2003 年全国硕士研究生入学统一考试
理工数学一试题详解及评析

一、 填空题

（1） $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{\ln(1+x^2)}}=$_____.

【答】 $\frac{1}{\sqrt{e}}$.

【详解】 $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{\ln(1+x^2)}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{\ln(1+x^2)}\ln\cos x}$,

而 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\cos x}{\ln(1+x^2)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\cos x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{-\sin x}{\cos x}}{2x}=-\dfrac{1}{2}$,

故 原式=$e^{-\frac{1}{2}}=\dfrac{1}{\sqrt{e}}$.

（2） 曲面 $z=x^2+y^2$ 与平面 $2x+4y-z=0$ 平行的切平面的方程是_____.

【答】 $2x+4y-z=5$.

【详解】令 $F(x,y,z)=z-x^2-y^2$，则

$F'_x=-2x$， $F'_y=-2y$， $F'_z=1$.

设切点坐标为 (x_0,y_0,z_0)，则切平面的法矢量为 $\{-2x_0,-2y_0,1\}$，其与已知平面 $2x+4y-z=0$ 平行，因此有

$$\frac{-2x_0}{2}=\frac{-2y_0}{4}=\frac{1}{-1}.$$

可解得 $x_0=1, y_0=2$，

相应地有 $z_0=x_0^2+y_0^2=5.$

故所求的切平面方程为

$2(x-1)+4(y-2)-(z-5)=0$，即 $2x+4y-z=5$.

（3） 设 $x^2=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\cos nx(-\pi\le x\le\pi)$，则 $a_2=$_____.

【答】 1.

【详解】根据余弦级数的定义，有

$$\begin{aligned}a_2&=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x^2\cdot\cos 2xdx=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}x^2d\sin 2x\\&=\frac{1}{\pi}[x^2\sin 2x\Big|_0^{\pi}-\int_0^{\pi}\sin 2x\cdot 2xdx]\\&=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}xd\cos 2x=\frac{1}{\pi}[x\cos 2x\Big|_0^{\pi}-\int_0^{\pi}\cos 2xdx]\\&=1.\end{aligned}$$

（4）从 R^2 的基 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$ 到基 $\beta_1=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},\beta_2=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ 的过渡矩阵为_____.

【答】 $\begin{pmatrix}2&3\\-1&-2\end{pmatrix}$.

【详解】 根据定义，从 R^2 的基 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$ 到基 $\beta_1=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},\beta_2=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ 的过渡矩阵为

$$\text{P}=[\alpha_1,\alpha_2]^{-1}[\beta_1,\beta_2]=\begin{bmatrix}1&1\\0&-1\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}1&1\\1&2\end{bmatrix}.$$

$$=\begin{bmatrix}1&1\\0&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1\\1&2\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}2&3\\-1&-2\end{bmatrix}.$$

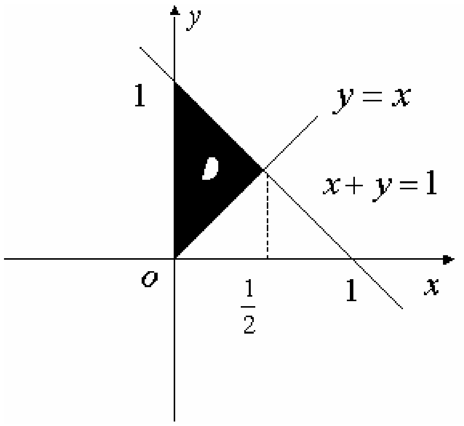
（5）设二维随机变量(X,Y)的概率密度为 $f(x,y)=\begin{cases}6x,0\le x\le y\le 1,\\0,\quad\text{其他},\end{cases}$，$P\{X+Y\le 1\}=$

【答】 $\frac{1}{4}$.

【详解】由题设，有

$$P\{X+Y\le 1\}=\iint\limits_{x+y\le 1}f(x,y)dxdy=\int_0^{\frac{1}{2}}dx\int_x^{1-x}6xdy$$

$$=\int_0^{\frac{1}{2}}(6x-12x^2)dx=\frac{1}{4}.$$



（6） 已知一批零件的长度 X (单位：cm)服从正态分布 $N(\mu,1)$，从中随机地抽取 16 个零件，得到长度的平均值为 40 (cm)，则 μ 的置信度为 0.95 的置信区间是_____.

【答】 $(39.51, 40.49)$.

