy - z \ln y + e^{xz} - 1$, 则

$$F'_x = y + e^{xz} z, \quad F'_y = x - \frac{z}{y}, \quad F'_z = -\ln y + e^{xz} x,$$

且 $F'_x(0,1,1) = 2$, $F'_y(0,1,1) = -1$, $F'_z(0,1,1) = 0$. 由此可确定相应的隐函数 $x=x(y,z)$ 和 $y=y(x,z)$. 故应选(D).

【评注】隐函数存在定理是首次直接考查, 有部分考生感到较生疏. 实际上本题也可从隐函数求偏导公式着手分析: 若偏导表达式有意义, 相应偏导数也就存在.

定理公式见《数学复习指南》(理工类) P.270

(11) 设 λ_1, λ_2 是矩阵 A 的两个不同的特征值, 对应的特征向量分别为 α_1, α_2 , 则 $\alpha_1, A(\alpha_1 + \alpha_2)$ 线性无关的充分必要条件是

- (A) $\lambda_1 \neq 0$. (B) $\lambda_2 \neq 0$. (C) $\lambda_1 = 0$. (D) $\lambda_2 = 0$. [B]

【分析】 讨论一组抽象向量的线性无关性, 可用定义或转化为求其秩即可.

【详解】 方法一: 令 $k_1 \alpha_1 + k_2 A(\alpha_1 + \alpha_2) = 0$, 则

$$k_1 \alpha_1 + k_2 \lambda_1 \alpha_1 + k_2 \lambda_2 \alpha_2 = 0, \quad (k_1 + k_2 \lambda_1) \alpha_1 + k_2 \lambda_2 \alpha_2 = 0.$$

由于 α_1, α_2 线性无关, 于是有

$$\begin{cases} k_1 + k_2 \lambda_1 = 0, \\ k_2 \lambda_2 = 0. \end{cases}$$

当 $\lambda_2 \neq 0$ 时, 显然有 $k_1 = 0, k_2 = 0$, 此时 $\alpha_1, A(\alpha_1 + \alpha_2)$ 线性无关; 反过来, 若 $\alpha_1, A(\alpha_1 + \alpha_2)$ 线性无关, 则必然有 $\lambda_2 \neq 0$ (否则, α_1 与 $A(\alpha_1 + \alpha_2) = \lambda_1 \alpha_1$ 线性相关), 故应选(B).

方法二: 由于 $[\alpha_1, A(\alpha_1 + \alpha_2)] = [\alpha_1, \lambda_1 \alpha_1 + \lambda_2 \alpha_2] = [\alpha_1, \alpha_2] \begin{bmatrix} 1 & \lambda_1 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$,

可见 $\alpha_1, A(\alpha_1 + \alpha_2)$ 线性无关的充要条件是 $\begin{vmatrix} 1 & \lambda_1 \\ 0 & \lambda_2 \end{vmatrix} = \lambda_2 \neq 0$. 故应选(B).

【评注】 本题综合考查了特征值、特征向量和线性相关与线性无关的概念. 完全类似例题见《数学复习指南》(理工类) P.407 【例 3.17】

(12) 设 A 为 n ($n \geq 2$) 阶可逆矩阵, 交换 A 的第 1 行与第 2 行得矩阵 B , A^*, B^* 分别为 A, B 的伴随矩阵, 则

- (A) 交换 A^* 的第 1 列与第 2 列得 B^* . (B) 交换 A^* 的第 1 行与第 2 行得 B^* .
(C) 交换 A^* 的第 1 列与第 2 列得 $-B^*$. (D) 交换 A^* 的第 1 行与第 2 行得 $-B^*$.

[C]

【分析】 本题考查初等变换的概念与初等矩阵的性质, 只需利用初等变换与初等矩阵的关系以及伴随矩阵的性质进行分析即可.

