

2002 年全国硕士研究生入学统一考试(数学二)试题及答案解析

绝密★启用前

数学(试卷二)参考解答

一. 填空题(本题共 5 小题, 每小题 3 分, 满分 15 分.)

$$(1) \text{ 设函数 } f(x) = \begin{cases} \frac{1 - e^{\tan x}}{2}, & x > 0, \\ \arcsin \frac{x}{2}, & x = 0, \\ ae^{2x}, & x \leq 0 \end{cases} \text{ 在 } x = 0 \text{ 处连续, 则 } a = \underline{-2}.$$

(2) 位于曲线 $y = xe^{-x} (0 \leq x < +\infty)$ 下方, x 轴上方的无界图形的面积是 1.(3) 微分方程 $yy'' + y'^2 = 0$ 满足初始条件 $y|_{x=0} = 1, y'|_{x=0} = \frac{1}{2}$ 的特解是 $y = \sqrt{x+1}$
或 $y^2 = x+1$.

$$(4) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left[\sqrt{1 + \cos \frac{\pi}{n}} + \sqrt{1 + \cos \frac{2\pi}{n}} + \cdots + \sqrt{1 + \cos \frac{n\pi}{n}} \right] = \underline{\frac{2\sqrt{2}}{\pi}}.$$

(5) 矩阵 $\begin{pmatrix} 0 & -2 & -2 \\ 2 & 2 & -2 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$ 的非零特征值是 4.

二. 选择题(本题共 5 小题, 每小题 3 分, 满分 15 分.)

(1) 设函数 $f(u)$ 可导, $y = f(x^2)$ 当自变量 x 在 $x = -1$ 处取得增量 $\Delta x = -0.1$ 时, 相应的函数增量 Δy 的线性主部为 0.1, 则 $f'(1) =$

(A) -1. (B) 0.1. (C) 1. (D) 0.5. 【 D 】

(2) 设函数 $f(x)$ 连续, 则下列函数中, 必为偶函数的是

(A) $\int_0^x f(t^2) dt.$ (B) $\int_0^x f^2(t) dt.$
(C) $\int_0^x t[f(t) - f(-t)] dt.$ (D) $\int_0^x t[f(t) + f(-t)] dt.$ 【 D 】

(3) 设 $y = y(x)$ 是二阶常系数微分方程 $y'' + py' + qy = e^{3x}$ 满足初始条件 $y(0) = y'(0) = 0$ 的特解, 则当 $x \rightarrow 0$ 时, 函数 $\frac{\ln(1+x^2)}{y(x)}$ 的极限

(A) 不存在. (B) 等于 1. (C) 等于 2. (D) 等于 3. 【 C 】

(4) 设函数 $y = f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 内有界且可导, 则

(A) 当 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ 时, 必有 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 0.$
(B) 当 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x)$ 存在时, 必有 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 0.$
(C) 当 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$ 时, 必有 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = 0.$
(D) 当 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x)$ 存在时, 必有 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = 0.$ 【 B 】

(5) 设向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关, 向量 β_1 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示, 而向量 β_2 不能由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示, 则对于任意常数 k , 必有

- (A) $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, k\beta_1 + \beta_2$ 线性无关. (B) $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, k\beta_1 + \beta_2$ 线性相关.
(C) $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1 + k\beta_2$ 线性无关. (D) $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1 + k\beta_2$ 线性相关.

【 A 】

三. (本题满分 6 分)

已知曲线的极坐标方程是 $r = 1 - \cos\theta$, 求该曲线上对应于 $\theta = \frac{\pi}{6}$ 处的切线与法线的直角坐标方程.

解 此曲线的参数方程为 $\begin{cases} x = (1 - \cos\theta)\cos\theta, \\ y = (1 - \cos\theta)\sin\theta, \end{cases}$ 即 $\begin{cases} x = \cos\theta - \cos^2\theta, \\ y = \sin\theta - \sin\theta\cos\theta. \end{cases}$

由 $\theta = \frac{\pi}{6}$, 得到切点的坐标 $(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{4}, \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{4})$.

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{\theta=\frac{\pi}{6}} = \left. \frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}} \right|_{\theta=\frac{\pi}{6}} = \left. \frac{\cos\theta - \cos^2\theta + \sin^2\theta}{-\sin\theta + 2\cos\theta\sin\theta} \right|_{\theta=\frac{\pi}{6}} = 1.$$

于是所求切线方程为

$$y - \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{4} = x - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{4},$$

即 $x - y - \frac{3}{4}\sqrt{3} + \frac{5}{4} = 0$.