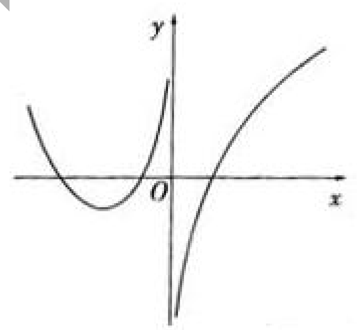
【详解】由题设，$1-\alpha=0.95$，可见 $\alpha=0.05$. 于是查标准正态分布表知 $u_{\frac{\alpha}{2}}=1.96$. 本题 n=16,

$\bar{x}=40$，因此，根据 $P\{\left|\dfrac{\bar{X}-\mu}{1/\sqrt{n}}\right|<1.96\}=0.95$，有

$P\{\left|\dfrac{40-\mu}{1/\sqrt{16}}\right|<1.96\}=0.95$，即 $P\{39.51, 40.49\}=0.95$，故 μ 的置信度为 0.95 的置信区间是 $(39.51, 40.49)$.

二、 选择题

（1） 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续，其导函数的图形如图所示，则 $f(x)$ 有



(A) 一个极小值点和两个极大值点.

(B) 两个极小值点和一个极大值点.

(C) 两个极小值点和两个极大值点.

(D) 三个极小值点和一个极大值点.

【 】

【答】 应选（C）.

【详解】 根据导函数的图形可知，一阶导数为零的点有 3 个，而 $x=0$ 则是导数不存在的点.三个一阶导数为零的点左右两侧导数符号不一致，必为极值点，且两个极小值点，一个极大值点；在 $x=0$ 左侧一阶导数为正，右侧一阶导数为负，可见 $x=0$ 为极大值点，故 $f\left(x\right)$ 共有两个极小值点和两个极大值点，应选(C).

（2）设 $\{a_n\},\{b_n\},\{c_n\}$ 均为非负数列，且 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0,\lim\limits_{n\to\infty}b_n=1,\lim\limits_{n\to\infty}c_n=\infty$,则必有

(A) $a_n<b_n$ 对任意 n 成立.　　(B) $b_n<c_n$ 对任意 n 成立.

(C) 极限 $\lim\limits_{n\to\infty}a_nc_n$ 不存在.　　(D) 极限 $\lim\limits_{n\to\infty}b_nc_n$ 不存在.

【 】

【答】 应选(D).

【详解】 用举反例法，取 $a_n=\dfrac{2}{n}$，$b_n=1$，$c_n=\dfrac{1}{2}n(n=1,2,\cdots)$，则可立即排除(A),(B),(C)，因此正确选项为(D).

（3）已知函数 $f\left(x,y\right)$ 在点(0,0)的某个邻域内连续，且 $\lim\limits_{x\to0,y\to0}\dfrac{f(x,y)-xy}{(x^2+y^2)^2}=1$，则

(A) 点(0,0)不是 $f\left(x,y\right)$ 的极值点.

(B) 点(0,0)是 $f\left(x,y\right)$ 的极大值点.

(C) 点(0,0)是 $f\left(x,y\right)$ 的极小值点.

(E) 根据所给条件无法判断点(0,0)是否为 $f\left(x,y\right)$ 的极值点.

【 】

【答】 应选（A）.

【详解】由 $\lim\limits_{x\to0,y\to0}\dfrac{f(x,y)-xy}{(x^2+y^2)^2}=1$ 知，分子的极限必为零，从而有 $f\left(0,0\right)=0$，

$f(x,y)-xy\approx(x^2+y^2)^2$　($|x|,|y|$ 充分小时)，

于是

$$f(x,y)-f(0,0)\approx xy+(x^2+y^2)^2.$$

可见当 $y=x$ 且 $|x|$ 充分小时，$f(x,y)-f(0,0)\approx x^2+4x^4>0$；

而当 $y=-x$ 且 $|x|$ 充分小时，$f(x,y)-f(0,0)\approx -x^2+4x^4<0$.

故点(0,0)不是 $f\left(x,y\right)$ 的极值点，应选(A).

(4) 设向量组 I：$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 可由向量组 II：$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 线性表示，则

(A) 当 $r<s$ 时，向量组 II 必线性相关.　(B) 当 $r>s$ 时，向量组 II 必线性相关.

(C) 当 $r<s$ 时，向量组 I 必线性相关.　(D) 当 $r>s$ 时，向量组 I 必线性相关.

【 】

【答】 应选（D）.

【详解】 用排除法：如 $\alpha_1=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix},\beta_1=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\beta_2=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$，则 $\alpha_1=0\cdot\beta_1+0\cdot\beta_2$，但 β_1,β_2 线性无关，排除(A)；

$\alpha_1=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\beta_1=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$，则 α_1,α_2 可由 β_1 线性表示，但 β_1 线性无关，排除(B)；

$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\beta_1=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\beta_2=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$，$\alpha_1$ 可由 β_1,β_2 线性表示，但 α_1 线性无关，排除(C).

