2005 年数学四试题分析、详解和评注

一、**填空题**（本题共 6 小题，每小题 4 分，满分 24 分. 把答案填在题中横线上）

（**1**）极限 $\lim\limits_{x\to\infty} x\sin\dfrac{2x}{x^2+1}=$ _ .

（**2**） 微分方程 $xy'+y=0$ 满足初始条件 $y(1)=2$ 的特解为

（**3**）设二元函数 $z=xe^{x+y}+(x+1)\ln(1+y)$，则 $dz\Big|_{(1,0)}=$

（**4**）设行向量组 $(2,1,1,1)$，$(2,1,a,a)$，$(3,2,1,a)$，$(4,3,2,1)$ 线性相关，且 $a\neq 1$，则 a=

（**5**）设 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 均为 3 维列向量，记矩阵

$$A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)，B=(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3,\alpha_1+2\alpha_2+4\alpha_3,\alpha_1+3\alpha_2+9\alpha_3)，$$

如果 $|A|=1$，那么 $|B|=$___.

（**6**）从数 1,2,3,4 中任取一个数，记为 X, 再从 $1,2,\Lambda\ ,X$ 中任取一个数，记为 Y, 则

$P\{Y=2\}=$

二、**选择题**（本题共 8 小题，每小题 4 分，满分 32 分. 每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求，把所选项前的字母填在题后的括号内）

（**7**）当 a 取下列哪个值时，函数 $f(x)=2x^3-9x^2+12x-a$ 恰好有两个不同的零点.

(A) 2. (B) 4. (C) 6. (D) 8. [ ]

（**8**）设 $I_1=\iint\limits_D\cos\sqrt{x^2+y^2}\,d\sigma, I_2=\iint\limits_D\cos(x^2+y^2)d\sigma, I_3=\iint\limits_D\cos(x^2+y^2)^2 d\sigma$，其中 $D=\{(x,y)\big|x^2+y^2\le 1\}$，则

(A) $I_3>I_2>I_1$. （B）$I_1>I_2>I_3$.

(C) $I_2>I_1>I_3$. (D) $I_3>I_1>I_2$. [ ]

（**9**）下列结论中正确的是

(A) $\int_1^{+\infty}\dfrac{dx}{x(x+1)}$ 与 $\int_0^1\dfrac{dx}{x(x+1)}$ 都收敛. （B）$\int_1^{+\infty}\dfrac{dx}{x(x+1)}$ 与 $\int_0^1\dfrac{dx}{x(x+1)}$ 都发散.

(C) $\int_1^{+\infty}\dfrac{dx}{x(x+1)}$ 发散，$\int_0^1\dfrac{dx}{x(x+1)}$ 收敛. (D) $\int_1^{+\infty}\dfrac{dx}{x(x+1)}$ 收敛，$\int_0^1\dfrac{dx}{x(x+1)}$ 发散.

（**10**）设 $f(x)=x\sin x+\cos x$,下列命题中正确的是

(A) f(0)是极大值，$f(\frac{\pi}{2})$是极小值. （B） f(0)是极小值，$f(\frac{\pi}{2})$是极大值.

（C） f(0)是极大值，$f(\frac{\pi}{2})$也是极大值. (D) f(0)是极小值，$f(\frac{\pi}{2})$也是极小值.

[ ]

（**11**）以下四个命题中，正确的是

(A) 若$f'(x)$在（0，1）内连续，则 f(x)在（0，1）内有界.

（B）若$f(x)$在（0，1）内连续，则 f(x)在（0，1）内有界.

（C）若$f'(x)$在（0，1）内有界，则 f(x)在（0，1）内有界.

(D) 若$f(x)$在（0，1）内有界，则$f'(x)$在（0，1）内有界. [ ]

（**12**）设 A,B,C 均为 n 阶矩阵，E 为 n 阶单位矩阵，若 B=E+AB,C=A+CA，则 B-C 为

(A) E. （B）-E. （C）A. (D) -A [ ]

（**13**）设二维随机变量(X,Y) 的概率分布为

X \ Y	0	1
0	0.4	a
1	b	0.1

已知随机事件$\{X=0\}$与$\{X+Y=1\}$相互独立，则

(A) a=0.2, b=0.3 (B) a=0.4, b=0.1

(C) a=0.3, b=0.2 (D) a=0.1, b=0.4 [ ]

（**14**） 设$X_1,X_2,\cdots,X_n,\cdots$为独立同分布的随机变量列，且均服从参数为$\lambda(\lambda>1)$的指数分布，记$\Phi(x)$为标准正态分布函数，则

(A) $\lim\limits_{n\to\infty}P\{\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}X_i-n\lambda}{\lambda\sqrt{n}}\le x\}=\Phi(x)$. (B) $\lim\limits_{n\to\infty}P\{\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}X_i-n\lambda}{\sqrt{n\lambda}}\le x\}=\Phi(x)$.

