2003 年考研数学（四）真题评注

一、填空题（本题共 6 小题，每小题 4 分，满分 24 分. 把答案填在题中横线上）

（**1**）极限 $\lim_{x\to 0}[1+\ln(1+x)]^{\frac{2}{x}}=$ ______.

（**2**）$\int_{-1}^{1}(|x|+x)e^{-|x|}dx=$ ______.

（**3**）设 a>0，$f(x)=g(x)=\begin{cases} a, 若 0\le x\le 1, \\ 0, \quad 其他, \end{cases}$ 而 D 表示全平面，则 $I=\iint\limits_D f(x)g(y-x)dxdy=$ ______.

（**4**）设 A,B 均为三阶矩阵，E 是三阶单位矩阵. 已知 AB=2A+B,B=$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$,则

$(A-E)^{-1}=$

（**5**）设 n 维向量 $\alpha=(a,0,\Lambda\ ,0,a)^T, a<0$；E 为 n 阶单位矩阵，矩阵

$$A=E-\alpha\alpha^T，\quad B=E+\frac{1}{a}\alpha\alpha^T，$$

其中 A 的逆矩阵为 B，则 a=______ .

（**6**）设随机变量 X 和 Y 的相关系数为 0.5, EX=EY=0, $EX^2=EY^2=2$，则 $E(X+Y)^2$=__________ .

二、选择题（本题共 6 小题，每小题 4 分，满分 24 分. 每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求，把所选项前的字母填在题后的括号内）

（**1**）曲线 $y=xe^{\frac{1}{x^2}}$

(A) 仅有水平渐近线. (B) 仅有铅直渐近线.

(C) 既有铅直又有水平渐近线. (D) 既有铅直又有斜渐近线. [ ]

（**2**）设函数 $f(x)=|x^3-1|\varphi(x)$，其中 $\varphi(x)$ 在 x=1 处连续，则 $\varphi(1)=0$ 是 f(x)在 x=1 处可导的

(A) 充分必要条件. （B）必要但非充分条件.

(C) 充分但非必要条件 . (D) 既非充分也非必要条件. [ ]

（**3**）设可微函数 f(x,y)在点 (x_0,y_0) 取得极小值，则下列结论正确的是

(A) $f(x_0,y)$ 在 $y=y_0$ 处的导数等于零. （B）$f(x_0,y)$ 在 $y=y_0$ 处的导数大于零.

(C) $f(x_0, y)$ 在 $y = y_0$ 处的导数小于零. (D) $f(x_0, y)$ 在 $y = y_0$ 处的导数不存在.

[ ]

（**4**）设矩阵

$$B=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{bmatrix}.$$

已知矩阵 A 相似于 B，则秩(A-2E)与秩(A-E)之和等于

(A) 2. (B) 3. (C) 4. (D) 5. [ ]

（**5**）对于任意二事件 A 和 B

(A) 若 $AB \neq \phi$，则 A,B 一定独立. (B) 若 $AB \neq \phi$，则 A,B 有可能独立.

(C) 若 $AB = \phi$，则 A,B 一定独立. (D) 若 $AB = \phi$，则 A,B 一定不独立.

[ ]

（**6**）设随机变量 X 和 Y 都服从正态分布，且它们不相关，则

(A) X 与 Y 一定独立. (B) (X,Y)服从二维正态分布.

(C) X 与 Y 未必独立. (D) X+Y 服从一维正态分布. [ ]

三 、（**本题满分 8 分**）

设

$$f(x)=\frac{1}{\sin \pi x}-\frac{1}{\pi x}-\frac{1}{\pi(1-x)}, x \in (0, \frac{1}{2}],$$

试补充定义 f(0),使得 f(x)在 $[0, \frac{1}{2}]$ 上连续.

四 、（**本题满分 8 分**）

设 f(u,v)具有二阶连续偏导数，且满足 $\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}=1$，又 $g(x,y)=f[xy, \frac{1}{2}(x^2-y^2)]$，

求 $\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}$.

五 、（**本题满分 8 分**）

计算二重积分

$$I=\iint_D e^{-(x^2+y^2-\pi)} \sin(x^2+y^2)dxdy.$$

其中积分区域 D=$\{(x,y)\big| x^2+y^2 \leq \pi\}$.

六、（**本题满分 9 分**）

设 a>1， $f(t)=a^t-at$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内的驻点为 $t(a)$. 问 a 为何值时，t(a)最小？并求出最小值.