故正确选项为(D).

(5) 设有齐次线性方程组 $Ax=0$ 和 $Bx=0$，其中 A,B 均为 $m\times n$ 矩阵，现有 4 个命题：

① 若 $Ax=0$ 的解均是 $Bx=0$ 的解，则秩(A)≥秩(B)；

② 若秩(A)≥秩(B)，则 Ax=0 的解均是 Bx=0 的解；

③ 若 $Ax=0$ 与 $Bx=0$ 同解，则秩(A)=秩(B)；

④ 若秩(A)=秩(B)， 则 $Ax=0$ 与 $Bx=0$ 同解.

以上命题中正确的是

(A) ① ②.　(B) ① ③.

(C) ② ④.　(D) ③ ④.

【 】

【答】应选（B）.

【详解】 若 $Ax=0$ 与 $Bx=0$ 同解，则 n-秩(A)=n - 秩(B), 即秩(A)=秩(B)，命题③成立，可排除(A),(C)；

若秩(A)=秩(B)， 则不能推出 $Ax=0$ 与 $Bx=0$ 同解，如 $A=\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}$，则秩(A)=秩(B)=1，但 $Ax=0$ 与 $Bx=0$ 不同解，可见命题④不成立，排除(D).所以，答案选（B）.

(6) 设随机变量 $X\sim t(n)(n>1),Y=\dfrac{1}{X^2}$，则

(A) $Y\sim\chi^2(n)$.　(B) $Y\sim\chi^2(n-1)$.

(C) $Y\sim F(n,1)$.　(D) $Y\sim F(1,n)$.

【 】

【答】 应选（C）.

【详解】由题设知，$X=\dfrac{U}{\sqrt{V/n}}$，其中$U\sim N(0,1),V\sim\chi^2(n)$，于是

$$Y=\frac{1}{X^2}=\frac{V/n}{U^2}=\frac{V/n}{U^2/1},$$

这里$U^2\sim\chi^2(1)$，根据 F 分布的定义知$Y=\dfrac{1}{X^2}\sim F(n,1)$. 故应选(C).

分布类型	定义
χ^2 分布	$\chi^2(n)=\xi_1^2+\xi_2^2+\cdots+\xi_n^2,\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$ 是取自总体 $N(0,1)$ 的样本，n 为自由度
t 分布	$t(n)=\dfrac{U}{\sqrt{\dfrac{V}{n}}}U\sim N(0,1),V\sim\chi(n),n$ 为自由度
F 分布	$F(n_1,n_2)=\dfrac{\dfrac{U}{n_1}}{\dfrac{V}{n_2}},U\sim\chi^2(n_1),V\sim\chi^2(n_2)\quad n_1,n_2$ 为自由度

注：F 分布还有如下性质

$$F_{1-\alpha}(n_1,n_2)=\frac{1}{F_\alpha(n_2,n_1)},$$

$$\frac{1}{F}\sim F(n_2,n_1)$$

三 、过坐标原点作曲线 $y=\ln x$ 的切线，该切线与曲线 $y=\ln x$ 及 x 轴围成平面图形 D.

（1）求 D 的面积 A;

（2）求 D 绕直线 $x=e$ 旋转一周所得旋转体的体积V.

【详解】设切点的横坐标为 x_0，则曲线 y=lnx 在点$(x_0,\ln x_0)$处的切线方程是

$$y=\ln x_0+\frac{1}{x_0}(x-x_0).$$

由该切线过原点知 $\ln x_0-1=0$，从而 $x_0=e$. 所以该切线的方程为

$$y=\frac{1}{e}x.$$

平面图形 D 的面积

$$A=\int_0^1 (e^y-ey)dy=\frac{1}{2}e-1.$$

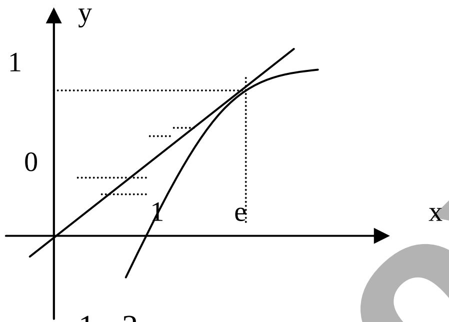
（2） 切线 $y=\frac{1}{e}x$ 与 x 轴及直线 $x=e$ 所围成的三角形绕直线 $x=e$ 旋转所得的圆锥体积为 $$V_1=\frac{1}{3}\pi e^2.$$

曲线 y=lnx 与 x 轴及直线 x=e 所围成的图形绕直线 x=e 旋转所得的旋转体体积为

$$V_2=\int_0^1 \pi(e-e^y)^2dy$$

因此所求旋转体的体积为

$$V=V_1-V_2=\frac{1}{3}\pi e^2-\int_0^1 \pi(e-e^y)^2dy=\frac{\pi}{6}(5e^2-12e+3).$$



四 、将函数 $f(x)=\arctan\frac{1-2x}{1+2x}$ 展开成 x 的幂级数，并求级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}$ 的和.

