2002年全国硕士研究生入学统一考试数学三试题

一、填空题（本题共5小题，每小题3分，满分15分，把答案填在题中横线上）

（1）设常数 $a \neq \frac{1}{2}$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\ln\left[\dfrac{n-2na+1}{n(1-2a)}\right]^n =$ ________.

【答案】(1) $\dfrac{1}{1-2a}$

【考点】求数列极限.

【解】“ln”里面为“1^∞”型，凑成重要极限形式：

$$\lim_{n\to\infty}\ln\left[\frac{n-2na+1}{n(1-2a)}\right]^n=\lim_{n\to\infty}\ln\left[1+\frac{1}{n(1-2a)}\right]^{\frac{n(1-2a)}{1-2a}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1-2a}\ln\left[1+\frac{1}{n(1-2a)}\right]^{n(1-2a)}=\frac{1}{1-2a}\ln e=\frac{1}{1-2a}.$$

（2）交换积分次序：$\int_0^{\frac14}dy\int_y^{\sqrt{y}}f(x,y)dx+\int_{\frac14}^{\frac12}dy\int_y^{\frac12}f(x,y)dx=$ ________ .

【答案】（2）$\int_0^{\frac12}dy\int_{x^2}^{x}f(x,y)dy$

【考点】交换二次积分的积分次序.

【解】画出与原题中二次积分的限所对应的积分区域 D_1 与 D_2，

如图.将它们的并集记为 D.于是

$$\int_0^{\frac14}dy\int_y^{\sqrt{y}}f(x,y)dx+\int_{\frac14}^{\frac12}dy\int_y^{\frac12}f(x,y)dx=\iint_D f(x,y)d\sigma.$$

再将后者化为先 y 后 x 的二次积分：

$$\iint_D f(x,y)d\sigma=\int_0^{\frac12}dx\int_{x^2}^{x}f(x,y)dy$$

于是

$$\int_0^{\frac14}dy\int_y^{\sqrt{y}}f(x,y)dx+\int_{\frac14}^{\frac12}dy\int_y^{\frac12}f(x,y)dx=\int_0^{\frac12}dy\int_{x^2}^{x}f(x,y)dx$$

（3）设三阶矩阵 $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -2\\ 2 & 1 & 2\\ 3 & 0 & 4\end{pmatrix}$，三维列向量 $\alpha=\left(a,1,1\right)^T$.已知 $A\alpha$ 与 α 线性相关，则

$a=$ ________ .

【答案】（3） -1
【考点】线性相关.

【解】因 $A\alpha=\begin{pmatrix}1 & 2 & -2\\ 2 & 1 & 2\\ 3 & 0 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\ 1\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\\ 2a+3\\ 3a+4\end{pmatrix}$, $A\alpha$ 与 α 线性相关.

有 $\dfrac{a}{a}=\dfrac{2a+3}{1}=\dfrac{3a+4}{1}$，得 $2a+3=3a+4, a=-1.$

或 $A\alpha=k\alpha,$ 即 $\begin{pmatrix}a\\ 2a+3\\ 3a+4\end{pmatrix}=k\begin{pmatrix}a\\ 1\\ 1\end{pmatrix}$，得 $\begin{cases}a=ka\\ 2a+3=k\\ 3a+4=k\end{cases}$，得 $a=-1.(k=1)$

（4）设随机变量 X 和 Y 的联合概率分布为

X \ Y	-1	0	1
0	0.07	0.18	0.15
1	0.08	0.32	0.20

则 X^2 和 Y^2 的协方差 $\operatorname{cov}(X^2,Y^2)=$ ________ .

【答案】（4） -0.02
【考点】随机变量的协方差，$0-1$ 分布.

【解】(X^2,Y^2) 的分布及其边缘分布为

X^2 \ Y^2	0	1	
0	0.18	0.22	0.40
1	0.32	0.28	0.60
	0.50	0.50	

而 X^2Y^2 的分布为

X^2Y^2	0	1
P	0.72	0.28

所以
$$E(X^2)=0.5,\ E(Y^2)=0.60, E(X^2Y^2)=0.28$$
$$\operatorname{cov}(X^2,\ Y^2)=E(X^2Y^2)-E(X^2)E(Y^2)=0.28-0.6\times0.5=-0.02$$

答案应填-0.02.