法线方程为

$$y - \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{4} = -\left(x - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{4}\right),$$

即 $x + y - \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{4} = 0$.

四. (本题满分 7 分)

设 $f(x) = \begin{cases} 2x + \frac{3}{2}x^2, & -1 \leq x < 0, \\ \frac{xe^x}{(e^x + 1)^2}, & 0 \leq x \leq 1, \end{cases}$ 求函数 $F(x) = \int_{-1}^x f(t) dt$ 的表达式.

解 当 $-1 \leq x < 0$ 时,

$$\begin{aligned}
 F(x) &= \int_{-1}^x (2t + \frac{3}{2}t^2) dt = (t^2 + \frac{1}{2}t^3) \Big|_{-1}^x \\
 &= \frac{1}{2}x^3 + x^2 - \frac{1}{2}.
 \end{aligned}$$

当 $0 \leq x \leq 1$ 时,

$$\begin{aligned}
 F(x) &= \int_{-1}^x f(t) dt = \int_{-1}^0 f(t) dt + \int_0^x f(t) dt \\
 &= (t^2 + \frac{1}{2}t^3) \Big|_{-1}^0 + \int_0^x \frac{te^t}{(e^t + 1)^2} dt \\
 &= -\frac{1}{2} - \int_0^x t d(\frac{1}{e^t + 1}) \\
 &= -\frac{1}{2} - \frac{t}{e^t + 1} \Big|_0^x + \int_0^x \frac{dt}{e^t + 1} \\
 &= -\frac{1}{2} - \frac{x}{e^x + 1} + \int_0^x \frac{de^t}{e^t(e^t + 1)} \\
 &= -\frac{1}{2} - \frac{x}{e^x + 1} + \ln \frac{e^t}{e^t + 1} \Big|_0^x \\
 &= -\frac{1}{2} - \frac{x}{e^x + 1} + \ln \frac{e^x}{e^x + 1} + \ln 2.
 \end{aligned}$$

所以

$$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x^3 + x^2 - \frac{1}{2}, & -1 \leq x < 0, \\ \ln \frac{e^x}{e^x + 1} - \frac{x}{e^x + 1} + \ln 2 - \frac{1}{2}, & 0 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

五. (本题满分 7 分)

已知函数 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 内可导, $f(x) > 0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$, 且满足

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{f(x+hx)}{f(x)} \right)^{\frac{1}{h}} = e^{\frac{1}{x}},$$

求 $f(x)$.

解 设 $y = \left(\frac{f(x+hx)}{f(x)} \right)^{\frac{1}{h}},$

则 $\ln y = \frac{1}{h} \ln \frac{f(x+hx)}{f(x)}.$

因为

$$\begin{aligned}
 \lim_{h \rightarrow 0} \ln y &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \ln \frac{f(x+hx)}{f(x)} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x [\ln f(x+hx) - \ln f(x)]}{hx}
 \end{aligned}$$

$$= x[\ln f(x)]',$$

$$\text{故} \quad \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{f(x+hx)}{f(x)} \right)^{\frac{1}{h}} = e^{x[\ln f(x)]'}.$$

$$\text{由已知条件得} \quad e^{x[\ln f(x)]'} = e^{\frac{1}{x}},$$

$$\text{因此} \quad x[\ln f(x)]' = \frac{1}{x},$$

$$\text{即} \quad [\ln f(x)]' = \frac{1}{x^2}.$$

$$\text{解之得} \quad f(x) = Ce^{-\frac{1}{x}}.$$

$$\text{由} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1, \text{得} C = 1,$$

$$\text{故} \quad f(x) = e^{-\frac{1}{x}}.$$

六. (本题满分 7 分)

求微分方程 $x dy + (x - 2y) dx = 0$ 的一个解 $y = y(x)$, 使得由曲线 $y = y(x)$ 与直线 $x = 1, x = 2$ 以及 x 轴所围成的平面图形绕 x 轴旋转一周的旋转体体积最小.

$$\text{解} \quad \text{原方程可化为} \frac{dy}{dx} - \frac{2}{x}y = -1.$$

$$\text{则} \quad y = e^{\int \frac{2}{x} dx} \left[- \int e^{-\int \frac{2}{x} dx} dx + C \right]$$

$$= x^2 \left(\frac{1}{x} + C \right)$$

$$= x + Cx^2.$$

由曲线 $y = x + Cx^2$ 与直线 $x = 1, x = 2$ 及 x 轴所围成的平面图形绕 x 轴旋转一周的旋转体体积为

$$\begin{aligned} V(C) &= \int_1^2 \pi (x + Cx^2)^2 dx \\ &= \pi \left(\frac{31}{5}C^2 + \frac{15}{2}C + \frac{7}{3} \right). \end{aligned}$$

$$\text{令} \quad V'(C) = \pi \left(\frac{62}{5}C + \frac{15}{2} \right) = 0,$$

$$\text{得} \quad C = -\frac{75}{124}.$$

$$\text{又} V''(C) = \frac{62}{5}\pi > 0, \text{故} C = -\frac{75}{124} \text{ 为惟一极小值点, 也是最小值点, 于是得}$$

$$y = y(x) = x - \frac{75}{124}x^2.$$

七. (本题满分 7 分)