【详解】 因为

$$f'(x)=-\frac{2}{1+4x^2}=-2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n4^nx^{2n},x\in(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}).$$

又 $f(0)=\frac{\pi}{4}$，所以

$$f(x)=f(0)+\int_0^x f'(t)dt=\frac{\pi}{4}-2\int_0^x[\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n4^nt^{2n}]dt$$

$$=\frac{\pi}{4}-2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n4^n}{2n+1}x^{2n+1},x\in(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}).$$

因为级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}$ 收敛，函数 $f(x)$ 在 $x=\frac{1}{2}$ 处连续，所以

$$f(x)=\frac{\pi}{4}-2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n4^n}{2n+1}x^{2n+1},x\in(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}].$$

令 $x=\frac{1}{2}$，得

$$f(\frac{1}{2})=\frac{\pi}{4}-2\sum_{n=0}^{\infty}[\frac{(-1)4^n}{2n+1}\cdot\frac{1}{2^{2n+1}}]=\frac{\pi}{4}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}$$

再由 $f(\frac{1}{2})=0$，得

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}=\frac{\pi}{4}-f(\frac{1}{2})=\frac{\pi}{4}.$$

五 、已知平面区域 $D=\{(x,y)|0\le x\le\pi,0\le y\le\pi\}$，$L$ 为 D 的正向边界. 试证：

(1) $\oint_L xe^{\sin y}dy-ye^{-\sin x}dx=\oint_L xe^{-\sin y}dy-ye^{\sin x}dx$;

(2) $\oint_L xe^{\sin y}dy-ye^{-\sin x}dx\ge 2\pi^2$.

【详解】

方法一：

(1) 左边=$\int_0^{\pi}\pi e^{\sin y}dy-\int_{\pi}^{0}\pi e^{-\sin x}dx=\pi\int_0^{\pi}(e^{\sin x}+e^{-\sin x})dx$

右边=$\int_0^{\pi}\pi e^{-\sin y}dy-\int_{\pi}^{0}\pi e^{\sin x}dx=\pi\int_0^{\pi}(e^{\sin x}+e^{-\sin x})dx$

所以 $\oint_L xe^{\sin y}dy-ye^{-\sin x}dx=\oint_L xe^{-\sin y}dy-ye^{\sin x}dx$.

(2) 由于 $e^{\sin x}+e^{-\sin x}\ge 2$，故由（1）得

$$\oint_L xe^{\sin y}dy-ye^{-\sin x}dx=\pi\int_0^{\pi}(e^{\sin x}+e^{-\sin x})dx\ge 2\pi^2.$$

方法二：

（1） 根据格林公式，得

$$\oint_L xe^{\sin y}dy-ye^{-\sin x}dx=\iint_D(e^{\sin y}+e^{-\sin x})dxdy$$

$$\oint_L xe^{-\sin y}dy-ye^{\sin x}dx=\iint_D(e^{-\sin y}+e^{\sin x})dxdy$$

因为 D 具有轮换对称性，所以

$$\iint_D(e^{\sin y}+e^{-\sin x})dxdy=\iint_D(e^{-\sin y}+e^{\sin x})dxdy,$$

故

$$\oint_L xe^{\sin y}dy-ye^{-\sin x}dx=\oint_L xe^{-\sin y}dy-ye^{\sin x}dx$$

(2) 由(1)知

$$\oint_L xe^{\sin y}dy-ye^{-\sin x}dx=\iint_D(e^{\sin y}+e^{-\sin x})dxdy$$

$$=\iint_D e^{\sin y}dxdy+\iint_D e^{-\sin x}dxdy$$

$$=\iint_D e^{\sin x}dxdy+\iint_D e^{-\sin x}dxdy \quad \text{（利用轮换对称性）}$$

$$=\iint_D (e^{\sin x}+e^{-\sin x})dxdy \geq \iint_D 2dxdy = 2\pi^2.$$

六 、某建筑工程打地基时，需用汽锤将桩打进土层. 汽锤每次击打，都将克服土层对桩的阻力而作功. 设土层对桩的阻力的大小与桩被打进地下的深度成正比（比例系数为$k,k>0$），汽锤第一次击打将桩打进地下am. 根据设计方案，要求汽锤每次击打桩时所作的功与前一次击打时所作的功之比为常数$r\left(0<r<1\right)$. 问