七、（本题满分 9 分）

设 y=f(x) 是第一象限内连接点 A(0,1),B(1,0)的一段连续曲线，M(x,y)为该曲线上任意一点，点 C 为 M 在 x 轴上的投影，O 为坐标原点. 若梯形 OCMA 的面积与曲边三角形 CBM 的面积之和为$\frac{x^3}{6}+\frac{1}{3}$，求 f(x)的表达式.

八、（本题满分 8 分）

设某商品从时刻 0 到时刻 t 的销售量为$x(t)=kt$，$t\in[0,T],(k>0)$. 欲在 T 时将数量为 A 的该商品销售完，试求

(1) t 时的商品剩余量，并确定 k 的值；

(2) 在时间段[0，T]上的平均剩余量.

九、（本题满分 13 分）

设有向量组（I）：$\alpha_1=(1,0,2)^T$，$\alpha_2=(1,1,3)^T$，$\alpha_3=(1,-1,a+2)^T$ 和向量组（II）：$\beta_1=(1,2,a+3)^T$，$\beta_2=(2,1,a+6)^T$，$\beta_3=(2,1,a+4)^T$. 试问：当 a 为何值时，向量组（I）与（II）等价？当 a 为何值时，向量组（I）与（II）不等价？

十、（本题满分 13 分）

设矩阵$A=\begin{bmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&a\end{bmatrix}$可逆，向量$\alpha=\begin{bmatrix}1\\b\\1\end{bmatrix}$是矩阵$A^*$的一个特征向量，$\lambda$是$\alpha$对应的特征值，其中$A^*$是矩阵 A 的伴随矩阵. 试求 a,b 和$\lambda$的值.

十一、（本题满分 13 分）

设随机变量 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}},&\text{若}x\in[1,8],\\0,&\text{其他};\end{cases}$$

F(x)是 X 的分布函数. 求随机变量 Y=F(X)的分布函数.

十二、（本题满分 13 分）

对于任意二事件 A 和 B，$0<P(A)<1,0<P(B)<1$，

$$\rho=\frac{P(AB)-P(A)P(B)}{\sqrt{P(A)P(B)P(\bar{A})P(\bar{B})}}$$

称做事件 A 和 B 的相关系数.

(1) 证明事件 A 和 B 独立的充分必要条件是其相关系数等于零；

(2) 利用随机变量相关系数的基本性质，证明$|\rho|\le1$.

1.. 【分析】 本题属1^{∞}型未定式，化为指数函数求极限即可.

【详解】 $\lim\limits_{x\to 0}[1+\ln(1+x)]^{\frac{2}{x}}=\lim\limits_{x\to 0}e^{\frac{2}{x}\ln[1+\ln(1+x)]}$

$=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\ln[1+\ln(1+x)]}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\ln(1+x)}{x}}=e^{2}.$

【评注】 对于1^{∞}型未定式$\lim f(x)^{g(x)}$的极限，也可直接用公式$\lim f(x)^{g(x)}(1^{\infty})=e^{\lim(f(x)-1)g(x)}$进行计算，因此本题也可这样求解：

$$\lim_{x\to 0}[1+\ln(1+x)]^{\frac{2}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{2}{x}\cdot\ln(1+x)}=e^{2}.$$

【评注】 完全类似例题见《数学复习指南》P.23【**例 1.30**】和《文登数学全真模拟试卷》数学四 P.29 第一大题第（1）小题.

2.. 【分析】 对称区间上的积分应注意利用被积函数的对称性，这里有$\int_{-1}^{1}xe^{-|x|}dx=0.$

【详解】 $\int_{-1}^{1}(|x|+x)e^{-|x|}dx=\int_{-1}^{1}|x|e^{-|x|}dx+\int_{-1}^{1}xe^{-|x|}dx$

$=\int_{-1}^{1}|x|e^{-|x|}dx$

$=2\int_{0}^{1}xe^{-x}dx=-2\int_{0}^{1}xde^{-x}$

$=-2[xe^{-x}\Big|_{0}^{1}-\int_{0}^{1}e^{-x}dx]$

$=2(1-2e^{-1})$.

【评注】 本题属基本题型，主要考查对称区间上的积分性质和分布积分法.

原题见《文登数学全真模拟试卷》数学二 P.37 第一题第（3）小题（完全是原题，答案也一样），完全类似题见《文登数学全真模拟试卷》数学三 P.71 第一大题第（2）小题.

3.. 【分析】 本题积分区域为全平面，但只有当$0\le x\le 1, 0\le y-x\le 1$时，被积函数才不为零，因此实际上只需在满足此不等式的区域内积分即可.

