2004 年数学四试题分析、详解和评注

一、**填空题**（本题共 6 小题，每小题 4 分，满分 24 分. 把答案填在题中横线上）

(1) 若 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{e^x-a}(\cos x-b)=5$，则 $a=$ __1__，$b=$ __-4__.

【分析】本题属于已知极限求参数的反问题.

【详解】因为 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{e^x-a}(\cos x-b)=5$，且 $\lim\limits_{x\to 0}\sin x\cdot(\cos x-b)=0$，所以

$\lim\limits_{x\to 0}(e^x-a)=0$，得 $a=1$. 极限化为

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{e^x-a}(\cos x-b)=\lim_{x\to 0}\frac{x}{x}(\cos x-b)=1-b=5，得 b=-4.$$

因此，$a=1$，$b=-4$.

【评注】一般地，已知 $\lim\dfrac{f(x)}{g(x)}=A$，

(1) 若 $g(x)\to 0$，则 $f(x)\to 0$；
(2) 若 $f(x)\to 0$，且 $A\neq 0$，则 $g(x)\to 0$.

完全类似的例题见《数学复习指南》**P36 例 1.60，P43 第 1(3)题，P44 第 2(10)题、第 6 题，《数学题型集粹与练习题集》P19 例 1.34，《数学四临考演习》P79 第 7 题，《考研数学大串讲》P12 例 17、19.**

(2) 设 $y=\arctan e^x-\ln\sqrt{\dfrac{e^{2x}}{e^{2x}+1}}$，则 $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=1}=$ __$\dfrac{e-1}{e^2+1}$__.

【分析】本题为基础题型，先求导函数即可.

【详解】因为 $y=\arctan e^x-x+\dfrac{1}{2}\ln(e^{2x}+1)$，$y'=\dfrac{e^x}{1+e^{2x}}-1+\dfrac{e^{2x}}{e^{2x}+1}$，

所以，$\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=1}=\dfrac{e-1}{e^2+1}$.

【评注】 本题属基本题型，主要考查复合函数求导.

类似例题在一般教科书上均可找到.

(3) 设 $f(x)=\begin{cases} xe^{x^2}, & -\dfrac{1}{2}\le x<\dfrac{1}{2} \\ -1, & x\ge\dfrac{1}{2}\end{cases}$，则 $\int_{\frac{1}{2}}^{2}f(x-1)dx=$ __$-\dfrac{1}{2}$__.

【分析】本题属于求分段函数的定积分，先换元：$x-1=t$，再利用对称区间上奇偶函数的积分性质即可.

【详解】令 $x-1=t$，$\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{2}f(x-1)dx=\int_{-\frac{1}{2}}^{1}f(t)dt=\int_{-\frac{1}{2}}^{1}f(x)dx$

$$=\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} xe^{x^2}dx+\int_{\frac{1}{2}}^{1}(-1)dx=0+(-\frac{1}{2})=-\frac{1}{2}.$$

【评注】一般地，对于分段函数的定积分，按分界点划分积分区间进行求解.

完全类似的例题见《数学复习指南》P96 例 4.17，《数学四临考演习》P61 第 2 题，P68 第 15 题，《考研数学大串讲》P41 例 14.

（4） 设 $A=\begin{pmatrix}0&-1&0\\1&0&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$，$B=P^{-1}AP$，其中 P 为三阶可逆矩阵， 则

$B^{2004}-2A^2=$ $\underline{\begin{pmatrix}3&0&0\\0&3&0\\0&0&-1\end{pmatrix}}$.

【分析】 将 $\boldsymbol{B}$ 的幂次转化为 $\boldsymbol{A}$ 的幂次, 并注意到 $\boldsymbol{A}^2$ 为对角矩阵即得答案.

【详解】因为

$$A^2=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix},\quad B^{2004}=P^{-1}A^{2004}P.$$

故

$$B^{2004}=P^{-1}(A^2)^{1002}P=P^{-1}EP=E,$$

$$B^{2004}-2A^2=\begin{pmatrix}3&0&0\\0&3&0\\0&0&-1\end{pmatrix}.$$

【评注】本题是对矩阵高次幂运算的考查.

完全类似的例题可见《数学复习指南》P.291 例 2.13.

(5) 设 $A=\left(a_{ij}\right)_{3\times3}$ 是实正交矩阵，且 $a_{11}=1$，$b=(1,0,0)^T$，则线性方程组 $Ax=b$ 的解是

$\underline{(1,0,0)^T}$.

【分析】利用正交矩阵的性质即可得结果.

【详解】因为 $x=A^{-1}b$, 而且 $A=\left(a_{ij}\right)_{3\times3}$ 是实正交矩阵, 于是 $A^T=A^{-1}$, A 的每一个行(列)向量均为单位向量, 所以

$$x=A^{-1}b=A^Tb=\begin{pmatrix}a_{11}\\a_{12}\\a_{13}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}.$$

【评注】本题主要考查正交矩阵的性质和矩阵的运算.