(C) $\lim\limits_{n\to\infty}P\{\frac{\lambda\sum\limits_{i=1}^{n}X_i-n}{\sqrt{n}}\le x\}=\Phi(x)$. (D) $\lim\limits_{n\to\infty}P\{\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}X_i-\lambda}{\sqrt{n}\lambda}\le x\}=\Phi(x)$.

[ ]

三 、解答题（本题共 **9** 小题，满分 **94** 分**.**解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤**.**）

（**15**）（本题满分 **8** 分）

求$\lim\limits_{x\to 0}(\frac{1+x}{1-e^{-x}}-\frac{1}{x})$.

（**16**）（本题满分 **8** 分）

设 f(u)具有二阶连续导数，且 $g(x,y)=f(\frac{y}{x})+yf(\frac{x}{y})$，求 $x^2\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}-y^2\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}$.

（17）（本题满分 9 分）

计算二重积分 $\iint\limits_D |x^2+y^2-1|d\sigma$，其中 $D=\{(x,y)|0\le x\le 1,0\le y\le 1\}$.

（18）（本题满分 9 分）

求 f(x,y)= x^2-y^2+2 在椭圆域 $D=\{(x,y)\Big|x^2+\frac{y^2}{4}\le 1\}$ 上的最大值和最小值.

（19）（本题满分 8 分）

设 f(x),g(x)在[0，1]上的导数连续，且 f(0)=0, $f'(x)\ge 0$, $g'(x)\ge 0$.证明：对任何 a$\in[0,1]$，有

$$\int_0^a g(x)f'(x)dx+\int_0^1 f(x)g'(x)dx\ge f(a)g(1).$$

（20）（本题满分 13 分）

已知齐次线性方程组

$$\text{(i)}\quad\begin{cases}x_1+2x_2+3x_3=0,\\2x_1+3x_2+5x_3=0,\\x_1+x_2+ax_3=0,\end{cases}$$

和

$$\text{(ii)}\quad\begin{cases}x_1+bx_2+cx_3=0,\\2x_1+b^2x_2+(c+1)x_3=0,\end{cases}$$

同解，求 a,b, c 的值.

（21）（本题满分 13 分）

设 A 为三阶矩阵，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是线性无关的三维列向量，且满足

$A\alpha_1=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$，$A\alpha_2=2\alpha_2+\alpha_3$，$A\alpha_3=2\alpha_2+3\alpha_3$.

(I) 求矩阵 B, 使得 $A(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)B$；

（II）求矩阵 A 的特征值；

（III）求可逆矩阵 P, 使得 $P^{-1}AP$ 为对角矩阵.

（22）（本题满分 13 分）

设二维随机变量(X,Y)的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}1,0<x<1,0<y<2x,\\0,\qquad\text{其他.}\end{cases}$$

求：(I) (X,Y)的边缘概率密度 $f_X(x),f_Y(y)$；

（II） $Z=2X-Y$ 的概率密度 $f_Z(z)$.

（III） $P\{Y\le\frac{1}{2}\big|X\le\frac{1}{2}\}$.

（23）（本题满分 13 分）

设 $X_1,X_2,\Lambda,X_n(n>2)$ 为来自总体 $N(0,\sigma^2)$ 的简单随机样本，$\overline{X}$ 为样本均值，记 $Y_i=X_i-\overline{X},i=1,2,\Lambda,n.$

求：（I） Y_i 的方差 $DY_i,i=1,2,\Lambda,n$；

（II）Y_1 与 Y_n 的协方差 $Cov(Y_1,Y_n)$.

（III） $P\{Y_1+Y_n\le 0\}$.

1……【分析】 本题属基本题型，直接用无穷小量的等价代换进行计算即可.

【详解】 $\lim\limits_{x\to\infty}x\sin\frac{2x}{x^2+1}=\lim\limits_{x\to\infty}x\frac{2x}{x^2+1}=2.$

【评注】 若在某变化过程下，$\alpha(x)\sim\overline{\alpha}(x)$，则 $\lim f(x)\alpha(x)=\lim f(x)\overline{\alpha}(x).$

完全类似例题见《数学复习指南》（经济类）P.23【例 1.28】

2…..**【分析】** 直接积分即可.

【详解】 原方程可化为 $(xy)'=0$，积分得 $xy=C$，

代入初始条件得 C=2，故所求特解为 xy=2.

【评注】 本题虽属基本题型， 也可先变形

$$\frac{dy}{y}=-\frac{dx}{x},$$

再积分求解.

完全类似例题见《数学复习指南》（经济类）P.229【例 10.5】

3…..**【分析】** 基本题型，直接套用相应的公式即可.