某闸门的形状与大小如图所示, 其中直线 l 为对称轴, 闸门的上部为矩形 $ABCD$, 下部由二次抛物线与线段 AB 所围成. 当水面与闸门的上端相平时, 欲使闸门矩形部分承受的水压力与闸门下部承受的水压力之比为 5:4, 闸门矩形部分的高 h 应为多少 m(米)?

解 1 如图建立坐标系, 则抛物线的方程为

$$y = x^2.$$

闸门矩形部分承受的水压力

$$\begin{aligned} P_1 &= 2 \int_1^{h+1} \rho g(h+1-y) dy \\ &= 2\rho g \left[(h+1)y - \frac{y^2}{2} \right]_1^{h+1} = \rho g h^2, \end{aligned}$$

其中 ρ 为水的密度, g 为重力加速度.

闸门下部承受的水压力

$$\begin{aligned} P_2 &= 2 \int_0^1 \rho g(h+1-y) \sqrt{y} dy \\ &= 2\rho g \left[\frac{2}{3}(h+1)y^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{5}y^{\frac{5}{2}} \right]_0^1 \\ &= 4\rho g \left(\frac{1}{3}h + \frac{2}{15} \right). \end{aligned}$$

由题意知

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{5}{4}, \text{ 即 } \frac{h^2}{4(\frac{1}{3}h + \frac{2}{15})} = \frac{5}{4}.$$

解之得 $h = 2$, $h = -\frac{1}{3}$ (舍去), 故 $h = 2$.

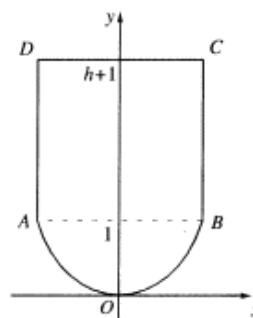
即闸门矩形部分的高应为 2m.

解 2 如图建立坐标系, 则抛物线方程为

$$x = h+1-y^2.$$

闸门矩形部分承受的水压力为

$$P_1 = 2 \int_0^h \rho g x dx = \rho g h^2.$$



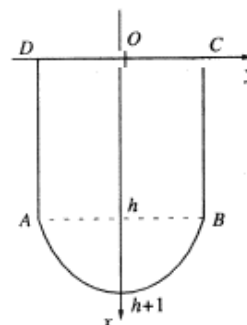
闸门下部承受的水压力为

$$P_2 = 2 \int_h^{h+1} \rho g x \sqrt{h+1-x} dx.$$

设 $\sqrt{h+1-x} = t$, 得

$$\begin{aligned} P_2 &= 4\rho g \int_0^1 (h+1-t^2)t^2 dt \\ &= 4\rho g \left[(h+1) \frac{t^3}{3} - \frac{t^5}{5} \right]_0^1 \\ &= 4\rho g \left(\frac{1}{3}h + \frac{2}{15} \right). \end{aligned}$$

以下同解 1.



八. (本题满分 8 分)

设 $0 < x_1 < 3, x_{n+1} = \sqrt{x_n(3-x_n)} (n=1,2,\dots)$, 证明数列 $\{x_n\}$ 的极限存在, 并求此极限.

解 由 $0 < x_1 < 3$ 知 $x_1, 3-x_1$ 均为正数,

$$\text{故 } 0 < x_2 = \sqrt{x_1(3-x_1)} \leq \frac{1}{2}(x_1 + 3 - x_1) = \frac{3}{2}.$$

设 $0 < x_k \leq \frac{3}{2} (k > 1)$, 则

$$0 < x_{k+1} = \sqrt{x_k(3-x_k)} \leq \frac{1}{2}(x_k + 3 - x_k) = \frac{3}{2},$$

由数学归纳法知, 对任意正整数 $n > 1$ 均有 $0 < x_n \leq \frac{3}{2}$, 因而数列 $\{x_n\}$ 有界.

$$\text{又当 } n > 1 \text{ 时, } x_{n+1} - x_n = \sqrt{x_n(3-x_n)} - x_n = \sqrt{x_n}(\sqrt{3-x_n} - \sqrt{x_n}) = \frac{\sqrt{x_n}(3-2x_n)}{\sqrt{3-x_n} + \sqrt{x_n}} \geq 0,$$

因而有 $x_{n+1} \geq x_n (n > 1)$, 即数列 $\{x_n\}$ 单调增加.