类似的例题可见《考研数学大串讲》(2002 版, 世界图书出版公司) P.174 例 33.

FREEKAOYAN

(6) 设随机变量 X 服从参数为 λ 的指数分布，则 $P\{X>\sqrt{DX}\}=$ $\underline{\dfrac{1}{e}}$.

【分析】 根据指数分布的分布函数和方差立即得正确答案.

【详解】 由于 $DX=\dfrac{1}{\lambda^2}$，X 的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}1-e^{-\lambda x}, & x>0,\\ 0, & x\le 0.\end{cases}$$

故

$$P\{X>\sqrt{DX}\}=1-P\{X\le\sqrt{DX}\}=1-P\{X\le\frac{1}{\lambda}\}=1-F(\frac{1}{\lambda})=\frac{1}{e}.$$

【评注】本题是对重要分布，即指数分布的考查，属基本题型.

二、选择题（本题共 6 小题，每小题 4 分，满分 24 分. 每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求，把所选项前的字母填在题后的括号内）

(7) 函数 $f(x)=\dfrac{|x|\sin(x-2)}{x(x-1)(x-2)^2}$ 在下列哪个区间内有界.

(A) $(-1,0)$. (B) $(0,1)$. (C) $(1,2)$. (D) $(2,3)$. [A]

【分析】如 $f(x)$在(a,b)内连续，且极限 $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to b^-}f(x)$ 存在，则函数 $f(x)$ 在(a,b)内有界.

【详解】当 $x\ne 0,1,2$ 时，$f(x)$连续，而 $\lim\limits_{x\to -1^+}f(x)=-\dfrac{\sin 3}{18}$，$\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=-\dfrac{\sin 2}{4}$，

$\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\dfrac{\sin 2}{4}$，$\lim\limits_{x\to 1}f(x)=\infty$，$\lim\limits_{x\to 2}f(x)=\infty$，

所以，函数 $f(x)$在$(-1,0)$内有界，故选(A).

【评注】一般地，如函数 $f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续，则 $f(x)$在闭区间$[a,b]$上有界；如函数 $f(x)$在开区间(a,b)内连续，且极限 $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to b^-}f(x)$ 存在，则函数 $f(x)$ 在开区间(a,b)内有界.

完全类似的例题见《数学题型集粹与练习题集》P4 例 1.10，《数学四临考演习》P51 第 15 题.

(8) 设 $f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内有定义，且 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=a$，

$$g(x)=\begin{cases}f(\frac{1}{x}), & x\ne 0\\ 0, & x=0\end{cases}，\text{则}$$

(A) $x=0$ 必是 $g(x)$的第一类间断点. (B) $x=0$ 必是 $g(x)$的第二类间断点.

(C) $x=0$ 必是 $g(x)$的连续点.

(D) $g(x)$在点 $x=0$ 处的连续性与 a 的取值有关. [D]

FREEKAOYAN

【分析】考查极限 $\lim\limits_{x\to 0} g(x)$ 是否存在，如存在，是否等于 $g(0)$即可，通过换元 $u=\dfrac{1}{x}$，

可将极限 $\lim\limits_{x\to 0} g(x)$ 转化为 $\lim\limits_{x\to \infty} f(x)$.

【详解】因为 $\lim\limits_{x\to 0} g(x)=\lim\limits_{x\to 0} f(\dfrac{1}{x})=\lim\limits_{u\to \infty} f(u)=a$(令 $u=\dfrac{1}{x}$)，又 $g(0)=0$，所以，

当 $a=0$ 时， $\lim\limits_{x\to 0} g(x)=g(0)$，即 $g(x)$在点 $x=0$ 处连续，当 $a\neq 0$ 时，

$\lim\limits_{x\to 0} g(x)\neq g(0)$，即 $x=0$ 是 $g(x)$的第一类间断点，因此，$g(x)$在点 $x=0$ 处的连续性与 a 的取值有关，故选(D).

【评注】本题属于基本题型，主要考查分段函数在分界点处的连续性.

完全类似的例题见《数学复习指南》P41 例 1.70，《数学题型集粹与练习题集》P20 例 1.35.

(9) 设 $f(x)=|x(1-x)|$，则

(A) $x=0$ 是 $f(x)$的极值点，但$(0,0)$不是曲线 $y=f(x)$的拐点.

(B) $x=0$ 不是 $f(x)$的极值点，但$(0,0)$是曲线 $y=f(x)$的拐点.

(C) $x=0$ 是 $f(x)$的极值点，且$(0,0)$是曲线 $y=f(x)$的拐点.