【详解】 $\frac{\partial z}{\partial x}=e^{x+y}+xe^{x+y}+\ln(1+y)$,

$$\frac{\partial z}{\partial y}=xe^{x+y}+\frac{x+1}{1+y},$$

于是 $dz\Big|_{(1,0)}=2edx+(e+2)dy$.

完全类似例题见《数学复习指南》（经济类）P.166【例 7.6】

4……**【分析】** 四个 4 维向量线性相关，必有其对应行列式为零，由此即可确定 a.

【详解】 由题设，有

$$\begin{vmatrix}2&1&1&1\\2&1&a&a\\3&2&1&a\\4&3&2&1\end{vmatrix}=(a-1)(2a-1)=0,$$ 得 $a=1,a=\frac{1}{2}$，但题设 $a\neq 1$，故 $a=\frac{1}{2}$.

.

【评注】 当向量的个数小于维数时，一般通过初等变换化阶梯形讨论其线性相关性.

完全类似例题见《数学复习指南》（经济类）P.312【例 3.3】

5………**【分析】** 将 B 写成用 A 右乘另一矩阵的形式，再用方阵相乘的行列式性质进行计算即可.

【详解】 由题设，有

$$B=(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3,\alpha_1+2\alpha_2+4\alpha_3,\alpha_1+3\alpha_2+9\alpha_3)$$

$$=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{bmatrix}1&1&1\\1&2&3\\1&4&9\end{bmatrix},$$

于是有 $$|B|=|A|\cdot\begin{vmatrix}1&1&1\\1&2&3\\1&4&9\end{vmatrix}=1\times 2=2.$$

【评注】 本题相当于矩阵 B 的列向量组可由矩阵 A 的列向量组线性表示，关键是将其转化为用矩阵乘积形式表示。一般地，若

$$\beta_1=a_{11}\alpha_1+a_{12}\alpha_2+\cdots+a_{1n}\alpha_n,$$

$$\beta_2=a_{21}\alpha_1+a_{22}\alpha_2+\cdots+a_{2n}\alpha_n,$$

$$\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots$$

$$\beta_m=a_{m1}\alpha_1+a_{m2}\alpha_2+\cdots+a_{mn}\alpha_n,$$

则有 $$\begin{bmatrix}\beta_1&\beta_2&\cdots&\beta_m\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_{11}&a_{21}&\cdots&a_{m1}\\a_{12}&a_{22}&\cdots&a_{m2}\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\a_{1n}&a_{2n}&\cdots&a_{mn}\end{bmatrix}.$$

完全类似例题见《数学复习指南》（经济类）P.268【例 1.5】

6.…**【分析】** 本题涉及到两次随机试验，想到用全概率公式, 且第一次试验的各种两两互不相容的结果即为完备事件组或样本空间的划分.

【详解】 $$P\{Y=2\}=P\{X=1\}P\{Y=2|X=1\}+P\{X=2\}P\{Y=2|X=2\}$$

$$+P\{X=3\}P\{Y=2|X=3\}+P\{X=4\}P\{Y=2|X=4\}$$

$$=\frac{1}{4}\times(0+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4})=\frac{13}{48}.$$

【评注】 全概率公式综合考查了加法公式、乘法公式和条件概率，这类题型一直都是考查的重点.

完全类似例题见《数学复习指南》（经济类）P.407【例 1.31】

7.……**【分析】** 先求出可能极值点，再利用单调性与极值画出函数对应简单图形进行分析，当恰好有一个极值为零时，函数 f(x)恰好有两个不同的零点.

【详解】 $f'(x)=6x^2-18x+12=6(x-1)(x-2)$，知可能极值点为 x=1,x=2，且

$f(1)=5-a, f(2)=4-a$，可见当 a=4 时，函数 f(x) 恰好有两个零点，故应选(B).

【评注】 对于三次多项式函数 f(x)=ax^3+bx^2+cx+d,当两个极值同号时，函数 f(x) 只有一个零点；当两个极值异号时，函数 f(x) 有三个零点；当两个极值有一为零时,，函数 f(x) 有两个零点.

完全类似例题见《数学复习指南》（经济类）P.151【例 6.26】

8…..

【分析】 关键在于比较 $\sqrt{x^2+y^2}$ 、 x^2+y^2 与 $(x^2+y^2)^2$ 在区域 $D=\{(x,y)\big|x^2+y^2\le 1\}$ 上的大小.