【详解】 $I=\iint\limits_{D}f(x)g(y-x)dxdy=\iint\limits_{0\le x\le 1,0\le y-x\le 1}a^{2}\ dxdy$

$=a^{2}\int_{0}^{1}dx\int_{x}^{x+1}dy=a^{2}\int_{0}^{1}[(x+1)-x]dx=a^{2}.$

【评注】 若被积函数只在某区域内不为零，则二重积分的计算只需在积分区域与被积函数不为零的区域的公共部分上积分即可.

完全类似例题见《数学复习指南》P.191【**例 8.16-17**】 .

4..

【分析】 应先化简，从 AB=2A+B 中确定$(A-E)^{-1}$.

【详解】 由 AB=2A+B, 知
AB-B=2A-2E+2E,

即有 $(A-E)B-2(A-E)=2E$，

$(A-E)(B-2E)=2E$， $(A-E)\cdot\frac{1}{2}(B-2E)=E$，

可见 $(A-E)^{-1}=\frac{1}{2}(B-2E)=\begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{bmatrix}$.

【评注】 本题实质上是已知矩阵等式求逆的问题，应先分解出因式 A-E，写成逆矩阵的定义形式，从而确定(A-E) 的逆矩阵.

完全类似例题见《数学最后冲刺》P.92【例 7】.

5.. 【分析】 这里$\alpha\alpha^T$为 n 阶矩阵，而$\alpha^T\alpha=2a^2$为数，直接通过$AB=E$进行计算并注意利用乘法的结合律即可.

【详解】 由题设，有

$$AB=(E-\alpha\alpha^T)(E+\frac{1}{a}\alpha\alpha^T)$$
$$=E-\alpha\alpha^T+\frac{1}{a}\alpha\alpha^T-\frac{1}{a}\alpha\alpha^T\cdot\alpha\alpha^T$$
$$=E-\alpha\alpha^T+\frac{1}{a}\alpha\alpha^T-\frac{1}{a}\alpha(\alpha^T\alpha)\alpha^T$$
$$=E-\alpha\alpha^T+\frac{1}{a}\alpha\alpha^T-2a\alpha\alpha^T$$
$$=E+(-1-2a+\frac{1}{a})\alpha\alpha^T=E,$$

于是有 $-1-2a+\frac{1}{a}=0$，即 $2a^2+a-1=0$，解得 $a=\frac{1}{2},a=-1$. 由于 A<0 ,故 a=-1.

【评注】 完全类似例题见《数学复习指南》P.305 第 2 大题第（5）小题 .

6.. 【分析】 利用期望与相关系数的公式进行计算即可.

【详解】 因为

$$E(X+Y)^2=EX^2+2E(XY)+EY^2$$
$$=4+2[Cov(X,Y)+EX\cdot EY]$$
$$=4+2\rho_{XY}\cdot\sqrt{DX}\cdot\sqrt{DY}=4+2\times0.5\times2=6.$$

【评注】 本题的核心是逆向思维，利用公式$E(XY)=Cov(X,Y)+EX\cdot EY$，而这种分析方法是文登辅导班上重点介绍过的.

二、选择题（本题共 6 小题，每小题 4 分，满分 24 分. 每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求，把所选项前的字母填在题后的括号内）

【分析】先考虑是否有水平渐近线，若无水平渐近线应进一步考虑是否存在斜渐近线，而是否存在铅直渐近线，应看函数是否存在无定义点.

【详解】 当 $x\to\pm\infty$ 时，极限 $\lim\limits_{x\to\pm\infty} y$ 均不存在，故不存在水平渐近线；

又因为 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{y}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}e^{\frac{1}{x^2}}=1$，$\lim\limits_{x\to\infty}(xe^{\frac{1}{x^2}}-x)=0$，所以有斜渐近线 y=x.

另外，在 x=0 处 $y=xe^{\frac{1}{x^2}}$ 无定义，且 $\lim\limits_{x\to0}xe^{\frac{1}{x^2}}=\infty$，可见 x=0 为铅直渐近线.

故曲线 $y=xe^{\frac{1}{x^2}}$ 既有铅直又有斜渐近线，应选(D).

【评注】 本题为常规题型，完全类似例题见《数学复习指南》P.153 **【例 6.30-31】**.

8.. 【分析】 被积函数含有绝对值，应当作分段函数看待，利用 f(x)在 x=1 处左右导数定义讨论即可.

【详解】 因为

$$\lim_{x\to1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1^+}\frac{x^3-1}{x-1}\cdot\varphi(x)=3\varphi(1),$$

$$\lim_{x\to1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=-\lim_{x\to1^-}\frac{x^3-1}{x-1}\cdot\varphi(x)=-3\varphi(1),$$

可见，f(x)在 x=1 处可导的充分必要条件是 $3\varphi(1)=-3\varphi(1)\Leftrightarrow\varphi(1)=0.$ 故应选(A).