(D) $x=0$ 不是 $f(x)$的极值点，$(0,0)$也不是曲线 $y=f(x)$的拐点. [C]

【分析】由于 $f(x)$在 $x=0$ 处的一、二阶导数不存在，可利用定义判断极值情况，

考查 $f(x)$在 $x=0$ 的左、右两侧的二阶导数的符号，判断拐点情况.

【详解】设 $0<\delta<1$，当 $x\in(-\delta,0)\cup(0,\delta)$时，$f(x)>0$，而 $f(0)=0$，所以 $x=0$ 是 $f(x)$的极小值点.

显然，$x=0$ 是 $f(x)$的不可导点. 当 $x\in(-\delta,0)$时，$f(x)=-x(1-x)$， $f''(x)=2>0$，

当 $x\in(0,\delta)$时，$f(x)=x(1-x)$， $f''(x)=-2<0$，所以$(0,0)$是曲线 $y=f(x)$的拐点.

故选(C).

【评注】对于极值情况，也可考查 $f(x)$在 $x=0$ 的某空心邻域内的一阶导数的符号来判断.

完全类似的例题见《数学复习指南》P141 例 6.9，《考研数学大串讲》P96 例 5.

(10) 设 $f(x)=\begin{cases}1, x>0\\ 0, x=0\\ -1, x<0\end{cases}$， $F(x)=\int_0^x f(t)dt$，则

(A) $F(x)$在 $x=0$ 点不连续.

(B) $F(x)$在$(-\infty,+\infty)$内连续，但在 $x=0$ 点不可导.

(C) $F(x)$在$(-\infty,+\infty)$内可导，且满足 $F'(x)=f(x)$.

(D) $F(x)$在$(-\infty,+\infty)$内可导，但不一定满足 $F'(x)=f(x)$. [B]

【分析】先求分段函数 $f(x)$的变限积分 $F(x)=\int_0^x f(t)dt$，再讨论函数 $F(x)$的连续性与可导性即可.

【详解】当 $x<0$ 时， $F(x)=\int_0^x (-1)dt=-x$；

当 $x>0$ 时，$F(x)=\int_0^x 1dt = x$，当 $x=0$ 时，$F(0)=0$. 即 $F(x)=|x|$,

显然，$F(x)$在$(-\infty, +\infty)$内连续，但在 $x=0$ 点不可导. 故选(B).

【评注】本题主要考查求分段函数的变限积分. 对于绝对值函数：$|x-x_0|$在 $x=x_0$ 处不可导；$f(x)=x^n|x-x_0|$在 $x=x_0$ 处有 n 阶导数，则 $f^{(n)}(x)=(n+1)!|x-x_0|$.

完全类似的例题见《数学复习指南》P95 例 4.15,《考研数学大串讲》P42 例 15.

(11) 设 $f'(x)$ 在[a , b]上连续，且 $f'(a)>0,\ f'(b)<0$，则下列结论中错误的是

(A) 至少存在一点 $x_0\in(a,b)$，使得 $f(x_0)>f(a)$.

(B) 至少存在一点 $x_0\in(a,b)$，使得 $f(x_0)>f(b)$.

(C) 至少存在一点 $x_0\in(a,b)$，使得 $f'(x_0)=0$.

(D) 至少存在一点 $x_0\in(a,b)$，使得 $f(x_0)=0$. [D]

【分析】利用介值定理与极限的保号性可得到三个正确的选项，由排除法可选出错误选项.

【详解】首先，由已知 $f'(x)$ 在[a , b]上连续，且 $f'(a)>0,\ f'(b)<0$，则由介值定理，

至少存在一点 $x_0\in(a,b)$，使得 $f'(x_0)=0$；

另外，$f'(a)=\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}>0$，由极限的保号性，至少存在一点 $x_0\in(a,b)$

使得 $\dfrac{f(x_0)-f(a)}{x_0-a}>0$，即 $f(x_0)>f(a)$. 同理，至少存在一点 $x_0\in(a,b)$

使得 $f(x_0)>f(b)$. 所以，(A) (B) (C)都正确，故选(D).

【评注】 本题综合考查了介值定理与极限的保号性，有一定的难度.

完全类似的例题见《数学复习指南》P130 例 5.8,《数学题型集粹与练习题集》P70 例 5.4.

(12) 设 n 阶矩阵 A 与 B 等价, 则必须

(A) 当 $|A|=a(a\neq 0)$ 时, $|B|=a$.   (B) 当 $|A|=a(a\neq 0)$ 时, $|B|=-a$.

(C) 当 $|A|\neq 0$ 时, $|B|=0$.   (D) 当 $|A|=0$ 时, $|B|=0$.   [D]

【分析】 利用矩阵 A 与 B 等价的充要条件: $r(A)=r(B)$ 立即可得.

【详解】因为当 $|A|=0$ 时，$r(A)<n$，又 A 与 B 等价, 故 $r(B)<n$，即 $|B|=0$，从而选(D).

【评注】本题是对矩阵等价、行列式的考查, 属基本题型.