(1) 汽锤击打桩 3 次后，可将桩打进地下多深？

(2) 若击打次数不限，汽锤至多能将桩打进地下多深？

（注：m 表示长度单位米.）

【详解】

(1) 设第n次击打后，桩被打进地下x_n，第n次击打时，汽锤所作的功为$W_n(n=1,2,3,\cdots)$. 由题设，当桩被打进地下的深度为x时，土层对桩的阻力的大小为kx，所以

$$W_1=\int_0^{x_1}kxdx=\frac{k}{2}x_1^2=\frac{k}{2}a^2$$

$$W_2=\int_{x_1}^{x_2}kxdx=\frac{k}{2}(x_2^2-x_1^2)=\frac{k}{2}(x_2^2-a^2).$$

由$W_2=rW_1$可得

$$x_2^2-a^2=ra^2$$

即 $\quad x_2^2=(1+r)a^2.$

$$W_3=\int_{x_2}^{x_3}kxdx=\frac{k}{2}(x_3^2-x_2^2)=\frac{k}{2}[x_3^2-(1+r)a^2].$$

由$W_3=rW_2=r^2W_1$可得

$$x_3^2-(1+r)a^2=r^2a^2,$$

从而 $\quad x_3=\sqrt{1+r+r^2}a$，

即汽锤击打 3 次后，可将桩打进地下$\sqrt{1+r+r^2}am$.

（2） 由归纳法，设$x_n=\sqrt{1+r+r^2+\cdots+r^{n-1}}a$，则

$$W_{n+1}=\int_{x_n}^{x_{n+1}}kxdx=\frac{k}{2}(x_{n+1}^2-x_n^2)$$

$$=\frac{k}{2}[x_{n+1}^2-(1+r+\cdots+r^{n-1})a^2].$$

由于$W_{n+1}=rW_n=r^2W_{n-1}=\cdots=r^nW_1$，故得

$$x_{n+1}^2-(1+r+\cdots+r^{n-1})a^2=r^n a^2,$$

从而 $x_{n+1}=\sqrt{1+r+\cdots+r^n}\,a=\sqrt{\dfrac{1-r^{n+1}}{1-r}}a.$

于是 $\lim\limits_{n\to\infty}x_{n+1}=\sqrt{\dfrac{1}{1-r}}a$,

即若击打次数不限，汽锤至多能将桩打进地下 $\sqrt{\dfrac{1}{1-r}}am.$

七 、设函数 $y=y(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内具有二阶导数，且 $y'\neq 0, x=x(y)$ 是 $y=y(x)$ 的反函数.

(1) 试将 $x=x(y)$ 所满足的微分方程 $\dfrac{d^2x}{dy^2}+(y+\sin x)(\dfrac{dx}{dy})^3=0$ 变换为 $y=y(x)$ 满足的微分方程；

(2) 求变换后的微分方程满足初始条件 $y(0)=0, y'(0)=\dfrac{3}{2}$ 的解.

【详解】 (1) 由反函数的求导公式知 $\dfrac{dx}{dy}=\dfrac{1}{y'}$，于是有

$$\frac{d^2x}{dy^2}=\frac{d}{dy}(\frac{dx}{dy})=\frac{d}{dx}(\frac{1}{y'})\cdot\frac{dx}{dy}=\frac{-y''}{y'^2}\cdot\frac{1}{y'}=-\frac{y''}{(y')^3}.$$

代入原微分方程得

$$y''-y=\sin x. \qquad (*)$$

(2) 方程(*)所对应的齐次方程 $y''-y=0$ 的通解为

$$Y=C_1e^x+C_2e^{-x}.$$

设方程(*)的特解为

$$y^*=A\cos x+B\sin x,$$

代入方程(*)，求得 $A=0, B=-\dfrac{1}{2}$，故 $y^*=-\dfrac{1}{2}\sin x$，从而 $y''-y=\sin x$ 的通解是

$$y=Y+y^*=C_1e^x+C_2e^{-x}-\frac{1}{2}\sin x.$$

由 $y(0)=0, y'(0)=\dfrac{3}{2}$,

得 $C_1=1, C_2=-1$.