由单调有界数列必有极限知 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在.

设 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, 在 $x_{n+1} = \sqrt{x_n(3-x_n)}$ 两边取极限, 得

$$a = \sqrt{a(3-a)},$$

解之得 $a = \frac{3}{2}, a = 0$ (舍去).

$$\text{故 } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \frac{3}{2}.$$

九. (本题满分 8 分)

设 $0 < a < b$, 证明不等式

$$\frac{2a}{a^2 + b^2} < \frac{\ln b - \ln a}{b - a} < \frac{1}{\sqrt{ab}}.$$

证 先证右边不等式.

$$\text{设 } \varphi(x) = \ln x - \ln a - \frac{x-a}{\sqrt{ax}} \quad (x > a > 0),$$

$$\begin{aligned} \text{因为 } \varphi'(x) &= \frac{1}{x} - \frac{1}{\sqrt{a}} \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{a}{2x\sqrt{x}} \right) \\ &= -\frac{(\sqrt{x} - \sqrt{a})^2}{2x\sqrt{ax}} < 0, \end{aligned}$$

故当 $x > a$ 时 $\varphi(x)$ 单调减少, 又 $\varphi(a) = 0$, 所以, 当 $x > a$ 时 $\varphi(x) < \varphi(a) = 0$, 即

$$\ln x - \ln a < \frac{x-a}{\sqrt{ax}},$$

从而当 $b > a > 0$ 时, $\ln b - \ln a < \frac{b-a}{\sqrt{ab}}$, 即

$$\frac{\ln b - \ln a}{b - a} < \frac{1}{\sqrt{ab}}.$$

再证左边不等式.

证法 1 设函数 $f(x) = \ln x \quad (x > a > 0)$,

由拉格朗日中值定理知, 至少存在一点 $\xi \in (a, b)$, 使

$$\frac{\ln b - \ln a}{b - a} = (\ln x)' \Big|_{x=\xi} = \frac{1}{\xi},$$

由于 $0 < a < \xi < b$, 故 $\frac{1}{\xi} > \frac{1}{b} > \frac{2a}{a^2 + b^2}$, 从而

$$\frac{\ln b - \ln a}{b - a} > \frac{2a}{a^2 + b^2}.$$

证法 2 设 $f(x) = (x^2 + a^2)(\ln x - \ln a) - 2a(x - a) \quad (x > a > 0)$,

$$\begin{aligned} \text{因为 } f'(x) &= 2x(\ln x - \ln a) + (x^2 + a^2) \frac{1}{x} - 2a \\ &= 2x(\ln x - \ln a) + \frac{(x-a)^2}{x} > 0, \end{aligned}$$

故当 $x > a$ 时 $f(x)$ 单调增加, 又 $f(a) = 0$, 所以当 $x > a$ 时 $f(x) > f(a) = 0$, 即

$$(x^2 + a^2)(\ln x - \ln a) - 2a(x - a) > 0.$$

从而当 $b > a > 0$ 时, 有 $(a^2 + b^2)(\ln b - \ln a) - 2a(b - a) > 0$, 即

$$\frac{2a}{a^2 + b^2} < \frac{\ln b - \ln a}{b - a}.$$

十. (本题满分 8 分)

设函数 $f(x)$ 在 $x = 0$ 的某邻域内具有二阶连续导数, 且 $f(0) \neq 0, f'(0) \neq 0, f''(0) \neq 0$.
证明: 存在惟一的一组实数 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, 使得当 $h \rightarrow 0$ 时, $\lambda_1 f(h) + \lambda_2 f(2h) + \lambda_3 f(3h) - f(0)$ 是比 h^2 高阶的无穷小.

证法 1 只需证存在惟一的一组实数 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, 使

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\lambda_1 f(h) + \lambda_2 f(2h) + \lambda_3 f(3h) - f(0)}{h^2} = 0.$$

由题设和洛必达法则, 从

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\lambda_1 f(h) + \lambda_2 f(2h) + \lambda_3 f(3h) - f(0)}{h^2} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\lambda_1 f'(h) + 2\lambda_2 f'(2h) + 3\lambda_3 f'(3h)}{2h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\lambda_1 f''(h) + 4\lambda_2 f''(2h) + 9\lambda_3 f''(3h)}{2} \\ &= \frac{1}{2}(\lambda_1 + 4\lambda_2 + 9\lambda_3)f''(0) \end{aligned}$$

知, $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ 应满足方程组

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1, \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3 = 0, \\ \lambda_1 + 4\lambda_2 + 9\lambda_3 = 0. \end{cases}$$

因为系数行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{vmatrix} = 2 \neq 0,$$

所以上述方程组的解存在且惟一, 即存在惟一的一组实数 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, 使得当 $h \rightarrow 0$ 时, $\lambda_1 f(h) + \lambda_2 f(2h) + \lambda_3 f(3h) - f(0)$ 是比 h^2 高阶的无穷小.