FREEKAOYAN

相关知识要点见《数学复习指南》P.284-286.

(13) 设随机变量 X 服从正态分布 $N(0,1)$，对给定的 $\alpha \in (0,1)$，数 u_α 满足 $P\{X > u_\alpha\} = \alpha$，若 $P\{|X| < x\} = \alpha$，则 x 等于

(A) $u_{\frac{\alpha}{2}}$.　(B) $u_{\frac{1-\alpha}{2}}$.　(C) $u_{1-\frac{\alpha}{2}}$.　(D) $u_{1-\alpha}$.　[B]

【分析】 利用标准正态分布密度曲线的对称性和几何意义即得.

【详解】 由 $P\{|X| < x\} = \alpha$，以及标准正态分布密度曲线的对称性可得

$$P\{X > x\} = \frac{1-\alpha}{2}.$$

故正确答案为(B).

【评注】本题是对标准正态分布的性质，严格地说它的上分位数概念的考查.

见《数学复习指南》P.489 分位数概念的注释.

(14) 设随机变量 $X_1, X_2, \cdots, X_n \ (n > 1)$ 独立同分布，且方差 $\sigma^2 > 0$. 令随机变量 $Y = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$，则

(A) $D(X_1 + Y) = \frac{n+2}{n}\sigma^2$.　(B) $D(X_1 - Y) = \frac{n+2}{n}\sigma^2$.

(C) $Cov(X_1, Y) = \frac{\sigma^2}{n}$.　(D) $Cov(X_1, Y) = \sigma^2$.　[C]

【分析】 利用协方差的性质立即得正确答案..

【详解】 由于随机变量 $X_1, X_2, \cdots, X_n \ (n > 1)$ 独立同分布，于是可得

$$Cov(X_1, Y) = Cov(X_1, \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i) = \frac{1}{n} Cov(X_1, \sum_{i=1}^{n} X_i)$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Cov(X_1, X_i) = \frac{1}{n} Cov(X_1, X_1)$$

$$= \frac{1}{n} D(X_1) = \frac{1}{n}\sigma^2.$$

故正确答案为(C).

【评注】本题是对协方差性质的考查，属于基本题.

相关知识点见《数学复习指南》P.454，类似的例题可见《2004 文登模拟试题》数三的第一套第 23 题.

三、解答题(本题共 9 小题，满分 94 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.)

(15) (本题满分 8 分)

FREEKAOYAN

求 $\lim\limits_{x\to 0}(\frac{1}{\sin^2 x}-\frac{\cos^2 x}{x^2})$.

【分析】先通分化为“$\frac{0}{0}$”型极限，再利用等价无穷小与罗必达法则求解即可.

【详解】$\lim\limits_{x\to 0}(\frac{1}{\sin^2 x}-\frac{\cos^2 x}{x^2})=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2-\sin^2 x\cos^2 x}{x^2\sin^2 x}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x^2-\frac{1}{4}\sin^2 2x}{x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{2x-\frac{1}{2}\sin 4x}{4x^3}.$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 4x}{6x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}(4x)^2}{6x^2}=\frac{4}{3}.$$

【评注】本题属于求未定式极限的基本题型，对于“$\frac{0}{0}$”型极限，应充分利用等价无穷小替换来简化计算.

完全类似的例题见《数学复习指南》P28 例 1.45.

(16) (本题满分 8 分)

求 $\iint\limits_D(\sqrt{x^2+y^2}+y)d\sigma$，其中 D 是由圆 $x^2+y^2=4$ 和 $(x+1)^2+y^2=1$ 所围成的平面区域(如图).

【分析】首先，将积分区域 D 分为大圆 $D_1=\{(x,y)\mid x^2+y^2\le 4\}$ 减去小圆

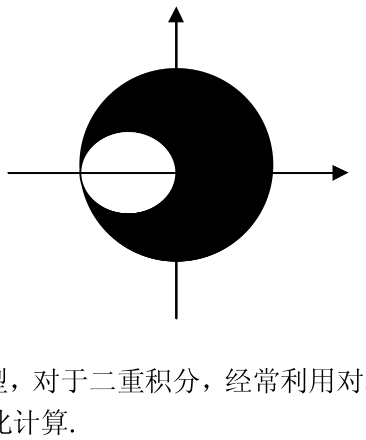
$D_2=\{(x,y)\mid (x+1)^2+y^2\le 1\}$，再利用对称性与极坐标计算即可.