【详解】 在区域 $D=\{(x,y)\big|x^2+y^2\le 1\}$ 上，有 $0\le x^2+y^2\le 1$，从而有

$$\frac{\pi}{2}>1\ge\sqrt{x^2+y^2}\ge x^2+y^2\ge(x^2+y^2)^2\ge 0$$

由于 cosx 在 $(0,\frac{\pi}{2})$ 上为单调减函数，于是

$$0\le\cos\sqrt{x^2+y^2}\le\cos(x^2+y^2)\le\cos(x^2+y^2)^2$$

因此 $\iint\limits_D\cos\sqrt{x^2+y^2}d\sigma<\iint\limits_D\cos(x^2+y^2)d\sigma<\iint\limits_D\cos(x^2+y^2)^2d\sigma$，故应选(A).

【评注】 本题比较二重积分大小，本质上涉及到用重积分的不等式性质和函数的单调性进行分析讨论.

完全类似例题见《数学复习指南》（经济类）P.183【例 8.2】

9…….【分析】 直接计算相应积分，判定其敛散性即可.

【详解】 $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x(x+1)}=\ln\left|\frac{x}{x+1}\right|\Bigg|_1^{+\infty}=\ln 2$，积分收敛，

$$\int_0^1\frac{dx}{x(x+1)}=\ln\left|\frac{x}{x+1}\right|\Bigg|_0^1=0-(-\infty)=+\infty$$，积分发散.

故应选(D).

【评注】 广义积分敛散性的判断，一般只要求掌握通过计算能判定的情形.

完全类似例题见《数学复习指南》（经济类）P.123【例 4.52】

10…….【分析】 先求出 $f'(x),f''(x)$，再用取极值的充分条件判断即可.

【详解】 $f'(x)=\sin x+x\cos x-\sin x=x\cos x$，显然 $f'(0)=0,f'(\frac{\pi}{2})=0$，

又 $f''(x)=\cos x-x\sin x$，且 $f''(0)=1>0,f''(\frac{\pi}{2})=-\frac{\pi}{2}<0$，故 f(0)是极小值，$f(\frac{\pi}{2})$ 是极大值，应选(B).

【评注】 本题为基本题型，主要考查取极值的充分条件.

对应定理公式见《数学复习指南》（经济类）P.141

11……【分析】 通过反例用排除法找到正确答案即可.

【详解】 设 f(x)=$\frac{1}{x}$，则 f(x)及 $f'(x)=-\frac{1}{x^2}$ 均在（0，1）内连续，但 f(x)在（0，1）内无界，排除(A)、(B); 又 $f(x)=\sqrt{x}$ 在（0，1）内有界，但 $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$ 在（0，1）内无界，排除(D). 故应选(C).

【评注】 本题也可直接证明：用拉格朗日中值定理，有

$f(x)-f(\frac{1}{2})=f'(\xi)(x-\frac{1}{2}),\xi$ 在(0,1)之间，由此容易推知若 $f'(x)$ 在（0，1）内有界，则 f(x)在（0，1）内有界.

12…….**【分析】** 利用矩阵运算进行分析即可.

【详解】 由 B=E+AB,C=A+CA，知

(E-A)B=E, C(E-A)=A,

可见，E-A 与 B 互为逆矩阵，于是有 B(E-A)=E.

从而有 (B-C)(E-A)=E-A, 而 E-A 可逆，故 B-C=E. 应选(A).

【评注】 本题考查矩阵运算性质，注意当(E-A)B=E 时，表明 E-A,B 均可逆，且互为逆矩阵，从而利用逆矩阵的定义，它们还可互换.

13……..**【分析】** 首先所有概率求和为 1，可得 a+b=0.5, 其次，利用事件的独立性又可得一等式，由此可确定 a,b 的取值.

【详解】 由题设，知 a+b=0.5

又事件$\{X=0\}$与$\{X+Y=1\}$相互独立，于是有

$$P\{X=0,X+Y=1\}=P\{X=0\}P\{X+Y=1\},$$

即 a=$(0.4+a)(a+b)$， 由此可解得 a=0.4, b=0.1, 故应选(B).

【评注】 本题考查二维随机变量分布律的性质和独立随机事件的概念，均为大纲要求的基本内容.

完全类似例题见《数学复习指南》（经济类）P.528【习题二，1.（9）】

14……**【分析】** 只需求出 $\sum_{i=1}^{n}X_i$ 的期望与方差，再根据中心极限定理将其标准化即可.

【详解】 由题设，$EX_i=\frac{1}{\lambda},DX_i=\frac{1}{\lambda^2}$， $i=1,2,\Lambda\ ,n,\Lambda$ ，于是

$$E\sum_{i=1}^{n}X_i=\frac{n}{\lambda},\quad D\sum_{i=1}^{n}X_i=\frac{n}{\lambda^2},$$

根据中心极限定理，知 $\dfrac{\sum_{i=1}^{n}X_i-\dfrac{n}{\lambda}}{\sqrt{\dfrac{n}{\lambda^2}}}=\dfrac{\lambda\sum_{i=1}^{n}X_i-n}{\sqrt{n}}$ 其极限分布服从标准正态分布，故应选 (C).