【详解】 由题设, 存在初等矩阵 E_{12} (交换 n 阶单位矩阵的第 1 行与第 2 行所得), 使得 $E_{12}A = B$, 于是 $B^* = (E_{12}A)^* = A^*E_{12}^* = A^*|E_{12}| \cdot E_{12}^{-1} = -A^*E_{12}$, 即

$A^*E_{12} = -B^*$, 可见应选(C).

【评注】 注意伴随矩阵的运算性质:

$$AA^* = A^*A = |A|E, \text{ 当 } A \text{ 可逆时, } A^* = |A|A^{-1},$$

$$(AB)^* = B^*A^*.$$

完全类似例题及性质见《数学复习指南》(理工类) P.381 【例 2.14, 例 2.29】

(13) 设二维随机变量 (X, Y) 的概率分布为

$X \backslash Y$	0	1
0	0.4	a
1	b	0.1

已知随机事件 $\{X = 0\}$ 与 $\{X + Y = 1\}$ 相互独立, 则

- (A) $a=0.2, b=0.3$ (B) $a=0.4, b=0.1$

(C) $a=0.3, b=0.2$ (D) $a=0.1, b=0.4$ [B]

【分析】 首先所有概率求和为 1, 可得 $a+b=0.5$, 其次, 利用事件的独立性又可得一等形式, 由此可确定 a, b 的取值.

【详解】 由题设, 知 $a+b=0.5$

又事件 $\{X=0\}$ 与 $\{X+Y=1\}$ 相互独立, 于是有

$$P\{X=0, X+Y=1\} = P\{X=0\}P\{X+Y=1\},$$

即 $a=(0.4+a)(a+b)$, 由此可解得 $a=0.4, b=0.1$, 故应选(B).

【评注】 本题考查二维随机变量分布律的性质和独立随机事件的概念, 均为大纲要求的基本内容.

完全类似例题见《数学复习指南》(理工类) P.528 【习题二, 1. (9)】

(14) 设 $X_1, X_2, \dots, X_n (n \geq 2)$ 为来自总体 $N(0,1)$ 的简单随机样本, \bar{X} 为样本均值, S^2 为样本方差, 则

- (A) $n\bar{X} \sim N(0,1)$ (B) $nS^2 \sim \chi^2(n)$.
 (C) $\frac{(n-1)\bar{X}}{S} \sim t(n-1)$ (D) $\frac{(n-1)X_1^2}{\sum_{i=2}^n X_i^2} \sim F(1, n-1)$. [D]

【分析】 利用正态总体抽样分布的性质和 χ^2 分布、t 分布及 F 分布的定义进行讨论即可.

【详解】 由正态总体抽样分布的性质知, $\frac{\bar{X}-0}{1/\sqrt{n}} = \sqrt{n}\bar{X} \sim N(0,1)$, 可排除(A);

又 $\frac{\bar{X}-0}{S/\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{n}\bar{X}}{S} \sim t(n-1)$, 可排除(C); 而 $\frac{(n-1)S^2}{1^2} = (n-1)S^2 \sim \chi^2(n-1)$, 不能断定(B)是正确选项.

因为 $X_1^2 \sim \chi^2(1)$, $\sum_{i=2}^n X_i^2 \sim \chi^2(n-1)$, 且 $X_1^2 \sim \chi^2(1)$ 与 $\sum_{i=2}^n X_i^2 \sim \chi^2(n-1)$ 相互独立, 于是

$$\frac{X_1^2/1}{\sum_{i=2}^n X_i^2 / (n-1)} = \frac{(n-1)X_1^2}{\sum_{i=2}^n X_i^2} \sim F(1, n-1). \text{ 故应选(D).}$$

【评注】 正态总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ 的三个抽样分布: $\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$ 、

$$\frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1), \quad \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1) \text{ 是常考知识点, 应当牢记.}$$

完全类似例题见《数学复习指南》(理工类) P.575 【习题五, 2.(3)】

三、解答题(本题共 9 小题, 满分 94 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.)