故所求初值问题的解为

$$y=e^{x}-e^{-x}-\frac{1}{2}\sin x.$$

八 、设函数 $f\left(x\right)$ 连续且恒大于零，

$$F(t)=\frac{\iiint\limits_{\Omega(t)}f(x^2+y^2+z^2)dv}{\iint\limits_{D(t)}f(x^2+y^2)d\sigma}\text{，}\quad G(t)=\frac{\iint\limits_{D(t)}f(x^2+y^2)d\sigma}{\int_{-1}^{t}f(x^2)dx}\text{，}$$

其中 $\Omega(t)=\{(x,y,z)\big|x^2+y^2+z^2\le t^2\}$，$D(t)=\{(x,y)\big|x^2+y^2\le t^2\}$.

(1) 讨论 $F\left(t\right)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 内的单调性.

(2) 证明当 $t>0$ 时，$F(t)>\frac{2}{\pi}G(t)$.

【详解】 因为

$$F(t)=\frac{\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi}d\varphi\int_0^{t}f(r^2)r^2\sin\varphi dr}{\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{t}f(r^2)rdr}=\frac{2\int_0^{t}f(r^2)r^2dr}{\int_0^{t}f(r^2)rdr}$$

$$F'(t)=2\frac{tf(t^2)\int_0^{t}f(r^2)r(t-r)dr}{[\int_0^{t}f(r^2)rdr]^2}$$

所以在 $(0,+\infty)$ 上 $F'(t)>0$，故 $F\left(t\right)$ 在 $(0,+\infty)$ 内单调增加.

（2） 因

$$G(t)=\frac{\pi\int_0^{t}f(r^2)rdr}{\int_0^{t}f(r^2)dr}$$

要证明 $t>0$ 时 $F(t)>\frac{2}{\pi}G(t)$，只需证明 $t>0$ 时，$F(t)-\frac{2}{\pi}G(t)>0$，即

$$\int_0^{t}f(r^2)r^2dr\int_0^{t}f(r^2)dr-[\int_0^{t}f(r^2)rdr]^2>0.$$

令 $g(t)=\int_0^{t}f(r^2)r^2dr\int_0^{t}f(r^2)dr-[\int_0^{t}f(r^2)rdr]^2$，

则 $g'(t)=f(t^2)\int_0^{t}f(r^2)(t-r)^2dr>0$，

故 $g\left(t\right)$ 在 $(0,+\infty)$ 内单调增加.

因为 $g\left(t\right)$ 在 $t=0$ 处连续，所以当 $t>0$ 时，有 $g\left(t\right)>g\left(0\right)$.

又 $g\left(0\right)=0$，故当 $t>0$ 时，$g\left(t\right)>0$

因此，当$t>0$时，$F(t)>\dfrac{2}{\pi}G(t)$.

九、设矩阵$A=\begin{bmatrix}3&2&2\\2&3&2\\2&2&3\end{bmatrix}$，$P=\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&1\\0&0&1\end{bmatrix}$，$B=P^{-1}A^*P$，求$B+2E$的特征值与特征向量，其中$A^*$为$A$的伴随矩阵，$E$为3阶单位矩阵.

【详解】　方法一：

经计算可得

$$A^*=\begin{bmatrix}5&-2&-2\\-2&5&-2\\-2&-2&5\end{bmatrix},\quad P^{-1}=\begin{bmatrix}0&1&-1\\1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix},$$

$$B=P^{-1}A^*P=\begin{bmatrix}7&0&0\\-2&5&-4\\-2&-2&3\end{bmatrix}.$$

从而

$$B+2E=\begin{bmatrix}9&0&0\\-2&7&-4\\-2&-2&5\end{bmatrix},$$

$$\left|\lambda E-(B+2E)\right|=\begin{vmatrix}\lambda-9&0&0\\2&\lambda-7&4\\2&2&\lambda-5\end{vmatrix}=(\lambda-9)^2(\lambda-3)$$

故$B+2E$的特征值为$\lambda_1=\lambda_2=9,\lambda_3=3$.

当$\lambda_1=\lambda_2=9$时，解$(9E-A)x=0$，得线性无关的特征向量为

$$\eta_1=\begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix},\quad \eta_2=\begin{bmatrix}-2\\0\\1\end{bmatrix},$$

所以属于特征值$\lambda_1=\lambda_2=9$的所有特征向量为

$$k_1\eta_1+k_2\eta_2=k_1\begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix}+k_2\begin{bmatrix}-2\\0\\1\end{bmatrix}$$，其中k_1,k_2是不全为零的任意常数.