【评注】 函数表达式中含有绝对值、取极值符号(max,min)等，均应当作分段函数处理. 一般地，函数 $g(x)=|x-x_0|\varphi(x)$ 在点 $x=x_0$ 处可导的充要条件是 $\varphi(x_0)=0.$

完全类似例题见《数学题型集粹与练习题集》P.28 **【例 2.6】**和《考研数学大串讲》P.19 的公式.

9.. 【分析】 可微必有偏导数存在，再根据取极值的必要条件即可得结论.

【详解】 可微函数 f(x,y)在点 (x_0,y_0) 取得极小值，根据取极值的必要条件知 $f_y'(x_0,y_0)=0$，即 $f(x_0,y)$ 在 $y=y_0$ 处的导数等于零, 故应选(A).

【评注 1】 本题考查了偏导数的定义，$f(x_0,y)$ 在 $y=y_0$ 处的导数即 $f_y'(x_0,y_0)$；而 $f(x,y_0)$ 在 $x=x_0$ 处的导数即 $f_x'(x_0,y_0)$.

【评注 2】 本题也可用排除法分析，取 $f(x,y)=x^2+y^2$，在(0,0)处可微且取得极小值，并且有 $f(0,y)=y^2$，可排除(B),(C),(D), 故正确选项为(A).

10.. 【分析】 利用相似矩阵有相同的秩计算，秩(A-2E)与秩(A-E)之和等于秩(B-2E)与秩(B-E)之和.

【详解】 因为矩阵 A 相似于 B，于是有矩阵 A-2E 与矩阵 B-2E 相似，矩阵 A-E 与矩阵 B-E 相似，且相似矩阵有相同的秩，而

秩(B-2E)=秩$\begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}=3$，秩(B-E)=秩$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}=1$，

可见有 秩(A-2E)+秩(A-E)= 秩(B-2E)+秩(B-E)=4，故应选(C).

【评注】 若 $A\sim B$，则 $f(A)\sim f(B)$，且相似矩阵有相同的行列式、相同的秩和相同的特征值等性质. 见《数学复习指南》P.360 相似矩阵及其性质.

11.. 【分析】 本题考查独立与互斥事件之间的关系，事实上，独立与互斥事件之间没有必然的互推关系.

【详解】 $AB\neq\phi$ 推不出 P(AB)=P(A)P(B), 因此推不出 A,B 一定独立，排除(A); 若 $AB=\phi$，则 P(AB)=0，但 P(A)P(B)是否为零不确定，因此(C),(D) 也不成立，故正确选项为(B).

【评注】当 P(A)$\neq 0$,P(B)$\neq 0$时，若 A,B 相互独立，则一定有$P(AB)=P(A)P(B)\neq 0$，从而有 $AB\neq\phi$. 可见，当 A,B 相互独立时，往往 A,B 并不是互斥的.

完全类似例题见《数学复习指南》P.415 第二大题第（7）小题.

12.. 【分析】 本题考查正态分布的性质以及二维正态分布与一维正态分布之间的关系. 只有(X,Y) 服从二维正态分布时，不相关与独立才是等价的.

【详解】 只有当(X,Y) 服从二维正态分布时，X 与 Y 不相关$\Leftrightarrow$X 与 Y 独立，本题仅仅已知 X 和 Y 服从正态分布，因此，由它们不相关推不出 X 与 Y 一定独立，排除(A); 若 X 和 Y 都服从正态分布且相互独立，则(X,Y)服从二维正态分布，但题设并不知道 X,Y 是否独立，可排除(B); 同样要求 X 与 Y 相互独立时，才能推出 X+Y 服从一维正态分布，可排除(D). 故正确选项为(C).

【评注】 ① 若 X 与 Y 均服从正态分布且相互独立，则(X,Y)服从二维正态分布.

② 若 X 与 Y 均服从正态分布且相互独立，则 $aX+bY$ 服从一维正态分布.

③ 若(X,Y)服从二维正态分布，则 X 与 Y 相互独立$\Leftrightarrow$X 与 Y 不相关.

完全类似结论见《数学复习指南》P.458 的[注].