(15) (本题满分 11 分)

设 $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq \sqrt{2}, x \geq 0, y \geq 0\}$, $[1 + x^2 + y^2]$ 表示不超过 $1 + x^2 + y^2$ 的最

大整数. 计算二重积分 $\iint_D xy[1 + x^2 + y^2] dx dy$.

【分析】 首先应设法去掉取整函数符号, 为此将积分区域分为两部分即可.

【详解】 令 $D_1 = \{(x, y) \mid 0 \leq x^2 + y^2 < 1, x \geq 0, y \geq 0\}$,

$$D_2 = \{(x, y) \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq \sqrt{2}, x \geq 0, y \geq 0\}.$$

$$\begin{aligned} \text{则 } \iint_D xy[1 + x^2 + y^2] dx dy &= \iint_{D_1} xy dx dy + 2 \iint_{D_2} xy dx dy \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta \cos \theta d\theta \int_0^1 r^3 dr + 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta \cos \theta d\theta \int_1^{\sqrt{2}} r^3 dr \\ &= \frac{1}{8} + \frac{3}{4} = \frac{7}{8}. \end{aligned}$$

【评注】 对于二重积分(或三重积分)的计算问题, 当被积函数为分段函数时应利用积分的可加性分区域积分. 而实际考题中, 被积函数经常为隐含的分段函数, 如取绝对值函数 $|f(x, y)|$ 、取极值函数 $\max\{f(x, y), g(x, y)\}$ 以及取整函数 $[f(x, y)]$ 等等.

完全类似例题见《数学复习指南》(理工类) P.295 【例 11.18~19】

(16) (本题满分 12 分)

求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} (1 + \frac{1}{n(2n-1)}) x^{2n}$ 的收敛区间与和函数 $f(x)$.

【分析】 先求收敛半径, 进而可确定收敛区间. 而和函数可利用逐项求导得到.

【详解】 因为 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)(2n+1)+1}{(n+1)(2n+1)} \square \frac{n(2n-1)}{n(2n-1)+1} = 1$, 所以当 $x^2 < 1$ 时, 原级数绝

对收敛, 当 $x^2 > 1$ 时, 原级数发散, 因此原级数的收敛半径为 1, 收敛区间为 $(-1, 1)$

$$\text{记 } S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n(2n-1)} x^{2n}, x \in (-1, 1),$$

$$\text{则 } S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} x^{2n-1}, x \in (-1, 1),$$

$$S''(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} x^{2n-2} = \frac{1}{1+x^2}, x \in (-1, 1).$$

由于 $S(0) = 0, S'(0) = 0,$

$$\text{所以 } S'(x) = \int_0^x S''(t) dt = \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt = \arctan x,$$

$$S(x) = \int_0^x S'(t) dt = \int_0^x \arctan t dt = x \arctan x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2).$$

$$\text{又 } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} x^{2n} = \frac{x^2}{1+x^2}, x \in (-1, 1),$$

$$\text{从而 } f(x) = 2S(x) + \frac{x^2}{1+x^2}$$

$$= 2x \arctan x - \ln(1+x^2) + \frac{x^2}{1+x^2}, x \in (-1, 1).$$

【评注】 本题求收敛区间是基本题型，应注意收敛区间一般只开区间。而幂级数求和尽量将其转化为形如 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ 或 $\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}$ 幂级数，再通过逐项求导或逐项积分求出其和函数。

完全类似例题见《数学复习指南》（理工类）P.225【例 8.26】

(17) (本题满分 11 分)

如图，曲线 C 的方程为 $y=f(x)$ ，点(3,2)是它的一个拐点，直线 l_1 与 l_2 分别是曲线 C 在点(0,0)与(3,2)处的切线，其交点为(2,4)。设函数 $f(x)$ 具有三阶连续导数，计算定积分 $\int_0^3 (x^2+x)f'''(x)dx$ 。