当$\lambda_3=3$时，解$(3E-A)x=0$，得线性无关的特征向量为

$$\eta_3=\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix},$$

所以属于特征值$\lambda_3=3$的所有特征向量为$k_3\eta_3=k_3\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}$，其中$k_3\neq 0$为任意常数.

方法二：设A的特征值为λ，对应特征向量为η，即 $A\eta=\lambda\eta$. 由于$|A|=7\neq 0$，所以$\lambda\neq 0$.

又因 $A^*A=|A|E$，故有 $A^*\eta=\frac{|A|}{\lambda}\eta.$

于是有 $B(P^{-1}\eta)=P^{-1}A^*P(P^{-1}\eta)=\frac{|A|}{\lambda}(P^{-1}\eta)$，

$$(B+2E)P^{-1}\eta=(\frac{|A|}{\lambda}+2)P^{-1}\eta.$$

因此，$\frac{|A|}{\lambda}+2$为 B+2E 的特征值，对应的特征向量为$P^{-1}\eta.$

由于 $|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-3 & -2 & -2\\ -2 & \lambda-3 & -2\\ -2 & -2 & \lambda-3\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2(\lambda-7)$，

故 A 的特征值为$\lambda_1=\lambda_2=1,\lambda_3=7.$

当$\lambda_1=\lambda_2=1$时，对应的线性无关特征向量可取为$\eta_1=\begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix}$， $\eta_2=\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}$.

当$\lambda_3=7$时，对应的一个特征向量为$\eta_3=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$.

由 $P^{-1}=\begin{bmatrix}0 & 1 & -1\\1 & 0 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}$，得$P^{-1}\eta_1=\begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix}$，$P^{-1}\eta_2=\begin{bmatrix}-1\\-1\\1\end{bmatrix}$，$P^{-1}\eta_3=\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}$.

因此，$B+2E$的三个特征值分别为 9，9，3.

对应于特征值 9 的全部特征向量为

$$k_1P^{-1}\eta_1+k_2P^{-1}\eta_2=k_1\begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix}+k_2\begin{bmatrix}-1\\-1\\1\end{bmatrix}$$，其中k_1,k_2是不全为零的任意常数；

对应于特征值 3 的全部特征向量为

$$k_3P^{-1}\eta_3 = k_3\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}，其中 k_3 是不为零的任意常数.$$

十 、已知平面上三条不同直线的方程分别为

l_1： $ax+2by+3c=0$，

l_2： $bx+2cy+3a=0$，

l_3： $cx+2ay+3b=0$.

试证这三条直线交于一点的充分必要条件为 $a+b+c=0$.

【详解】方法一：必要性

设三条直线 l_1,l_2,l_3 交于一点，则线性方程组

$$\begin{cases}ax+2by=-3c,\\ bx+2cy=-3a,\\ cx+2ay=-3b,\end{cases} \qquad (^*)$$

有唯一解，故系数矩阵 $A=\begin{bmatrix}a & 2b\\ b & 2c\\ c & 2a\end{bmatrix}$ 与增广矩阵 $\overline{A}=\begin{bmatrix}a & 2b & -3c\\ b & 2c & -3a\\ c & 2a & -3b\end{bmatrix}$ 的秩均为 2，于是

$\left|\overline{A}\right|=0.$

由于 $\left|\overline{A}\right|=\begin{vmatrix}a & 2b & -3c\\ b & 2c & -3a\\ c & 2a & -3b\end{vmatrix}=6(a+b+c)[a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc]$

$=3(a+b+c)[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2]$，

但根据题设 $(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\neq 0$，故 $a+b+c=0$.

充分性：

由 $a+b+c=0$，则从必要性的证明可知，$\left|\overline{A}\right|=0$，故秩 $(\overline{A})<3$.

由于

$$\begin{vmatrix}a & 2b\\ b & 2c\end{vmatrix}=2(ac-b^2)=-2[a(a+b)+b^2]$$

$$=-2[(a+\frac{1}{2}b)^2+\frac{3}{4}b^2]\neq 0，$$

故秩(A)=2．于是，　　秩(A)=秩($\overline{A}$)=2．

因此方程组(*)有唯一解，即三直线l_1, l_2, l_3交于一点.

方法二：必要性

设三直线交于一点(x_0, y_0)，则$\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ 1 \end{bmatrix}$为 Ax=0 的非零解，其中 $A=\begin{bmatrix} a & 2b & 3c \\ b & 2c & 3a \\ c & 2a & 3b \end{bmatrix}$.

于是　$|A|=0$.