（5）设总体X的概率密度为

$$f(x;\theta)=\begin{cases} e^{-(x-\theta)}, 若x\geq\theta, \\ 0, \qquad 若x<\theta \end{cases}$$

而$X_1,X_2,\cdots,X_n$是来自总体X的简单随机样本，则未知参数θ的矩估计量为__________.

【答案】（5） $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i-1$

【考点】矩估计法与矩估计量.

【解】总体的一阶矩为数学期望

$$E(X)=\int_{\theta}^{+\infty}xe^{-(x-\theta)}dx=\theta+1$$

样本的一阶矩为样本均值

$$\bar{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$$

令$\theta+1=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$，解得 $\hat{\theta}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i-1$.

答案应填$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i-1$.

二、选择题（本题共5小题，每小题3分，共15分，在每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求，把所选项前的字母填在题后的括号内.）

（1）设函数$f(x)$在闭区间$[a,b]$上有定义，在开区间(a,b)内可导，则 （ ）

(A)当$f(a)f(b)<0$时，存在$\xi\in(a,b)$，使$f(\xi)=0$.

(B)对任何$\xi\in(a,b)$，有$\lim\limits_{x\to\xi}[f(x)-f(\xi)]=0$.

(C)当$f(a)=f(b)$时，存在$\xi\in(a,b)$，使$f'(\xi)=0$.

(D)存在$\xi\in(a,b)$，使$f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$.

【答案】（1）（B）

【考点】准确的掌握连续函数介值定理、罗尔定理与拉格朗日中值定理，理解可导与连续的关系.

【解】**方法1**：论证法.由题设$f(x)$在开区间(a,b)内可导，所以$f(x)$在(a,b)内连续，因此，对于(a,b)内的任意一点ξ，必有 $\lim\limits_{x\to\xi}f(x)=f(\xi)$

即有 $\lim\limits_{x\to\xi}[f(x)-f(\xi)]=0$.选（B）.

方法 2：排斥法.(A)的反例：$f(x)=\begin{cases}1 & x\in(a,b] \\ -1 & x=a\end{cases}$

有 $f(a)=-1, f(b)=1, f(a)f(b)=-1<0$，但 $f(x)$ 在 (a,b) 内无零点.（C）与（D）的反例，$f(x)=\begin{cases}x & x\in(-1,1] \\ 1 & x=-1\end{cases}$ $f(-1)=f(1)$，但 $f'(x)=1$(当 $x\in(-1,1)$)，不满足罗尔中值定理，当然也不满足拉格朗日中值定理的结论.

（2）设幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n x^n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n x^n$ 的收敛半径分别为 $\frac{\sqrt{5}}{3}$ 与 $\frac{1}{3}$，则幂级数 $\sum\limits_{i=1}^{\infty}\frac{a^2{}_n}{b^2{}_n}x^n$ 的收敛半径为 （ ）

(A) 5 (B) $\frac{\sqrt{5}}{3}$ (C) $\frac{1}{3}$ (D) $\frac{1}{5}$

【答案】(2)（A）

【考点】求幂级数的收敛半径.

【解】在补充假设 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ 与 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{b_{n+1}}{b_n}\right|$

存在的前提下，由于已知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n x^n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n x^n$ 的收敛半径分别为 $\frac{\sqrt{5}}{3}$ 与 $\frac{1}{3}$，故有

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\frac{3}{\sqrt{5}}，\quad \lim_{n\to\infty}\left|\frac{b_{n+1}}{b_n}\right|=3$$

于是 $$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{a_{n+1}^2}{b_{n+1}^2}}{\frac{a_n^2}{b_n^2}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_{n+1}^2}{a_n^2}\cdot\frac{b_n^2}{b_{n+1}^2}\right)=\frac{9}{5}\cdot\frac{1}{9}=\frac{1}{5},$$

故题设的幂级数收敛半径为 5，选（A）.