【评注】 本题考查中心极限定理，应注意中心极限定理的条件和结论，特别是注意结论之间的转换.

完全类似结论见《数学复习指南》（经济类）P.484

15…….. **【分析】** $"\infty-\infty"$ 型未定式，一般先通分，再用罗必塔法则.

【详解】 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1+x}{1-e^{-x}}-\dfrac{1}{x}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x+x^2-1+e^{-x}}{x(1-e^{-x})}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x+x^2-1+e^{-x}}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1+2x-e^{-x}}{2x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2+e^{-x}}{2}=\frac{3}{2}.$$

【评注】 本题属基本题型，在里用罗必塔法则求极限的过程中，应注意利用无穷小量的等价代换进行简化.

完全类似例题见《数学复习指南》（经济类）P.29【例 1.45】

16……………. **【分析】** 先求出二阶偏导数，再代入相应表达式即可.

【详解】 由已知条件可得

$$\frac{\partial g}{\partial x}=-\frac{y}{x^2}f'\left(\frac{y}{x}\right)+f'\left(\frac{x}{y}\right),$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}=\frac{2y}{x^3}f'\left(\frac{y}{x}\right)+\frac{y^2}{x^4}f''\left(\frac{x}{y}\right)+\frac{1}{y}f''\left(\frac{x}{y}\right),$$

$$\frac{\partial g}{\partial y}=\frac{1}{x}f'\left(\frac{y}{x}\right)+f\left(\frac{x}{y}\right)-\frac{x}{y}f'\left(\frac{x}{y}\right),$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}=\frac{1}{x^2}f''\left(\frac{y}{x}\right)-\frac{x}{y^2}f'\left(\frac{x}{y}\right)+\frac{x}{y^2}f'\left(\frac{x}{y}\right)+\frac{x^2}{y^3}f''\left(\frac{x}{y}\right),$$

所以 $x^2\dfrac{\partial^2 g}{\partial x^2}-y^2\dfrac{\partial^2 g}{\partial y^2}$

$$=\frac{2y}{x}f'(\frac{y}{x})+\frac{y^2}{x^2}f''(\frac{x}{y})+\frac{x^2}{y}f''(\frac{x}{y})-\frac{y^2}{x^2}f''(\frac{y}{x})-\frac{x^2}{y}f''(\frac{x}{y})$$

$$=\frac{2y}{x}f'(\frac{y}{x}).$$

【评注】 本题属基本题型，但在求偏导数的过程中应注意计算的准确性.

完全类似例题见《数学复习指南》（经济类）P.171【例 7.18】

17…..**【分析】** 被积函数含有绝对值，应当作分区域函数看待，利用积分的可加性分区域积分即可.

【详解】 记 $D_1=\{(x,y)\big|x^2+y^2\le 1,(x,y)\in D\}$，

$$D_2=\{(x,y)\big|x^2+y^2>1,(x,y)\in D\},$$

于是 $$\iint_D\left|x^2+y^2-1\right|d\sigma=-\iint_{D_1}(x^2+y^2-1)dxdy+\iint_{D_2}(x^2+y^2-1)dxdy$$

$$=-\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^1 (r^2-1)rdr+\iint_D(x^2+y^2-1)dxdy-\iint_{D_1}(x^2+y^2-1)dxdy$$

$$=\frac{\pi}{8}+\int_0^1dx\int_0^1(x^2+y^2-1)dy-\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^1(r^2-1)rdr=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{3}.$$

【评注】 形如积分 $\iint_D|f(x,y)|d\sigma$ 、 $\iint_D\max\{f(x,y),g(x,y)\}d\sigma$ 、 $\iint_D\min\{f(x,y),g(x,y)\}d\sigma$ 、$\iint_D[f(x,y)]d\sigma$ 、$\iint_D\mathrm{sgn}\{f(x,y)-g(x,y)\}d\sigma$ 等的被积函数均应当作分区域函数看待，利用积分的可加性分区域积分.

完全类似例题见《数学复习指南》（经济类）P.193【例 8.18】

18……**【分析】** 根据全微分和初始条件可先确定 f(x,y)的表达式. 而 f(x,y)在椭圆域上的最大值和最小值, 可能在区域的内部达到，也可能在区域的边界上达到，且在边界上的最值又转化为求条件极值.

.**【详解】** 令 $\frac{\partial f}{\partial x}=2x=0,\frac{\partial f}{\partial y}=-2y=0$ 得可能极值点为 x=0,y=0. 且

$A=\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_{(0,0)}=2$，$B=\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\right|_{(0,0)}=0$，$C=\left.\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right|_{(0,0)}=-2$，

$\Delta=B^2-AC=4>0$，所以点(0,0) 不是极值点，从而也非最值点.