【分析】 题设图形相当于已知 $f(x)$ 在 $x=0$ 的函数值与导数值，在 $x=3$ 处的函数值及一阶、二阶导数值。

【详解】 由题设图形知， $f(0)=0, f'(0)=2; f(3)=2, f'(3)=-2, f''(3)=0$ 。

由分部积分，知

$$\begin{aligned} \int_0^3 (x^2+x)f'''(x)dx &= \int_0^3 (x^2+x)df''(x) = (x^2+x)f''(x) \Big|_0^3 - \int_0^3 f''(x)(2x+1)dx \\ &= -\int_0^3 (2x+1)df'(x) = -(2x+1)f'(x) \Big|_0^3 + 2\int_0^3 f'(x)dx \\ &= 16 + 2[f(3) - f(0)] = 20. \end{aligned}$$

【评注】 本题 $f(x)$ 在两个端点的函数值及导数值通过几何图形给出，题型比较新颖，

综合考查了导数的几何意义和定积分的计算. 另外, 值得注意的是, 当被积函数含有抽象函数的导数时, 一般优先考虑用分部积分.

完全类似例题见《数学复习指南》(理工类) P.118 【例 4.36, 4.30】

(18) (本题满分 12 分)

已知函数 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, 在 $(0, 1)$ 内可导, 且 $f(0)=0, f(1)=1$. 证明:

(I) 存在 $\xi \in (0, 1)$, 使得 $f(\xi) = 1 - \xi$;

(II) 存在两个不同的点 $\eta, \zeta \in (0, 1)$, 使得 $f'(\eta)f'(\zeta) = 1$.

【分析】第一部分显然用闭区间上连续函数的介值定理; 第二部分为双介值问题, 可考虑用拉格朗日中值定理, 但应注意利用第一部分已得结论.

【详解】(I) 令 $F(x) = f(x) - 1 + x$, 则 $F(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, 且 $F(0) = -1 < 0, F(1) = 1 > 0$, 于是由介值定理知, 存在 $\xi \in (0, 1)$, 使得 $F(\xi) = 0$, 即 $f(\xi) = 1 - \xi$.

(II) 在 $[0, \xi]$ 和 $[\xi, 1]$ 上对 $f(x)$ 分别应用拉格朗日中值定理, 知存在两个不同的点

$$\eta \in (0, \xi), \zeta \in (\xi, 1), \text{ 使得 } f'(\eta) = \frac{f(\xi) - f(0)}{\xi - 0}, f'(\zeta) = \frac{f(1) - f(\xi)}{1 - \xi}$$

$$\text{于是 } f'(\eta)f'(\zeta) = \frac{f(\xi)}{\xi} \cdot \frac{1 - f(\xi)}{1 - \xi} = \frac{1 - \xi}{\xi} \cdot \frac{\xi}{1 - \xi} = 1.$$

【评注】中值定理的证明问题是历年出题频率最高的部分, 而将中值定理与介值定理或积分中值定理结合起来命题又是最常见的命题形式.

完全类似例题见《数学复习指南》(理工类) P.128 【例 5.4】, P.151 【例 5.25】

(19) (本题满分 12 分)

设函数 $\varphi(y)$ 具有连续导数, 在围绕原点的任意分段光滑简单闭曲线 L 上, 曲线积分

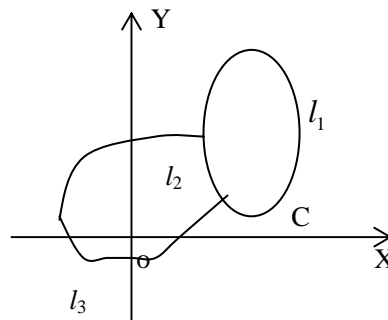
$$\oint_L \frac{\varphi(y)dx + 2xydy}{2x^2 + y^4}$$
 的值恒为同一常数.

(I) 证明: 对右半平面 $x > 0$ 内的任意分段光滑简单闭曲线 C , 有 $\oint_C \frac{\varphi(y)dx + 2xydy}{2x^2 + y^4} = 0$;

(II) 求函数 $\varphi(y)$ 的表达式.