13.. 【详解】

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\frac{1}{\pi}.+\lim_{x\to 0^+}\frac{\pi x-\sin\pi x}{\pi x\sin\pi x}$$

$$=-\frac{1}{\pi}+\lim_{x\to 0^+}\frac{\pi x-\sin\pi x}{x^2\pi^2}$$

$$=-\frac{1}{\pi}+\lim_{x\to 0^+}\frac{\pi-\pi\cos\pi x}{2\pi^2 x}$$

$$=-\frac{1}{\pi}+\lim_{x\to 0+}\frac{\pi^2\sin\pi x}{2\pi^2}$$

$$= -\frac{1}{\pi}.$$

由于 f(x)在 $(0,\frac{1}{2}]$ 上连续，因此定义

$$f(0) = -\frac{1}{\pi},$$

使 f(x)在 $[0,\frac{1}{2}]$ 上连续.

【评注】 本题实质上是一求极限问题，但以这种形式表现出来，还考查了连续的概念. 完全类似例题在一般教科书上都可找到，或参见《文登数学全真模拟试卷》数学三 P.24 第三题.

14.. **【分析】** 本题是典型的复合函数求偏导问题：$g = f(u,v)$，$u = xy, v = \frac{1}{2}(x^2 - y^2)$，直接利用复合函数求偏导公式即可，注意利用 $\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} = \frac{\partial^2 f}{\partial v \partial u}$.

【详解】
$$\frac{\partial g}{\partial x} = y\frac{\partial f}{\partial u} + x\frac{\partial f}{\partial v},$$

$$\frac{\partial g}{\partial y} = x\frac{\partial f}{\partial u} - y\frac{\partial f}{\partial v}.$$

故
$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} = y^2\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + 2xy\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} + x^2\frac{\partial^2 f}{\partial v^2} + \frac{\partial f}{\partial v},$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = x^2\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} - 2xy\frac{\partial^2 f}{\partial v \partial u} + y^2\frac{\partial^2 f}{\partial v^2} - \frac{\partial f}{\partial v}.$$

所以
$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = (x^2 + y^2)\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + (x^2 + y^2)\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}$$

$$= x^2 + y^2.$$

【评注】 本题考查半抽象复合函数求二阶偏导.

完全类似例题见《文登数学全真模拟试卷》数学四 P.67 第六题和《数学复习指南》P.171 **【例 7.20,7.22】**.

15.. **【分析】** 从被积函数与积分区域可以看出，应该利用极坐标进行计算.

【详解】 作极坐标变换：$x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$，有

$$I = e^{\pi}\iint_D e^{-(x^2+y^2)}\sin(x^2 + y^2)dxdy$$

$$= e^{\pi}\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{\pi}} re^{-r^2}\sin r^2 dr.$$

令 $t = r^2$，则

$$I=\pi e^{\pi}\int_0^{\pi}e^{-t}\sin tdt.$$

记 $A=\int_0^{\pi}e^{-t}\sin tdt$，则

$$A=-\int_0^{\pi}e^{-t}\text{int}\,de^{-t}$$

$$=-[e^{-t}\sin t\Big|_0^{\pi}-\int_0^{\pi}e^{-t}\cos tdt]$$

$$=-\int_0^{\pi}\cos tde^{-t}$$

$$=-[e^{-t}\cos t\Big|_0^{\pi}+\int_0^{\pi}e^{-t}\sin tdt]$$

$$=e^{-\pi}+1-A.$$

因此 $A=\frac{1}{2}(1+e^{-\pi})$，

$$I=\frac{\pi e^{\pi}}{2}(1+e^{-\pi})=\frac{\pi}{2}(1+e^{\pi}).$$

【评注】 本题属常规题型，明显地应该选用极坐标进行计算，在将二重积分化为定积分后，再通过换元与分步积分（均为最基础的要求），即可得出结果，综合考查了二重积分、换元积分与分步积分等多个基础知识点.

16.. **【分析】** 先由 f(t)的导数为零确定驻点 t(a)，它是关于 a 的函数，再把此函数对 a 求导，然后令此导数为零，得到可能极值点，进一步判定此极值为最小值即可.

【详解】 由 $f'(t)=a^t\ln a-a=0$，得唯一驻点

$$t(a)=1-\frac{\ln\ln a}{\ln a}.$$

考察函数 $t(a)=1-\frac{\ln\ln a}{\ln a}$ 在 a>1 时的最小值. 令

$$t'(a)=-\frac{\frac{1}{a}-\frac{1}{a}\ln\ln a}{(\ln a)^2}=-\frac{1-\ln\ln a}{a(\ln a)^2}=0,$$

得唯一驻点

$$a=e^e.$$

当 $a>e^e$ 时，$t'(a)>0$；当 $a<e^e$ 时，$t'(a)<0$，因此 $t(e^e)=1-\frac{1}{e}$ 为极小值，从而是最小值.

【评注】 本题属基本题型，只是函数表达式由驻点给出，求极值与最值的要求均是最基本的.