再考虑其在边界曲线 $x^2+\frac{y^2}{4}=1$ 上的情形：令拉格朗日函数为

$$F(x,y,\lambda)=f(x,y)+\lambda(x^2+\frac{y^2}{4}-1),$$

解 $$\begin{cases} F'_x=\dfrac{\partial f}{\partial x}+2\lambda x=2(1+\lambda)x=0, \\ F'_y=\dfrac{\partial f}{\partial y}+\dfrac{\lambda y}{2}=-2y+\dfrac{1}{2}\lambda y=0, \\ F'_\lambda=x^2+\dfrac{y^2}{4}-1=0, \end{cases}$$

得可能极值点 $x=0,y=2,\lambda=4$；$x=0,y=-2,\lambda=4$；$x=1,y=0,\lambda=-1$；$x=-1,y=0,\lambda=-1$. 代入 f(x,y)得 $f(0,\pm2)=-2$, $f(\pm1,0)=3$，可见 z=f(x,y)在区域 $D=\{(x,y)\Big| x^2+\frac{y^2}{4}\le 1\}$ 内的最大值为 3，最小值为-2.

【评注】 本题综合考查了多元函数微分学的知识，涉及到多个重要基础概念，特别是通过偏导数反求函数关系，要求考生真正理解并掌握了相关知识.

当在区域边界上求极值时，也可将 $y^2=4-4x^2$ 代入 f(x,y)=$5x^2-2$,转化为一元函数求极值.

完全类似例题见《数学复习指南》(经济类) P.178【例 7.29】

19…….**【分析】** 可用参数变易法转化为函数不等式证明，或根据被积函数的形式，通过分部积分讨论.

【详解】 方法一：设

$$F(x)=\int_0^x g(t)f'(t)dt+\int_0^1 f(t)g'(t)dt-f(x)g(1),$$

则 F(x)在[0，1]上的导数连续，并且

$$F'(x)=g(x)f'(x)-f'(x)g(1)=f'(x)[g(x)-g(1)],$$

由于 $x\in[0,1]$ 时，$f'(x)\ge 0, g'(x)\ge 0$，因此 $F'(x)\le 0$，即 F(x)在[0，1]上单调递减.

注意到

$$F(1)=\int_0^1 g(t)f'(t)dt+\int_0^1 f(t)g'(t)dt-f(1)g(1),$$

而 $$\int_0^1 g(t)f'(t)dt=\int_0^1 g(t)df(t)=g(t)f(t)\Big|_0^1-\int_0^1 f(t)g'(t)dt$$

$$=f(1)g(1)-\int_0^1 f(t)g'(t)dt,$$

故 F(1)=0.

因此 $x\in[0,1]$ 时，$F(x)\ge 0$，由此可得对任何 $a\in[0,1]$，有

$$\int_0^a g(x)f'(x)dx+\int_0^1 f(x)g'(x)dx \ge f(a)g(1).$$

方法二：$\int_0^a g(x)f'(x)dx = g(x)f(x)\Big|_0^a - \int_0^a f(x)g'(x)dx$

$$= f(a)g(a)-\int_0^a f(x)g'(x)dx,$$

$$\int_0^a g(x)f'(x)dx+\int_0^1 f(x)g'(x)dx$$

$$= f(a)g(a)-\int_0^a f(x)g'(x)dx+\int_0^1 f(x)g'(x)dx$$

$$f(a)g(a)+\int_a^1 f(x)g'(x)dx.$$

由于 $x\in[0,1]$ 时，$g'(x)\ge 0$，因此

$$f(x)g'(x)\ge f(a)g'(x),\quad x\in[a,1],$$

$$\int_0^1 f(x)g'(x)dx \ge \int_0^1 f(a)g'(x)dx = f(a)[g(1)-g(a)],$$

从而 $\int_0^a g(x)f'(x)dx+\int_0^1 f(x)g'(x)dx$

$$\ge f(a)g(a)+f(a)[g(1)-g(a)] = f(a)g(1).$$

【评注】 对于积分不等式的证明，主要有两个途径：一是转化为函数不等式，二是通过恒等变形，如变量代换、分部积分等，再用积分的不等式性质进行讨论.

完全类似例题见《数学复习指南》（经济类）P.115【例 4.42~46】

20……..**【分析】** 方程组（ii）显然有无穷多解，于是方程组（i）也有无穷多解，从而可确定 a，这样先求出（i）的通解，再代入方程组（ii）确定 b,c 即可.