【详解】令 $D_1=\{(x,y)\mid x^2+y^2\le 4\}, D_2=\{(x,y)\mid (x+1)^2+y^2\le 1\}$，

由对称性，$\iint\limits_D y d\sigma=0$.

$$\iint\limits_D\sqrt{x^2+y^2}d\sigma=\iint\limits_{D_1}\sqrt{x^2+y^2}d\sigma-\iint\limits_{D_2}\sqrt{x^2+y^2}d\sigma$$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^2 r^2dr-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}d\theta\int_0^{-2\cos\theta}r^2dr.$$



$$=\frac{16\pi}{3}-\frac{32}{9}=\frac{16}{9}(3\pi-2)$$

所以，$\iint\limits_D(\sqrt{x^2+y^2}+y)d\sigma=\frac{16}{9}(3\pi-2)$.

【评注】本题属于在极坐标系下计算二重积分的基本题型，对于二重积分，经常利用对称性及将一个复杂区域划分为两个或三个简单区域来简化计算.

FREEKAOYAN

完全类似的例题见《数学题型集粹与练习题集》P101 例 8.12(1)，《数学四临考演习》P16 第 17 题，《考研数学大串讲》P79 例 2.

(17) (本题满分 8 分)

设 $f(u,v)$具有连续偏导数，且满足 $f_u'(u,v)+f_v'(u,v)=uv$.

求 $y(x)=e^{-2x}f(x,x)$ 所满足的一阶微分方程，并求其通解.

【分析】先求 y'，利用已知关系 $f_u'(u,v)+f_v'(u,v)=uv$，可得到关于 y 的一阶微分方程.

【详解】$y'=-2e^{-2x}f(x,x)+e^{-2x}f_u'(x,x)+e^{-2x}f_v'(x,x)=-2y+x^2e^{-2x}$，

因此，所求的一阶微分方程为 $y'+2y=x^2e^{-2x}$.

解得 $y=e^{-\int 2dx}(\int x^2e^{-2x}e^{\int 2dx}dx+C)=(\frac{1}{3}x^3+C)e^{-2x}$ (C 为任意常数).

【评注】 本题综合了复合函数求偏导数与微分方程，但是，求偏导数与解微分方程都是基本题型.

完全类似的例题见《数学复习指南》P243 例 11.11，《数学题型集粹与练习题集》P95 例 7.13、例 7.14，《数学四临考演习》P3 第 16 题，《考研数学大串讲》P76 例 14.

(18) (本题满分 9 分)

设某商品的需求函数为 Q = 100 – 5P，其中价格 P ∈ (0 , 20)，Q 为需求量.

(I) 求需求量对价格的弹性 E_d (E_d > 0)；

(II) 推导 $\frac{dR}{dP}=Q(1-E_d)$ (其中 R 为收益)，并用弹性 E_d 说明价格在何范围内变化时，降低价格反而使收益增加.

【分析】由于 $E_d>0$，所以 $E_d=\left|\frac{P}{Q}\frac{dQ}{dP}\right|$；由 Q = PQ 及 $E_d=\left|\frac{P}{Q}\frac{dQ}{dP}\right|$ 可推导

$\frac{dR}{dP}=Q(1-E_d)$.

【详解】(I) $E_d=\left|\frac{P}{Q}\frac{dQ}{dP}\right|=\frac{P}{20-P}$.

(II) 由 R = PQ，得

$$\frac{dR}{dP}=Q+P\frac{dQ}{dP}=Q(1+\frac{P}{Q}\frac{dQ}{dP})=Q(1-E_d).$$

又由 $E_d=\frac{P}{20-P}=1$，得 P = 10.

当 10 < P < 20 时，$E_d>1$，于是 $\frac{dR}{dP}<0$，

故当 10 < P < 20 时，降低价格反而使收益增加.

FREEKAOYAN

【评注】当 $E_d > 0$ 时，需求量对价格的弹性公式为 $E_d = \left|\frac{P}{Q}\frac{dQ}{dP}\right| = -\frac{P}{Q}\frac{dQ}{dP}$.

利用需求弹性分析收益的变化情况有以下四个常用的公式：

$dR = (1-E_d)Qdp$，$\frac{dR}{dp} = (1-E_d)Q$，$\frac{dR}{dQ} = (1-\frac{1}{E_d})p$，

$\frac{ER}{Ep} = 1-E_d$ (收益对价格的弹性).

这些公式在文登学校辅导材料系列之五《数学应用专题(经济类)》有详细的总结.
完全类似的例题见《数学复习指南》P255 例 12.4，《数学应用专题(经济类)》P2.

(19) (本题满分 9 分)

设 $F(x) = \begin{cases} e^{2x}, & x \le 0 \\ e^{-2x}, & x > 0 \end{cases}$，$S$ 表示夹在 x 轴与曲线 $y = F(x)$之间的面积. 对任何 $t > 0$，

$S_1(t)$表示矩形$-t \le x \le t$，$0 \le y \le F(t)$的面积. 求

(I) $S(t) = S - S_1(t)$ 的表达式；

(II) $S(t)$的最小值.

【分析】曲线 $y = F(x)$关于 y 轴对称，x 轴与曲线 $y = F(x)$围成一无界区域，所以，面积 S 可用广义积分表示.