类似例题见《数学复习指南》P.144**【例 6.11-12】**.

17.. 【分析】 梯形 OCMA 的面积可直接用梯形面积公式计算得到，曲边三角形 CBM 的面积可用定积分计算，再由题设，可得一含有变限积分的等式，两边求导后可转化为一阶线性微分方程，然后用通解公式计算即可.

【详解】 根据题意，有

$$\frac{x}{2}[1+f(x)]+\int_x^1 f(t)dt=\frac{x^3}{6}+\frac{1}{3}.$$

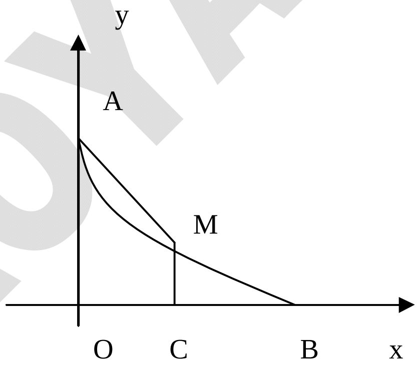
两边关于 x 求导，得

$$\frac{1}{2}[1+f(x)]+\frac{1}{2}xf'(x)-f(x)=\frac{1}{2}x^2.$$

当 $x\neq 0$ 时，得

$$f'(x)-\frac{1}{x}f(x)=\frac{x^2-1}{x}.$$

此为标准的一阶线性非齐次微分方程，其通解为



$$f(x)=e^{-\int -\frac{1}{x}dx}[\int \frac{x^2-1}{x}e^{\int -\frac{1}{x}dx}dx+C]$$

$$=e^{\ln x}[\int \frac{x^2-1}{x}e^{-\ln x}dx+C]$$

$$=x(\int \frac{x^2-1}{x^2}dx+C)$$

$$=x^2+1+Cx.$$

当 x=0 时，f(0)=1.

由于 x=1 时，f(1)=0 ,故有 2+C=0，从而 C=-2. 所以

$$f(x)=x^2+1-2x=(x-1)^2.$$

【评注】 本题一阶线性微分方程的求解比较简单，一般教材中都可找到标准的求解方法，完全类似例题见《数学题型集粹与练习题集》P.290 第七题.

18.. 【分析】 在时刻 t 的剩余量 y(t)可用总量 A 减去销量 x(t)得到；由于 y(t)随时间连续变化，因此在时间段[0,T] 上的平均剩余量，即函数平均值可用积分 $\frac{1}{T}\int_0^T y(t)dt$ 表示.

【详解】 (1) 在时刻 t 商品的剩余量为

$$y(t)=A-x(t)$$

$$=A-kt,\quad t\in[0,T].$$

由 $A-kt$=0，得

$$k=\frac{A}{T},$$

因此

$$y(t)=A-\frac{A}{T}t,\qquad t\in[0,T].$$

(2) 依题意，$y(t)$ 在[0，T]上的平均值为

$$\begin{aligned}\bar{y}&=\frac{1}{T}\int_0^T y(t)dt\\&=\frac{1}{T}\int_0^T (A-\frac{A}{T}t)dt\\&=\frac{A}{2}.\end{aligned}$$

因此在时间段[0，T] 上的平均剩余量为$\frac{A}{2}$.

【评注】 函数 f(x)在[a,b] 上的平均值记为$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx.$

本题考查了函数平均值的概念，但大纲中只对数学一、二明确提出要求，而数学三、四的考试大纲中没有相应的要求，因此本题有超纲的嫌疑.

19.. **【分析】** 两个向量组等价也即两个向量组可以相互线性表示，而两个向量组不等价，只需其中一组有一个向量不能由另一组线性表示即可. 而线性表示问题又可转化为对应非齐次线性方程组是否有解的问题，这可通过化增广矩阵为阶梯形来判断. 一个向量β_1是否可由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表示，只需用初等行变换化增广矩阵（$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3|\beta_1$）为阶梯形讨论，而一组向量$\beta_1,\beta_2,\beta_3$是否可由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表示，则可结合起来对矩阵（$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3|\beta_1,\beta_2,\beta_3$）同时作初等行变换化阶梯形，然后类似地进行讨论即可.