【详解】 方程组（ii）的未知量个数大于方程个数，故方程组方程组（ii）有无穷多解. 因为方程组（i）与（ii）同解，所以方程组（i）的系数矩阵的秩小于 3.

对方程组（i）的系数矩阵施以初等行变换

$$\begin{bmatrix}1&2&3\\2&3&5\\1&1&a\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&1\\0&0&a-2\end{bmatrix},$$

从而 a=2. 此时，方程组（i）的系数矩阵可化为

$$\begin{bmatrix}1&2&3\\2&3&5\\1&1&2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&1\\0&0&0\end{bmatrix},$$

故 $(-1,-1,1)^T$ 是方程组（i）的一个基础解系.

将 $x_1=-1, x_2=-1, x_3=1$ 代入方程组（ii）可得

$b=1,c=2$ 或 $b=0,c=1$.

当 $b=1,c=2$ 时，对方程组（ii）的系数矩阵施以初等行变换，有

$$\begin{bmatrix}1&1&2\\2&1&3\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&1\end{bmatrix},$$

显然此时方程组（i）与（ii）同解.

当 $b=0,c=1$ 时，对方程组（ii）的系数矩阵施以初等行变换，有

$$\begin{bmatrix}1&0&1\\2&0&2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&1\\0&0&0\end{bmatrix},$$

显然此时方程组（i）与（ii）的解不相同.

综上所述，当 a=2,b=1,c=2 时，方程组（i）与（ii）同解.

【评注】 本题求 a 也可利用行列式 $\begin{vmatrix}1&2&3\\2&3&5\\1&1&a\end{vmatrix}=-a+2=0$，得 a=2.

本题也可这样考虑：

方程组 $\begin{cases}x_1+2x_2+3x_3=0,\\2x_1+3x_2+5x_3=0,\\x_1+x_2+ax_3=0,\\x_1+bx_2+cx_3=0,\\2x_1+b^2x_2+(c+1)x_3=0\end{cases}$ 必存在无穷多解，化系数矩阵为阶梯形，可确定 a=2,b=0,c=1 或 a=2,b=1,c=2，再对两组数据进行讨论即可.

完全类似例题见《数学复习指南》（经济类）P.355【习题 3（7）】

21……**【分析】** 利用(I)的结果相当于确定了 A 的相似矩阵，求矩阵 A 的特征值转化为求 A 的相似矩阵的特征值.

【详解】 (I) $A(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{bmatrix}1&0&0\\1&2&2\\1&1&3\end{bmatrix},$

可知 $B=\begin{bmatrix}1&0&0\\1&2&2\\1&1&3\end{bmatrix}.$

（II）因为 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是线性无关的三维列向量，可知矩阵 $C=[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3]$ 可逆，所以 $C^{-1}AC=B$，即矩阵 A 与 B 相似，由此可得矩阵 A 与 B 有相同的特征值.

由

$$|\lambda E-B|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & 0 & 0\\ -1 & \lambda-2 & -2\\ -1 & -1 & \lambda-3\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2(\lambda-4)=0,$$

得矩阵 B 的特征值，也即矩阵 A 的特征值

$$\lambda_1=\lambda_2=1,\lambda_3=4.$$

（III） 对应于 $\lambda_1=\lambda_2=1$，解齐次线性方程组(E-B)X=0，得基础解系

$$\xi_1=(-1,1,0)^T，\ \xi_2=(-2,0,1)^T；$$

对应于 $\lambda_3=4$，解齐次线性方程组(4E-B)X=0，得基础解系

$$\xi_3=(0,1,1)^T.$$

令矩阵

$$Q=[\xi_1\quad \xi_2\quad \xi_3]=\begin{bmatrix}-1 & -2 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix},$$

则 $$Q^{-1}BQ=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 4\end{bmatrix}.$$

因 $Q^{-1}BQ=Q^{-1}C^{-1}ACQ=(CQ)^{-1}A(CQ)$，记矩阵

$$P=CQ=[\alpha_1\quad \alpha_2\quad \alpha_3]\begin{bmatrix}-1 & -2 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix}$$

$$=[-\alpha_1+\alpha_2,-2\alpha_1+\alpha_3,\alpha_2+\alpha_3],$$

故 P 即为所求的可逆矩阵.

【评注】 本题未知矩阵 A 的具体形式求其特征值及相似对角形，问题的关键是转化为 A 的相似矩阵进行分析讨论，这种处理思路值得注意.

完全类似例题见《数学复习指南》（经济类）P.370【例 5.19】

22……**【分析】** 求边缘概率密度直接用公式即可；而求二维随机变量函数的概率密度，一般用分布函数法，即先用定义求出分布函数，再求导得到相应的概率密度；直接用条件概率公式计算即可.