【分析】证明 (I) 的关键是如何将封闭曲线 C 与围绕原点的任意分段光滑简单闭曲线相联系, 这可利用曲线积分的可加性将 C 进行分解讨论; 而 (II) 中求 $\varphi(y)$ 的表达式, 显然应用积分与路径无关即可.

【详解】 (I)



如图, 将 C 分解为: $C = l_1 + l_2$, 另作一条曲线 l_3 围绕原点且与 C 相接, 则

$$\oint_C \frac{\varphi(y)dx + 2xydy}{2x^2 + y^4} = \oint_{l_1+l_2} \frac{\varphi(y)dx + 2xydy}{2x^2 + y^4} - \oint_{l_2+l_3} \frac{\varphi(y)dx + 2xydy}{2x^2 + y^4} = 0.$$

(II) 设 $P = \frac{\varphi(y)}{2x^2 + y^4}$, $Q = \frac{2xy}{2x^2 + y^4}$, P, Q 在单连通区域 $x > 0$ 内具有一阶连续偏导数,

由 (I) 知, 曲线积分 $\int_L \frac{\varphi(y)dx + 2xydy}{2x^2 + y^4}$ 在该区域内与路径无关, 故当 $x > 0$ 时, 总有

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}.$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{2y(2x^2 + y^4) - 4x^2 \cdot 2xy}{(2x^2 + y^4)^2} = \frac{-4x^2y + 2y^5}{(2x^2 + y^4)^2}, \quad (1)$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\varphi'(y)(2x^2 + y^4) - 4\varphi(y)y^3}{(2x^2 + y^4)^2} = \frac{2x^2\varphi'(y) + \varphi'(y)y^4 - 4\varphi(y)y^3}{(2x^2 + y^4)^2}. \quad (2)$$

比较①、②两式的右端, 得

$$\begin{cases} \varphi'(y) = -2y, & (3) \\ \varphi'(y)y^4 - 4\varphi(y)y^3 = 2y^5. & (4) \end{cases}$$

由③得 $\varphi(y) = -y^2 + c$, 将 $\varphi(y)$ 代入④得 $2y^5 - 4cy^3 = 2y^5$,

所以 $c = 0$, 从而 $\varphi(y) = -y^2$.

【评注】 本题难度较大, 关键是如何将待求解的问题转化为可利用已知条件的情形. 第二部分完全类似例题见《数学复习指南》(理工类) P.340 【例 13.18】

(20) (本题满分 9 分)

已知二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = (1-a)x_1^2 + (1-a)x_2^2 + 2x_3^2 + 2(1+a)x_1x_2$ 的秩为 2.

(I) 求 a 的值;

(II) 求正交变换 $x = Qy$, 把 $f(x_1, x_2, x_3)$ 化成标准形;

(III) 求方程 $f(x_1, x_2, x_3)=0$ 的解.

【分析】(I) 根据二次型的秩为 2, 可知对应矩阵的行列式为 0, 从而可求 a 的值; (II) 是常规问题, 先求出特征值、特征向量, 再正交化、单位化即可找到所需正交变换; (III) 利用第二步的结果, 通过标准形求解即可.

【详解】(I) 二次型对应矩阵为

$$A = \begin{bmatrix} 1-a & 1+a & 0 \\ 1+a & 1-a & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix},$$

由二次型的秩为 2, 知 $|A| = \begin{vmatrix} 1-a & 1+a & 0 \\ 1+a & 1-a & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 0$, 得 $a=0$.

(II) 这里 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$, 可求出其特征值为 $\lambda_1 = \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 0$.