（3）设 A 是 $m\times n$ 矩阵，B 是 $n\times m$ 矩阵，则线性方程组 $(AB)x=0$ （ ）

(A)当 $n>m$ 时仅有零解 (B)当 $n>m$ 时必有非零解

(C)当 $m>n$ 时仅有零解 (D)当 $m>n$ 时必有非零解

【答案】(3)（D）

【考点】齐次线性方程组有非零解（或仅有零解）的判别.

【解】**方法 1**：A 是 $m\times n$ 矩阵，B 是 $n\times m$ 矩阵，则 AB 是 m 阶方阵，因

$$r(AB) \le \min(r(A), r(B))$$

当 $m > n$ 时，有 $r(AB) \le \min(r(A), r(B)) \le n < m$.

方程组 $Ax = 0$ 必有零解，故应选（D）.

方法 2： $\boldsymbol{B}$ 是 $n \times m$ 矩阵, 当 $m > n$ 时,方程组 $Bx = 0$ 必有非零解，即存在 $x_0 \ne 0$，使得 $Bx_0 = 0$，两边左乘 A，得 $ABx_0 = 0$，即 $ABx = 0$ 有非零解，故选（D）.

（4）设 A 是 n 阶实对称矩阵，P 是 n 阶可逆矩阵，已知 n 维列向量 α 是 A 的属于特征值 λ 的特征向量，则矩阵 $\left(P^{-1}AP\right)^T$ 属于特征值 λ 的特征向量是　　（　　）

(A) $P^{-1}\alpha$　　(B) $P^T\alpha$　　(C) $P\alpha$　　(D) $\left(P^{-1}\right)^T\alpha$

【答案】(4)（B）

【考点】矩阵及其相似矩阵的特征值、特征向量.

【解】**方法 1：** 由题设 $A\alpha = \lambda\alpha$，且 $A^T = A$.

设　$\left(P^{-1}AP\right)^T =$ ，则 $B = P^T A^T P^{-1^T} = P^T A P^{-1^T}$

$$A = P^{T^{-1}} B P^T，\quad A\alpha = (P^{T^{-1}} B P^T)\alpha = \lambda\alpha$$

两边左乘 P^T，得 $B(P^T\alpha) = \lambda P^T\alpha$

故知 $B = (P^{-1}AP)^T$ 的对应于特征值 λ 的特征向量为 $P^T\alpha$，即应选（B）.

方法 2： 逐个验算（A)，(B)，(C)，(D）中哪个选项满足

$$\left(P^{-1}AP\right)^T \xi = \lambda\xi.$$

其中 $\left(P^{-1}AP\right)^T = P^T A^T P^{-1^T} = P^T A P^{-1^T}$

对（A)，即令 $\xi = P^{-1}\alpha$，代入 $P^T A P^{-1^T}(P^{-1}\alpha) \ne \lambda P^{-1}\alpha$

对（B)，有 $P^T A P^{-1^T}(P^T\alpha) = P^T A\alpha = \lambda(P^T\alpha)$ 成立.故应选（B）.

(5)设随机变量 X 和 Y 都服从标准正态分布，则　　（　　）

(A) $X + Y$ 服从正态分布　　(B) $X^2 + Y^2$ 服从 χ^2 分布

(C) X^2 和 Y^2 都服从 χ^2 分布　　(D) X^2 / Y^2 服从 F 分布

【答案】(5)（C）

【考点】正态分布、χ^2 分布、F 分布.

【解】**方法 1：**根据题设条件，X 和 Y 均服从 $N(0,1)$.故 X^2 和 Y^2 都服从 $\chi^2(1)$ 分布

答案应选（C）.

方法 2：题设条件只有 X 和 Y 服从 $N(0,1)$，没有 X 与 Y 的相互独立条件.因此，X^2 与 Y^2 的独立条件不存在，选（B）、（D）项均不正确.

题中条件既没有 X 与 Y 独立，也没有 (X,Y) 正态，这样就不能推出 $X+Y$ 服从正态分布的选项（A）.根据排除法，正确选项必为（C）.

三、（本题满分 5 分）

求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x\left[\int_0^{u^2}\arctan(1+t)dt\right]du}{x(1-\cos x)}$

【考点】求极限，洛必达法则，变限函数求导.