证法 2 由麦克劳林公式得

$$f(h) = f(0) + f'(0)h + \frac{1}{2}f''(\xi)h^2 \quad (\text{其中 } \xi \text{ 介于 } 0 \text{ 与 } h \text{ 之间}),$$

据题设条件, 当 $h \rightarrow 0$ 时

$$f(h) = f(0) + f'(0)h + \frac{1}{2}f''(0)h^2 + \frac{1}{2}[f''(\xi) - f''(0)]h^2$$

$$= f(0) + f'(0)h + \frac{1}{2}f''(0)h^2 + o(h^2).$$

同理可得

$$f(2h) = f(0) + 2f'(0)h + 2f''(0)h^2 + o(h^2),$$

$$f(3h) = f(0) + 3f'(0)h + \frac{9}{2}f''(0)h^2 + o(h^2),$$

$$\begin{aligned} \text{故有 } \lambda_1 f(h) + \lambda_2 f(2h) + \lambda_3 f(3h) - f(0) &= (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 - 1)f(0) + \\ &(\lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3)f'(0)h + \frac{1}{2}(\lambda_1 + 4\lambda_2 + 9\lambda_3)f''(0)h^2 + o(h^2). \end{aligned}$$

所以 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ 应满足方程组

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1, \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3 = 0, \\ \lambda_1 + 4\lambda_2 + 9\lambda_3 = 0. \end{cases}$$

以下同证法 1.

十一. (本题满分 6 分)

已知 A, B 为 3 阶矩阵, 且满足 $2A^{-1}B = B - 4E$, 其中 E 是 3 阶单位矩阵.

(1) 证明: 矩阵 $A - 2E$ 可逆;

(2) 若 $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, 求矩阵 A .

解 (1) 由 $2A^{-1}B = B - 4E$ 知

$$AB - 2B - 4A = O,$$

从而 $(A - 2E)(B - 4E) = 8E$,

或 $(A - 2E) \cdot \frac{1}{8}(B - 4E) = E$.

故 $A - 2E$ 可逆, 且 $(A - 2E)^{-1} = \frac{1}{8}(B - 4E)$.

(2) 由 (1) 知 $A = 2E + 8(B - 4E)^{-1}$,

$$\text{而 } (B - 4E)^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & -2 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ -\frac{1}{8} & -\frac{3}{8} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

故
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

十二. (本题满分 6 分)

已知 4 阶方阵 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 均为 4 维列向量, 其中 $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性无关, $\alpha_1 = 2\alpha_2 - \alpha_3$. 如果 $\beta = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4$, 求线性方程组 $Ax = \beta$ 的通解.

解法 1 令 $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$, 则由 $Ax = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \beta$ 得

$$x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + x_3\alpha_3 + x_4\alpha_4 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4,$$

将 $\alpha_1 = 2\alpha_2 - \alpha_3$ 代入上式, 整理后得

$$(2x_1 + x_2 - 3)\alpha_2 + (-x_1 + x_3)\alpha_3 + (x_4 - 1)\alpha_4 = 0.$$

由 $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性无关, 知

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 3 = 0, \\ -x_1 + x_3 = 0, \\ x_4 - 1 = 0. \end{cases}$$

解此方程组得

$$x = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ 其中 } k \text{ 为任意常数.}$$

解法 2 由 $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性无关和 $\alpha_1 = 2\alpha_2 - \alpha_3 + 0\alpha_4$, 故 A 的秩为 3, 因此 $Ax = 0$ 的基础解系中只包含一个向量.

由

$$\alpha_1 - 2\alpha_2 + \alpha_3 + 0\alpha_4 = 0$$

知 $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ 为齐次线性方程组 $Ax = 0$ 的一个解, 所以其通解为

$$x = k \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ } k \text{ 为任意常数.}$$

再由

$$\beta = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

知 $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ 为非齐次线性方程组 $Ax = \beta$ 的一个特解, 于是 $Ax = \beta$ 的通解为

$$x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ 其中 } k \text{ 为任意常数.}$$