解 $(2E - A)x = 0$, 得特征向量为: $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$,

解 $(0E - A)x = 0$, 得特征向量为: $\alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

由于 α_1, α_2 已经正交, 直接将 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 单位化, 得:

$$\eta_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \eta_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \eta_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

令 $Q = [\alpha_1 \ \alpha_2 \ \alpha_3]$, 即为所求的正交变换矩阵, 由 $x=Qy$, 可化原二次型为标准形:

$$f(x_1, x_2, x_3) = 2y_1^2 + 2y_2^2.$$

(III) 由 $f(x_1, x_2, x_3) = 2y_1^2 + 2y_2^2 = 0$, 得 $y_1 = 0, y_2 = 0, y_3 = k$ (k 为任意常数).

从而所求解为: $x=Qy = \begin{bmatrix} \eta_1 & \eta_2 & \eta_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ k \end{bmatrix} = k\eta_3 = \begin{bmatrix} c \\ -c \\ 0 \end{bmatrix}$, 其中 c 为任意常数.

【评注】 本题综合考查了特征值、特征向量、化二次型为标准型以及方程组求解等多个知识点, 特别是第三部分比较新颖. 但仔细分析可以看出, 每一部分均是大纲中规定的基

本内容.

完全类似例题见《数学复习指南》(理工类) P.468【例 6.2 (2)】, P.473【例 6.9】

(21) (本题满分 9 分)

已知 3 阶矩阵 A 的第一行是 (a, b, c) , a, b, c 不全为零, 矩阵 $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & k \end{bmatrix}$ (k 为常数),

且 $AB=O$, 求线性方程组 $Ax=0$ 的通解.

【分析】 $AB=O$, 相当于告之 B 的每一列均为 $Ax=0$ 的解, 关键问题是 $Ax=0$ 的基础解系所含解向量的个数为多少, 而这又转化为确定系数矩阵 A 的秩.

【详解】 由 $AB=O$ 知, B 的每一列均为 $Ax=0$ 的解, 且 $r(A) + r(B) \leq 3$.

(1) 若 $k \neq 9$, 则 $r(B)=2$, 于是 $r(A) \leq 1$, 显然 $r(A) \geq 1$, 故 $r(A)=1$. 可见此时 $Ax=0$ 的基础解系所含解向量的个数为 $3-r(A)=2$, 矩阵 B 的第一、第三列线性无关, 可作为其基础解系,

故 $Ax=0$ 的通解为: $x = k_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ k \end{pmatrix}$, k_1, k_2 为任意常数.

(2) 若 $k=9$, 则 $r(B)=1$, 从而 $1 \leq r(A) \leq 2$.

1) 若 $r(A)=2$, 则 $Ax=0$ 的通解为: $x = k_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, k_1 为任意常数.

2) 若 $r(A)=1$, 则 $Ax=0$ 的同解方程组为: $ax_1 + bx_2 + cx_3 = 0$, 不妨设 $a \neq 0$, 则其通解

为 $x = k_1 \begin{pmatrix} -\frac{b}{a} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} -\frac{c}{a} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, k_1, k_2 为任意常数.

【评注】 $AB=O$ 这类已知条件是反复出现的, 应该明确其引申含义: 1) B 的每一列均为 $Ax=0$ 的解; 2) $r(A) + r(B) \leq n$.

本题涉及到对参数 k 及矩阵 A 的秩的讨论, 这是考查综合思维能力的一种重要表现形式, 今后类似问题将会越来越多.

完全类似例题见《数学复习指南》(理工类) P.438【例 4.21】, P.389【例 2.36】

(22) (本题满分 9 分)

设二维随机变量 (X, Y) 的概率密度为

$$f(x, y) = \begin{cases} 1, & 0 < x < 1, 0 < y < 2x, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

求: (I) (X, Y) 的边缘概率密度 $f_X(x), f_Y(y)$;

(II) $Z = 2X - Y$ 的概率密度 $f_Z(z)$.

【分析】 求边缘概率密度直接用公式即可; 而求二维随机变量函数的概率密度, 一般用分布函数法, 即先用定义求出分布函数, 再求导得到相应的概率密度.