【解】$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x\left[\int_0^{u^2}\arctan(1+t)dt\right]du}{x(1-\cos x)}\underline{\underline{\text{等}}}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x\left[\int_0^{u^2}\arctan(1+t)dt\right]du}{\frac{1}{2}x^3}$

$$\underline{\underline{\text{洛}}}\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^{x^2}\arctan(1+t)dt}{\frac{3}{2}x^2}\underline{\underline{\text{洛}}}\lim_{x\to 0}\frac{\arctan(1+x^2)\cdot 2x}{3x}$$

$$=\frac{2}{3}\cdot\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{6}.$$

四、（本题满分 7 分）

设函数 $u=f(x,y,z)$ 有连续偏导数，且 $z=z(x,y)$ 由方程 $xe^x-ye^y=ze^z$ 所确定，求 du.

【考点】复合函数求全微分.

【解】**方法 1：**用微分形式不变性求全微分.

$$du=f_1'dx+f_2'dy+f_3'dz$$

而 $z=z(x,y)$ 由 $xe^x-ye^y=ze^z$ 所确定，两边求全微分，有

$$d(xe^x-ye^y)=d(ze^z),$$

$$xe^xdx+e^xdx-ye^ydy-e^ydy=ze^zdz+e^zdz,$$

解出
$$dz=\frac{e^x(x+1)dx-e^y(y+1)dy}{e^z(z+1)},(设z+1\neq 0).$$

代入du中，$du=\left[f_1'+f_3'\frac{e^x(x+1)}{e^z(z+1)}\right]dx+\left[f_2'-f_3'\frac{e^y(y+1)}{e^z(z+1)}\right]dy.$

方法 2：$\frac{\partial u}{\partial x}=f_1'+f_3'\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y}=f_2'+f_3'\frac{\partial z}{\partial y}$

又由$xe^x-ye^y=ze^z$两边对x求偏导数，有
$$xe^x+e^x=(ze^z+e^z)\frac{\partial z}{\partial x},$$

得
$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{xe^x+e^x}{ze^z+e^z}，(设z+1\neq 0).$$

类似可得
$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{ye^y+e^y}{ze^z+e^z},$$

代入$\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y}$表达式中得
$$\frac{\partial u}{\partial x}=f_1'+f_3'\cdot(\frac{xe^x+e^x}{ze^z+e^z}),\qquad \frac{\partial u}{\partial y}=f_2'-f_3'\cdot(\frac{ye^y+e^y}{ze^z+e^z}),$$

再代入 $du=\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy$中，得$du$如方法 1.

五、（本题满分 6 分）

设$f(\sin^2 x)=\frac{x}{\sin x}$,求$\int\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}f(x)dx$.

【考点】求不定积分.

【解】由题中要求$\int\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}f(x)dx$及$f(\sin^2 x)=\frac{x}{\sin x}$知，$0<x<1$. 命$u=\sin^2 x$，

则有$\sin x=\sqrt{u}$，$x=\arcsin\sqrt{u}$，于是$f(u)=\frac{\arcsin\sqrt{u}}{\sqrt{u}}$，

$$\int\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}f(x)dx=\int\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}\cdot\frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$$

$$=\int \frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}dx \overset{\sqrt{x}=\sin t}{=} \int \frac{t}{\cos t}2\sin t\cos t dt$$

$$=2\int t\sin t dt = 2\left[-t\cos t+\sin t\right]+C$$

$$=2\left[-\sqrt{1-x}\arcsin\sqrt{x}+\sqrt{x}\right]+C.$$

六、（本题满分 7 分）

设 D_1 是由抛物线 $y=2x^2$ 和直线 $x=a,x=2$ 及 $y=0$ 所围成的平面区域；D_2 是由抛物线 $y=2x^2$ 和直线 $y=0$，$x=a$ 所围成的平面区域，其中 $0<a<2$.

（1）试求 D_1 绕 x 轴旋转而成的旋转体体积 V_1； D_2 绕 y 轴旋转而成的旋转体体积 V_2；

（2）问当 a 为何值时，V_1+V_2 取得最大值？试求此最大值.

【考点】求空心的旋转体体积，求最值.