【详解】 （I） 关于 X 的边缘概率密度

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=\begin{cases}\int_0^{2x}dy, & 0<x<1,\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

$$=\begin{cases}2x, 0<x<1,\\ 0, \quad 其他.\end{cases}$$

关于 Y 的边缘概率密度

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx=\begin{cases}\int_{\frac{y}{2}}^{1} dx, 0<y<2,\\ 0, \quad 其他.\end{cases}$$

$$=\begin{cases}1-\dfrac{y}{2}, 0<y<2,\\ 0, \quad 其他.\end{cases}$$

（II） 令 $F_Z(z)=P\{Z\le z\}=P\{2X-Y\le z\}$，

1） 当 $z<0$ 时，$F_Z(z)=P\{2X-Y\le z\}=0$；

2） 当 $0\le z<2$ 时，$F_Z(z)=P\{2X-Y\le z\}$

$$=z-\frac{1}{4}z^2;$$

3) 当 $z\ge 2$ 时，$F_Z(z)=P\{2X-Y\le z\}=1.$

即分布函数为： $$F_Z(z)=\begin{cases}0, & z<0,\\ z-\dfrac{1}{4}z^2, & 0\le z<2,\\ 1, & z\ge 2.\end{cases}$$

故所求的概率密度为： $$f_Z(z)=\begin{cases}1-\dfrac{1}{2}z, 0<z<2,\\ 0, \quad 其他.\end{cases}$$

（III） $$P\{Y\le\frac{1}{2}\Big|X\le\frac{1}{2}\}=\frac{P\{X\le\frac{1}{2},Y\le\frac{1}{2}\}}{P\{X\le\frac{1}{2}\}}=\frac{3/16}{1/4}=\frac{3}{4}.$$

【评注】 本题属基本题型，只需注意计算的准确性，应该可以顺利求解.第二步求随机变量函数分布，一般都是通过定义用分布函数法讨论.

完全类似例题见《数学复习指南》（经济类）P.436【例 2.38~40】

23…..**【分析】** 先将 Y_i 表示为相互独立的随机变量求和，再用方差的性质进行计算即可；求 Y_1 与 Y_n 的协方差 $Cov(Y_1,Y_n)$，本质上还是数学期望的计算，同样应注意利用数学期望的运算性质；求概率 $P\{Y_1+Y_n\le 0\}$ 的关键是先确定其分布.

【详解】 由题设，知 $X_1,X_2,\Lambda\ ,X_n(n>2)$ 相互独立，且

$$EX_i=0, DX_i=\sigma^2(i=1,2,\Lambda\ ,n),\quad E\overline{X}=0.$$

（I）$DY_i=D(X_i-\overline{X})=D[(1-\frac{1}{n})X_i-\frac{1}{n}\sum_{j\neq i}^{n}X_j]$

$$=(1-\frac{1}{n})^2DX_i+\frac{1}{n^2}\sum_{j\neq i}^{n}DX_j$$

$$=\frac{(n-1)^2}{n^2}\sigma^2+\frac{1}{n^2}\cdot(n-1)\sigma^2=\frac{n-1}{n}\sigma^2.$$

（II）　$Cov(Y_1,Y_n)=E[(Y_1-EY_1)(Y_n-EY_n)]$

$$=E(Y_1Y_n)=E[(X_1-\overline{X})(X_n-\overline{X})]$$

$$=E(X_1X_n-X_1\overline{X}-X_n\overline{X}+\overline{X}^2)$$

$$=E(X_1X_n)-2E(X_1\overline{X})+E\overline{X}^2$$

$$=0-\frac{2}{n}E[X_1^2+\sum_{j=2}^{n}X_1X_j]+D\overline{X}+(E\overline{X})^2$$

$$=-\frac{2}{n}\sigma^2+\frac{1}{n}\sigma^2=-\frac{1}{n}\sigma^2.$$

（III）　$Y_1+Y_n=X_1-\overline{X}+X_n-\overline{X}$

$$=\frac{n-2}{n}X_1-\frac{2}{n}\sum_{i=2}^{n-1}X_i+\frac{n-2}{n}X_n,$$

上式是相互独立的正态随机变量的线性组合，所以Y_1+Y_n服从正态分布，

由于

$$E(Y_1+Y_n)=0,$$

故　$P\{Y_1+Y_n\leq 0\}=\frac{1}{2}.$

【评注】 通过定义求随机变量的数字特征是基本要求，也是到目前为止考查最多的情形，但读者还应注意利用数字特征的运算性质进行分析讨论，同样是求解数字特征的一个重要途径. 标准正态分布在数学期望左右两侧取值的概率为$\frac{1}{2}$，也是多次考查过的知识点.

本题前两部分为文登学校辅导班上讲授过的原题（原题求相关系数，刚好是本题的两部分，请参见数理统计部分笔记）.