【详解】 (I) 关于 X 的边缘概率密度

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy = \begin{cases} \int_0^{2x} dy, & 0 < x < 1, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 2x, & 0 < x < 1, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

关于 Y 的边缘概率密度

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx = \begin{cases} \int_{\frac{y}{2}}^1 dx, & 0 < y < 2, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 1 - \frac{y}{2}, & 0 < y < 2, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

(II) 令 $F_Z(z) = P\{Z \leq z\} = P\{2X - Y \leq z\}$,

1) 当 $z < 0$ 时, $F_Z(z) = P\{2X - Y \leq z\} = 0$;

2) 当 $0 \leq z < 2$ 时, $F_Z(z) = P\{2X - Y \leq z\}$

$$= z - \frac{1}{4}z^2;$$

3) 当 $z \geq 2$ 时, $F_Z(z) = P\{2X - Y \leq z\} = 1$.

即分布函数为:
$$F_Z(z) = \begin{cases} 0, & z < 0, \\ z - \frac{1}{4}z^2, & 0 \leq z < 2, \\ 1, & z \geq 2. \end{cases}$$

故所求的概率密度为:
$$f_Z(z) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{2}z, & 0 < z < 2, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

【评注】 本题属基本题型, 只需注意计算的准确性, 应该可以顺利求解. 第二步求随机变量函数分布, 一般都是通过定义用分布函数法讨论.

完全类似例题见《数学复习指南》(理工类) P.519【例 2.38~39】, P.525【例 2.45】

(23) (本题满分 9 分)

设 $X_1, X_2, \dots, X_n (n > 2)$ 为来自总体 $N(0, 1)$ 的简单随机样本, \bar{X} 为样本均值, 记

$$Y_i = X_i - \bar{X}, i = 1, 2, \dots, n.$$

求: (I) Y_i 的方差 $DY_i, i = 1, 2, \dots, n$;

(II) Y_1 与 Y_n 的协方差 $Cov(Y_1, Y_n)$.

【分析】 先将 Y_i 表示为相互独立的随机变量求和, 再用方差的性质进行计算即可; 求 Y_1 与 Y_n 的协方差 $Cov(Y_1, Y_n)$, 本质上还是数学期望的计算, 同样应注意利用数学期望的运算性质.

【详解】 由题设, 知 $X_1, X_2, \dots, X_n (n > 2)$ 相互独立, 且

$$EX_i = 0, DX_i = 1 (i = 1, 2, \dots, n), \quad E\bar{X} = 0.$$

$$(I) \quad DY_i = D(X_i - \bar{X}) = D\left[\left(1 - \frac{1}{n}\right)X_i - \frac{1}{n} \sum_{j \neq i}^n X_j\right]$$

$$= \left(1 - \frac{1}{n}\right)^2 DX_i + \frac{1}{n^2} \sum_{j \neq i}^n DX_j$$

$$= \frac{(n-1)^2}{n^2} + \frac{1}{n^2} \cdot (n-1) = \frac{n-1}{n}.$$

$$(II) \quad Cov(Y_1, Y_n) = E[(Y_1 - EY_1)(Y_n - EY_n)]$$

$$= E(Y_1 Y_n) = E[(X_1 - \bar{X})(X_n - \bar{X})]$$

$$= E(X_1 X_n - X_1 \bar{X} - X_n \bar{X} + \bar{X}^2)$$

$$= E(X_1 X_n) - 2E(X_1 \bar{X}) + E\bar{X}^2$$

$$= 0 - \frac{2}{n} E[X_1^2 + \sum_{j=2}^n X_1 X_j] + D\bar{X} + (E\bar{X})^2$$

$$= -\frac{2}{n} + \frac{1}{n} = -\frac{1}{n}.$$

【评注】 通过定义求随机变量的数字特征是基本要求, 也是到目前为止考查最多的情形, 但读者还应注意利用数字特征的运算性质进行分析讨论, 同样是求解数字特征的一个重要途径.

本题为文登学校辅导班上讲授过的原题 (原题求相关系数, 刚好是本题的两部分, 请参见数理统计部分笔记).