【解】（1） $V_1=\pi\int_a^2\left(2x^2\right)^2dx=\frac{4\pi}{5}(32-a^5)$

$$V_2=\pi a^2\cdot 2a^2-\pi\int_0^{2a^2}x^2dy=\pi a^4 \quad 0<a<2.$$

（2） $V=V_1+V_2=\frac{4\pi}{5}(32-a^5)+\pi a^4$

$$\frac{dV}{da}=4\pi a^3(1-a)\overset{\text{命}}{=\!=}0,$$

得 $a=1$，当 $0<a<1$ 时 $\frac{dV}{da}>0$，当 $1<a<2$ 时 $\frac{dV}{da}<0$，因此 $a=1$ 是 V 的唯一极值点且是极大值点，所以是 V 的最大值点，$\max V=\frac{129\pi}{5}$.

七、（本题满分 7 分）

（1）验证函数 $y(x)=1+\frac{x^3}{3!}++\frac{x^6}{6!}+\frac{x^9}{9!}+\cdots+\frac{x^{3n}}{(3n)!}+\cdots\left(-\infty<x<+\infty\right)$ 满足微分方程 $y''+y'+y=e^x$

（2）利用（1）的结果求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{3n}}{(3n)!}$ 的和函数.

【考点】验证幂级数满足微分方程及初始条件，利用解微分方程求幂级数的和函数.

【解】(1) $y(x)=1+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^6}{6!}+\frac{x^9}{9!}+\cdots+\frac{x^{3n}}{(3n)!}+\cdots=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{3n}}{(3n)!}$,

$$y'(x)=(1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{3n}}{(3n)!})'=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x^{3n}}{(3n)!}\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3nx^{3n-1}}{(3n)!}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{3n-1}}{(3n-1)!},$$

$$y''=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{3n-2}}{(3n-2)!}$$

从而
$$y''(x)+y'(x)+y(x)=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=e^x$$

说明 $y(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{3n}}{(3n)!}$ 是微分方程 $y''+y'+y=e^x$ 的解，并且满足初始条件

$y(0)=1, y'(0)=0.$

（2）按常规办法，计算出微分方程 $y''+y'+y=e^x$ 的通解，为

$$y=e^{-\frac{x}{2}}[C_1\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+C_2\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x]+\frac{1}{3}e^x.$$

从中找出满足初始条件 $y(0)=1, y'(0)=0$ 的解.为此，将初始条件代入通解中，得到

$$C_1+\frac{1}{3}=1, -\frac{1}{2}C_1+\frac{\sqrt{3}}{2}C_2+\frac{1}{3}=0,$$

于是得到惟一的一组解：$C_1=\frac{2}{3}, C_2=0$. 从而得到满足微分方程 $y''+y'+y=e^x$ 及初始条件 $y(0)=1, y'(0)=0$ 的解，只有一个，为

$$y=\frac{2}{3}e^{-\frac{x}{2}}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+\frac{1}{3}e^x$$

另一方面，由（1）已知 $y(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{3n}}{(3n)!}$ 也是微分方程 $y''+y'+y=e^x$ 及初始条件 $y(0)=1, y'(0)=0$ 的解，由唯一性，所以级数

$$1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{3n}}{(3n)!}=\frac{2}{3}e^{-\frac{x}{2}}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+\frac{1}{3}e^x(-\infty<x<+\infty).$$

八、（本题满分 6 分）

设函数 $f(x), g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且 $g(x)>0$. 利用闭区间上连续函数性质，证明存

在一点 $\xi\in[a,b]$，使 $\int_a^b f(x)g(x)dx=f(\xi)\int_a^b g(x)dx$.

【考点】证明积分中值定理的推广.

【解】**方法 1：** 因为 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 $\left[a,b\right]$ 上连续，所以存在 $M=\max\limits_{[a,b]} f(x)$，

$m=\min\limits_{[a,b]} f(x)$，　　$m\le f(x)\le M$.

又 $g(x)>0$，故有　　$mg(x)\le f(x)g(x)\le Mg(x)$

$$m\int_a^b g(x)dx\le\int_a^b f(x)g(x)dx\le M\int_a^b g(x)dx,$$

$$m\le\frac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx}\le M.$$

由连续函数的介值定理知，存在 $\xi\in[a,b]$，使

$$f(\xi)=\frac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx}$$

即有 $\int_a^b f(x)g(x)dx=f(\xi)\int_a^b g(x)dx$.