而　$$|A|=\begin{vmatrix} a & 2b & 3c \\ b & 2c & 3a \\ c & 2a & 3b \end{vmatrix}=-6(a+b+c)[a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc]$$

$$=-3(a+b+c)[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2],$$

但根据题设 $(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2 \neq 0$，故

$$a+b+c=0.$$

充分性：考虑线性方程组

$$\begin{cases} ax+2by=-3c, \\ bx+2cy=-3a, \\ cx+2ay=-3b, \end{cases} \qquad (*)$$

将方程组(*)的三个方程相加，并由 a+b+c=0 可知，方程组(*)等价于方程组

$$\begin{cases} ax+2by=-3c, \\ bx+2cy=-3a. \end{cases} \qquad (*\ *)$$

因为 $$\begin{vmatrix} a & 2b \\ b & 2c \end{vmatrix}=2(ac-b^2)=-2[a(a+b)+b^2]$$

$$=-[a^2+b^2+(a+b)^2]\neq 0,$$

故方程组(* *)有唯一解，所以方程组(*)有唯一解，即三直线l_1, l_2, l_3交于一点.

十一、已知甲、乙两箱中装有同种产品，其中甲箱中装有 3 件合格品和 3 件次品，乙箱中仅装有 3 件合格品. 从甲箱中任取 3 件产品放入乙箱后，求：

(1) 乙箱中次品件数 X 的数学期望；

(2) 从乙箱中任取一件产品是次品的概率.

【详解】 (1) X 的可能取值为 0，1，2，3，X 的概率分布为

$$P\{X=k\}=\frac{C_3^k C_3^{3-k}}{C_6^3}, \quad k=0,1,2,3.$$

即

X	0	1	2	3
P	$\frac{1}{20}$	$\frac{9}{20}$	$\frac{9}{20}$	$\frac{1}{20}$

因此

$$EX=0\times\frac{1}{20}+1\times\frac{9}{20}+2\times\frac{9}{20}+3\times\frac{1}{20}=\frac{3}{2}.$$

(2) 设 A 表示事件“从乙箱中任取一件产品是次品”，由于$\{X=0\}$，$\{X=1\}$，$\{X=2\}$，$\{X=3\}$构成完备事件组，因此根据全概率公式，有

$$P(A)=\sum_{k=0}^{3}P\{X=k\}P\{A|X=k\}=\sum_{k=0}^{3}P\{X=k\}\cdot\frac{k}{6}=\frac{1}{6}\sum_{k=0}^{3}kP\{X=k\}$$

$$=\frac{1}{6}EX=\frac{1}{6}\cdot\frac{3}{2}$$

$$=\frac{1}{4}.$$

十二 、设总体 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}2e^{-2(x-\theta)}, & x>\theta,\\ 0, & x\le\theta,\end{cases}$$

其中 $\theta>0$ 是未知参数. 从总体 X 中抽取简单随机样本 $X_1,X_2,\cdots,X_n$，记 $\hat{\theta}=\min(X_1,X_2,\cdots,X_n)$.

(1) 求总体 X 的分布函数 $F(x)$;

(2) 求统计量 $\hat{\theta}$ 的分布函数 $F_{\hat{\theta}}(x)$；

(3) 如果用 $\hat{\theta}$ 作为 θ 的估计量，讨论它是否具有无偏性.

【详解】 (1) $F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)dt=\begin{cases}1-e^{-2(x-\theta)}, & x>\theta,\\ 0, & x\le\theta.\end{cases}$

(2) $F_{\hat{\theta}}(x)=P\{\hat{\theta}\le x\}=P\{\min(X_1,X_2,\cdots,X_n)\le x\}$

$$=1-P\{\min(X_1,X_2,\cdots,X_n)>x\}$$

$$=1-P\{X_1>x,X_2>x,\cdots,X_n>x\}$$

$$=1-[1-F(x)]^n$$

$$=\begin{cases}1-e^{-2n(x-\theta)}, x>\theta,\\ \quad 0, \qquad x\le\theta.\end{cases}$$

(3) $\hat{\theta}$概率密度为

$$f_{\hat{\theta}}(x)=\frac{dF_{\hat{\theta}}(x)}{dx}=\begin{cases}2ne^{-2n(x-\theta)}, x>\theta,\\ \quad 0, \qquad x\le\theta.\end{cases}$$

因为 $E\hat{\theta}=\int_{-\infty}^{+\infty}xf_{\hat{\theta}}(x)dx=\int_{\theta}^{+\infty}2nxe^{-2n(x-\theta)}dx$

$$=\theta+\frac{1}{2n}\neq\theta\text{ ,}$$

所以$\hat{\theta}$作为θ的估计量不具有无偏性.