【详解】(I) $S = 2\int_0^{+\infty} e^{-2x}dx = -e^{-2x}\Big|_0^{+\infty} = 1$，

$$S_1(t) = 2te^{-2t},$$

因此 $S(t) = 1-2te^{-2t}$，$t \in (0, +\infty)$.

(II) 由于 $S'(t) = -2(1-2t)e^{-2t}$，

故 $S(t)$的唯一驻点为 $t = \frac{1}{2}$，

又 $S''(t) = 8(1-t)e^{-2t}$，$S''(\frac{1}{2}) = \frac{4}{e} > 0$，

所以，$S(\frac{1}{2}) = 1-\frac{1}{e}$ 为极小值，它也是最小值.

【评注】本题综合了面积问题与极值问题，但这两问题本身并不难，属于基本题型.
完全类似的例题见《数学复习指南》P143 例 6.13，《数学题型集粹与练习题集》P80 例 6.11.

(20) (本题满分 13 分)

设线性方程组

FREEKAOYAN

$$\begin{cases} x_1 + \lambda x_2 + \mu x_3 + x_4 = 0, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 0, \\ 3x_1 + (2+\lambda)x_2 + (4+\mu)x_3 + 4x_4 = 1, \end{cases}$$

已知 $(1,-1,1,-1)^T$ 是该方程组的一个解，试求

(Ⅰ) 方程组的全部解，并用对应的齐次线性方程组的基础解系表示全部解;

(Ⅱ) 该方程组满足 $x_2 = x_3$ 的全部解.

【分析】 含未知参数的线性方程组的求解, 当系数矩阵为非方阵时一般用初等行变换法化增广矩阵为阶梯形, 然后对参数进行讨论. 由于本题已知了方程组的一个解, 于是可先由它来(部分)确定未知参数.

【详解】 将 $(1,-1,1,-1)^T$ 代入方程组，得 $\lambda = \mu$. 对方程组的增广矩阵 $\overline{A}$ 施以初等行变换, 得

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} 1 & \lambda & \lambda & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & 2+\lambda & 2+\lambda & 4 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2\lambda & 1-\lambda & -\lambda \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2(2\lambda-1) & 2\lambda-1 & 2\lambda-1 \end{pmatrix},$$

(Ⅰ) 当 $\lambda \neq \frac{1}{2}$ 时，有

$$\overline{A} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

$r(A) = r(\overline{A}) = 3 < 4$，故方程组有无穷多解，且 $\xi_0 = (0,-\frac{1}{2},\frac{1}{2},0)^T$ 为其一个特解，

对应的齐次线性方程组的基础解系为 $\eta = (-2,1,-1,2)^T$，故方程组的全部解为

$$\xi = \xi_0 + k\eta = (0,-\frac{1}{2},\frac{1}{2},0)^T + k(-2,1,-1,2)^T \qquad (k \text{ 为任意常数}).$$

当 $\lambda = \frac{1}{2}$ 时，有

$$\overline{A} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$r(A) = r(\overline{A}) = 2 < 4$，故方程组有无穷多解，且 $\xi_0 = (-\frac{1}{2},1,0,0)^T$ 为其一个特解，

对应的齐次线性方程组的基础解系为 $\eta_1 = (1,-3,1,0)^T$，$\eta_2 = (-1,-2,0,2)^T$，

FREEKAOYAN

故方程组的全部解为

$$\xi = \xi_0 + k_1\eta_1 + k_2\eta_2 = (-\frac{1}{2},1,0,0)^T + k_1(1,-3,1,0)^T + k_2(-1,-2,0,2)^T$$

(k_1, k_2 为任意常数).

(Ⅱ) 当 $\lambda \neq \frac{1}{2}$ 时，由于 $x_2 = x_3$，即

$$-\frac{1}{2} + k = \frac{1}{2} - k\text{，}$$

解得 $k = \frac{1}{2}$，故方程组的解为

$$\xi = (1,-\frac{1}{2},\frac{1}{2},0)^T + \frac{1}{2}(-2,1,-1,2)^T = (-1,0,0,1)^T \ .$$

当 $\lambda = \frac{1}{2}$ 时，由于 $x_2 = x_3$，即

$$1 - 3k_1 - 2k_2 = k_1\text{，}$$

解得 $k_1 = \frac{1}{4} - \frac{1}{2}k_2$，故方程组的全部解为

$$\xi = (-\frac{1}{2},1,0,0)^T + (\frac{1}{4} - \frac{1}{2}k_2)(1,-3,1,0)^T + k_2(-1,-2,0,2)^T$$

$$= (-\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{4},0)^T + k_2(-\frac{3}{2},-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},2)^T\text{，}\quad (k_2 \text{ 为任意常数}).$$

【评注】: (1) 含未知参数的线性方程组的求解是历年考试的重点, 几乎年年考, 务必很好掌握.