【详解】 作初等行变换，有

$$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\vdots\beta_1,\beta_2,\beta_3)=\begin{bmatrix}1&1&1&\vdots&1&2&2\\0&1&-1&\vdots&2&1&1\\2&3&a+2&\vdots&a+3&a+6&a+4\end{bmatrix}$$

$$\to\begin{bmatrix}1&0&2&\vdots&-1&1&1\\0&1&-1&\vdots&2&1&1\\0&0&a+1&\vdots&a-1&a+1&a-1\end{bmatrix}.$$

(1) 当$a\neq-1$时，有行列式$\left|[\alpha_1\quad\alpha_2\quad\alpha_3]\right|=a+1\neq0$，秩（$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=3$，故线性方程组$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3=\beta_i\,(i=1,2,3)$均有唯一解. 所以，$\beta_1,\beta_2,\beta_3$可由向量组（I）线性表示.

同样，行列式 $\left|[\beta_1 \quad \beta_2 \quad \beta_3]\right| = 6 \neq 0$，秩（$\beta_1, \beta_2, \beta_3) = 3$，故 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 可由向量组（II）线性表示. 因此向量组（I）与（II）等价.

(2) 当 a=-1 时，有

$$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \vdots \beta_1, \beta_2, \beta_3) \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & \vdots & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & \vdots & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & -2 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

由于秩（$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$）$\neq$ 秩（$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \vdots \beta_1)$，线性方程组 $x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + x_3\alpha_3 = \beta_1$ 无解，故向量 β_1 不能由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示. 因此，向量组（I）与（II）不等价.

【评注 1】 涉及到参数讨论时，一般联想到利用行列式判断，因此，本题也可这样分析：

因为行列式 $|\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3| = a + 1$，$|\beta_1, \beta_2, \beta_3| = 6 \neq 0$，可见

(1) 当 $a \neq -1$ 时，秩 $r(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = r(\beta_1, \beta_2, \beta_3) = 3$，因此三维列向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 与 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 等价，即向量组（I）与（II）等价.

(2) 当 a=-1 时，，秩 $r(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = 2$，而行列式 $|\alpha_2, \alpha_3, \beta_1| = 4 \neq 0$，可见 $r(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = 2 \neq$ r（$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1$)=3, 因此线性方程组 $x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + x_3\alpha_3 = \beta_1$ 无解，故向量 β_1 不能由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示. 即向量组（I）与（II）不等价.

【评注 2】 向量组（I）与（II）等价，相当于 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 与 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 均为整个向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3$ 的一个极大线性无关组，问题转化为求向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3$ 的极大线性无关组，这可通过初等行变换化阶梯形进行讨论.

本题完全类似分析思路的例题见《数学复习指南》P.347**【例 4.13】**和《数学最后冲刺》P.94**【例 14】**.

20.. **【分析】** 题设已知特征向量，应想到利用定义：$A^*\alpha = \lambda\alpha$，又与伴随矩阵 A^* 相关的问题，应利用 $AA^* = |A|E$ 进行化简.

【详解】 矩阵 A^* 属于特征值 λ 的特征向量为 α，由于矩阵 A 可逆，故 A^* 可逆.于是 $\lambda \neq 0$，$|A| \neq 0$，且

$$A^*\alpha = \lambda\alpha.$$

两边同时左乘矩阵 A，得

$$AA^*\alpha = \lambda A\alpha,$$

$$A\alpha = \frac{|A|}{\lambda}\alpha,$$

即

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ b \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{|A|}{\lambda}\begin{bmatrix} 1 \\ b \\ 1 \end{bmatrix},$$

由此，得方程组

$$\begin{cases} 3+b = \dfrac{|A|}{\lambda}, & (1) \\ 2+2b = \dfrac{|A|}{\lambda}b, & (2) \\ a+b+1 = \dfrac{|A|}{\lambda}. & (3) \end{cases}$$

由式(1),(2)解得

$$b=1 \qquad 或 b=-2;$$

由式(1),(3)解得

a=2.

由于

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = 3a-2 = 4,$$

根据(1)式知，特征向量α所对应的特征值

$$\lambda = \frac{|A|}{3+b} = \frac{4}{3+b}.$$

所以，当$b=1$时，$\lambda = 1$；
当$b=-2$时，$\lambda = 4$.

【评注】 本题若先求出A^*，再按特征值、特征向量的定义进行分析，则计算过程将非常复杂. 一般来说，见到A^*,首先应想到利用公式$AA^* = |A|E$进行化简.

本题类似的例题见《数学复习指南》P.365**【例 5.7】**和《数学最后冲刺》P.90**【例 3】**.

21.. **【分析】** 先求出分布函数 F(x) 的具体形式，从而可确定 Y=F(X) ,然后按定义求 Y 的分布函数即可。注意应先确定 Y=F(X)的值域范围$(0 \le F(X) \le 1)$，再对 y 分段讨论.

【详解】 易见，当 x<1 时，F(x)=0; 当 x>8 时，F(x)=1.