完全类似的例题可见《数学复习指南》P.341 例 4.9, 《考研数学大串讲》(2002 版, 世界图书出版公司)P.161 例 10, 以及文登数学辅导班上讲授的例子.

(2) 对于题(Ⅱ), 实际上就是在原来方程组中增加一个方程, 此时新的方程组当 $\lambda \neq \frac{1}{2}$ 时有惟一解, 当 $\lambda = \frac{1}{2}$ 时有无穷多解.

(3) 在题(Ⅱ)中，当 $\lambda = \frac{1}{2}$ 时，解得 $k_2 = \frac{1}{2} - 2k_1$，方程组的全部解也可以表示为

$$\xi = (-1,0,0,1)^T + k_1(3,1,1,-4)^T\text{，}\quad (k_1 \text{ 为任意常数}).$$

(21) (本题满分 13 分)

设三阶实对称矩阵 A 的秩为 2，$\lambda_1 = \lambda_2 = 6$ 是 A 的二重特征值．若

$\alpha_1 = (1,1,0)^T$，$\alpha_2 = (2,1,1)^T$，$\alpha_3 = (-1,2,-3)^T$，都是 A 的属于特征值 6 的特征向量.

(Ⅰ) 求 A 的另一特征值和对应的特征向量；

(Ⅱ) 求矩阵 A.

【分析】 由矩阵 A 的秩为 2, 立即可得 A 的另一特征值为 0. 再由实对称矩阵不同特征值所对应的特征向量正交可得相应的特征向量, 此时矩阵 A 也立即可得.

FREEKAOYAN

【详解】 (Ⅰ) 因为$\lambda_1=\lambda_2=6$是A的二重特征值，故A的属于特征值 6 的线性无关的特征向量有 2 个．由题设知$\alpha_1=(1,1,0)^T$，$\alpha_2=(2,1,1)^T$为A的属于特征值 6 的线性无关特征向量．

又A的秩为 2，于是$|A|=0$，所以A的另一特征值$\lambda_3=0$．设$\lambda_3=0$所对应的特征向量为$\alpha=(x_1,x_2,x_3)^T$，则有 $\alpha_1{}^T\alpha=0$，$\alpha_2{}^T\alpha=0$，即

$$\begin{cases} x_1+x_2 & =0, \\ 2x_1+x_2+x_3 & =0, \end{cases}$$

得基础解系为$\alpha=(-1,1,1)^T$，故A的属于特征值$\lambda_3=0$全部特征向量为

$$k\alpha=k(-1,1,1)^T \qquad (k\text{ 为任意不为零的常数}).$$

(Ⅱ) 令矩阵$P=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha)$，则

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}6&&\\&6&\\&&0\end{pmatrix},$$

所以

$$A=P\begin{pmatrix}6&&\\&6&\\&&0\end{pmatrix}P^{-1}=\begin{pmatrix}1&2&-1\\1&1&1\\0&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}6&&\\&6&\\&&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&-1\\ \frac{1}{3}&-\frac{1}{3}&\frac{2}{3}\\ -\frac{1}{3}&\frac{1}{3}&\frac{1}{3}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}4&2&2\\2&4&-2\\2&-2&4\end{pmatrix}.$$

【评注】 这是一个有关特征值和特征向量的逆问题, 即已知矩阵的部分特征值和特征向量, 要求另一部分特征值, 特征向量和矩阵. 这在历年考研题中还是首次出现.

但几乎原题可见《数学复习指南》P.362 例 5.8, 《考研数学大串讲》(2002 版, 世界图书出版公司)P.186 例 15 和例 16, 以及文登数学辅导班上讲授的例子.

(22) (本题满分 13 分)

设A,B为两个随机事件,且$P(A)=\frac{1}{4}$, $P(B|A)=\frac{1}{3}$, $P(A|B)=\frac{1}{2}$, 令

$$X=\begin{cases}1, & A\text{发生},\\ 0, & A\text{不发生},\end{cases} \qquad Y=\begin{cases}1, & B\text{发生},\\ 0, & B\text{不发生}.\end{cases}$$

求

(Ⅰ) 二维随机变量(X,Y)的概率分布;

(Ⅱ) X 与Y 的相关系数 ρ_{XY};

(Ⅲ) $Z=X^2+Y^2$ 的概率分布.

【分析】本题的关键是求出(X,Y)的概率分布，于是只要将二维随机变量(X,Y)的各取值对转化为随机事件A和B表示即可.