对于$x \in [1,8]$，有

$$F(x)=\int_1^x \frac{1}{3\sqrt[3]{t^2}}dt=\sqrt[3]{x}-1.$$

设 G(y)是随机变量 Y=F(X)的分布函数. 显然，当 $y<0$ 时，G(y)=0；当 $y\ge 1$ 时，G(y)=1.

对于 $y\in[0,1)$，有

$$G(y)=P\{Y\le y\}=P\{F(X)\le y\}$$

$$=P\{\sqrt[3]{X}-1\le y\}=P\{X\le (y+1)^3\}$$

$$=F[(y+1)^3]=y.$$

于是，Y=F(X)的分布函数为

$$G(y)=\begin{cases}0, & 若y<0,\\ y, & 若0\le y<1,\\ 1, & 若y\ge 1.\end{cases}$$

【评注】 事实上，本题 X 为任意连续型随机变量均可，此时 Y=F(X)仍服从均匀分布:
当 y<0 时，G(y)=0;

当 $y\ge 1$ 时，G(y)=1;

当 $0\le y<1$ 时，$G(y)=P\{Y\le y\}=P\{F(X)\le y\}$

$$=P\{X\le F^{-1}(y)\}$$

$$=F(F^{-1}(y))=y.$$

【评注】 本题是《数学复习指南》P.431**【例 2.23】**原题（实际上还是此题的特殊情形）.

22.. **【分析】** (1) 利用事件 A 和 B 独立的定义 P(AB)=P(A)P(B)即可；(2) 随机变量 X 和 Y 的相关系数为 $\rho_{XY}=\dfrac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\sqrt{DX}\sqrt{DY}}=\dfrac{EXY-EXEY}{\sqrt{DX}\sqrt{DY}}$，而需将 $\rho=\dfrac{P(AB)-P(A)P(B)}{\sqrt{P(A)P(B)P(\bar{A})P(\bar{B})}}$ 转化为用随机变量表示，显然，若有 $EXY=P(AB),EX=P(A),EY=P(B)$ 以及 $\sqrt{DX}=\sqrt{P(A)P(\bar{A})}$，$\sqrt{DY}=\sqrt{P(B)P(\bar{B})}$ 即可，这只需定义

$$X=\begin{cases}1, & 若A出现,\\ 0, & 若A不出现;\end{cases}\qquad Y=\begin{cases}1, & 若B出现,\\ 0, & 若B不出现.\end{cases}$$

【详解】 (1) 由 ρ 的定义，可见 $\rho=0$ 当且仅当

P(AB)-P(A)P(B)=0,

而这恰好是二事件 A 和 B 独立的定义，即 $\rho=0$ 是 A 和 B 独立的充分必要条件.

(2) 考虑随机变量 X 和 Y:

$$X=\begin{cases}1, & 若A出现,\\ 0, & 若A不出现;\end{cases} \qquad Y=\begin{cases}1, & 若B出现,\\ 0, & 若B不出现.\end{cases}$$

由条件知，X 和 Y 都服从 0—1 分布：

$$X\sim\begin{pmatrix}0 & 1\\ P(\overline{A}) & P(A)\end{pmatrix},\ Y\sim\begin{pmatrix}0 & 1\\ P(\overline{B}) & P(B)\end{pmatrix}.$$

易见

$$EX=P(A),\quad EY=P(B);$$

$$DX=P(A)P(\overline{A}),\qquad DY=P(B)P(\overline{B});$$

$$\operatorname{cov}(X,Y)=EXY-EXEY=P(AB)-P(A)P(B).$$

因此，事件 A 和 B 的相关系数就是随机变量 X 和 Y 的相关系数.

于是由二随机变量相关系数的基本性质，可见 $|\rho|\le 1$.

【评注】 如上 0—1 分布与随机事件之间的关系值得注意，较好地将两者联系起来了，为借助相互的性质提供了便利.

完全类似例题见《数学题型集粹与练习题集》P.298 第十一题和《考研数学大串讲》P.249 **【例 25】**.

注： 1.《数学复习指南》 （2003 版，经济类）世界图书出版公司

主编: 陈文灯、黄先开

2.《数学题型集粹与练习题集》（2003 版，经济类）世界图书出版公司

主编: 陈文灯、黄先开

3.《文登数学全真模拟试卷》（2003 版，经济类）世界图书出版公司

主编: 陈文灯、黄先开

4.《数学最后冲刺》（2003 版，经济类）世界图书出版公司

主编: 陈文灯、黄先开

5.《考研数学大串讲》(2002 版，经济类) 世界图书出版公司

主编: 黄先开、曹显兵、施明存

(文登学校供稿)