【详解】 (Ⅰ) 因为 $P(AB)=P(A)P(B|A)=\frac{1}{12}$， 于是 $P(B)=\frac{P(AB)}{P(A|B)}=\frac{1}{6}$，

则有 $P\{X=1,Y=1\}=P(AB)=\frac{1}{12}$，

$$P\{X=1,Y=0\}=P(A\overline{B})=P(A)-P(AB)=\frac{1}{6},$$

$$P\{X=0,Y=1\}=P(\overline{A}B)=P(B)-P(AB)=\frac{1}{12},$$

$$P\{X=0,Y=0\}=P(\overline{A}\cdot\overline{B})=1-P(A\cup B)=1-[P(A)+P(B)-P(AB)]=\frac{2}{3},$$

(或 $P\{X=0,Y=0\}=1-\frac{1}{12}-\frac{1}{6}-\frac{1}{12}=\frac{2}{3}$),

即(X,Y)的概率分布为：

X \ Y	0	1
0	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{12}$
1	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$

(Ⅱ) 方法一：因为 $EX=P(A)=\frac{1}{4}$， $EY=P(B)=\frac{1}{6}$， $E(XY)=\frac{1}{12}$，

$$EX^2=P(A)=\frac{1}{4},\quad EY^2=P(B)=\frac{1}{6},$$

$$DX=EX^2-(EX)^2=\frac{3}{16},\quad DY=EY^2-(EY)^2=\frac{5}{16},$$

$$Cov(X,Y)=E(XY)-EXEY=\frac{1}{24},$$

所以X 与Y 的相关系数 $\rho_{XY}=\frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{DX\cdot DY}}=\frac{1}{\sqrt{15}}=\frac{\sqrt{15}}{15}$.

方法二： X, Y 的概率分布分别为

X	0	1
P	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$

Y	0	1
P	$\frac{5}{6}$	$\frac{1}{6}$

则 $EX=\frac{1}{4},EY=\frac{1}{6}$， $DX=\frac{3}{16}$， DY=$\frac{5}{36}$, E(XY)=$\frac{1}{12}$,

故 $Cov(X,Y)=E(XY)-EX\cdot EY=\frac{1}{24}$，从而

$$\rho_{XY}=\frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{DX}\cdot\sqrt{DY}}=\frac{\sqrt{15}}{15}.$$

(III) Z 的可能取值为：0，1，2 ．

$$P\{Z=0\}=P\{X=0,Y=0\}=\frac{2}{3},$$

$$P\{Z=1\}=P\{X=1,Y=0\}+P\{X=0,Y=1\}=\frac{1}{4},$$

$$P\{Z=2\}=P\{X=1,Y=1\}=\frac{1}{12},$$

即 Z 的概率分布为：

Z	0	1	2
P	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{12}$

【评注】本题考查了二维离散随机变量联合概率分布，数字特征和二维离散随机变量函数的分布等计算问题，属于综合性题型.

原题可见《数学复习指南》P.434 例 2.36, 《考研数学大串讲》(2002 版, 世界图书出版公司)P.240 例 3, 以及文登数学辅导班上讲授的例子.

(23) (本题满分 13 分)

设随机变量 X 在区间 $(0,1)$ 上服从均匀分布，在 $X=x(0<x<1)$ 的条件下，随机变量 Y 在区间 $(0,x)$ 上服从均匀分布，求

(Ⅰ) 随机变量 X 和 Y 的联合概率密度;

(Ⅱ) Y 的概率密度;

(III) 概率 $P\{X+Y>1\}$.

【分析】正确理解已知条件, 即条件密度是求解本题的关键.

【详解】 (Ⅰ) X 的概率密度为

$$f_X(x)=\begin{cases}1, & 0<x<1,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

在 $X=x(0<x<1)$ 的条件下，Y 的条件概率密度为

$$f_{Y|X}(y\mid x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}, & 0<y<x,\\ 0, & 其他,\end{cases}$$

当$0<y<x<1$时，随机变量X和Y的联合概率密度为

$$f(x,y)=f_X(x)f_{Y|X}(y\mid x)=\frac{1}{x}$$

在其它点(x,y)处，有$f(x,y)=0$，即

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}, & 0<y<x<1,\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

(Ⅱ) 当$0<y<1$时，Y的概率密度为

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx=\int_y^1\frac{1}{x}dx=-\ln y；$$

当$y\le 0$或$y\ge 1$时，$f_Y(y)=0$. 因此

$$f_Y(y)=\begin{cases}-\ln y, & 0<y<1,\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

(III) $$P\{X+Y>1\}=\iint\limits_{X+Y>1}f(x,y)dxdy=\int_{\frac{1}{2}}^1dx\int_{1-x}^x\frac{1}{x}dy$$

$$=\int_{\frac{1}{2}}^1(2-\frac{1}{x})dx=1-\ln 2.$$

【评注】本题考查了二维连续型随机变量的边缘概率密度，条件概率密度，联合概率密度的相互关系，以及二维连续型随机变量取值于一个区域的概率的计算，属于综合性题型.

原题可见《考研数学大串讲》(2002 版，世界图书出版公司)P.242 例 5，以及文登数学辅导班上讲授的例子.

FREEKAOYAN