方法 2： 因为 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 $\left[a,b\right]$ 上连续,且 $g(x)>0$，故 $\int_a^b f(x)g(x)dx$ 与 $\int_a^b g(x)dx$

都存在，且 $\int_a^b g(x)dx>0$. 记 $\dfrac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx}=h$，

于是 $\int_a^b f(x)g(x)dx=h\int_a^b g(x)dx=\int_a^b hg(x)dx,$ 即

$$\int_a^b (f(x)-h)g(x)dx=0.$$

因此必存在 $\xi\in(a,b)$ 使 $f(\xi)=h$.不然，则在 (a,b) 内要么 $f(x)-h$ 恒为正，从而 $\int_a^b (f(x)-h)g(x)dx>0$；要么 $f(x)-h$ 恒为负，从而 $\int_a^b (f(x)-h)g(x)dx<0$，均与 $\int_a^b (f(x)-h)g(x)dx=0$ 不符.由此推知存在 $\xi\in(a,b)$ 使 $f(\xi)=h$，从而

$$\int_a^b f(x)g(x)dx=f(\xi)\int_a^b g(x)dx\text{ .证毕.}$$

九、（本题满分 8 分）

设齐次线性方程组

$$\begin{cases} ax_1+bx_2+bx_3+\cdots+bx_n=0, \\ bx_1+ax_2+bx_3+\cdots+bx_n=0, \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ bx_1+bx_2+bx_3+\cdots+ax_n=0, \end{cases}$$

其中$a\neq 0,b\neq 0,n\geq 2$，试讨论a,b为何值时，方程组仅有零解、有无穷多组解？在有无穷多组解时，求出全部解，并用基础解系表示全部解.

【考点】齐次线性方程组有非零解（仅有零解）的判别，齐次线性方程组的基础解系和通解.

【解】**方法 1**：对系数矩阵作初等行变换

$$A=\begin{pmatrix} a & b & b & \cdots & b \\ b & a & b & \cdots & b \\ b & b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b & b & b & \cdots & a \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a & b & b & \cdots & b \\ b-a & a-b & 0 & \cdots & 0 \\ b-a & 0 & a-b & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b-a & 0 & 0 & \cdots & a-b \end{pmatrix}$$

当$a=b(\neq 0)$时，$r\left(A\right)=1, AX=0$的同解方程组为

$$x_1+x_2+\cdots+x_n=0$$

其基础解系为$\xi_1=\left[-1,1,0,\cdots,0\right]^T,\xi_2=\left[-1,0,1,0,\cdots,0\right]^T,\cdots\xi_{n-1}=\left[-1,0,\cdots,0,1\right]^T$

方程组的全部解为$X=k_1\xi_1+k_2\xi_2+\cdots+k_{n-1}\xi_{n-1}$，其中$k_i(i=1,2,\cdots n-1)$是任意常数.

当$a\neq b$时，则

$$A\to\begin{pmatrix} a & b & b & \cdots & b \\ b-a & a-b & 0 & \cdots & 0 \\ b-a & 0 & a-b & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b-a & 0 & 0 & \cdots & a-b \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a & b & b & \cdots & b \\ -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -1 & 0 & 0 & & 1 \end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix} a+(n-1)b & b & b & \cdots & b \\ -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

故当$a\neq b$且$a\neq -(n-1)b$时，$r(A)=n, AX=0$仅有零解

当$a=-(n-1)b$时，$AX=0$的同解方程组是

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 = 0, \\ -x_1 + x_3 = 0, \\ \cdots\cdots \\ -x_1 + x_n = 0, \end{cases}$$

其基础解系为 $\xi = [1,1,\cdots,1]^T$，方程组的全部解为

$$X = k\xi，其中 k 是任意常数.$$

十、（本题满分 8 分）

设 A 为三阶实对称矩阵，且满足条件 $A^2 + 2A = 0$，已知 A 的秩 $r(A) = 2$

（1）求 A 的全部特征值

（2）当 k 为何值时，矩阵 $A + kE$ 为正定矩阵，其中 E 为三阶单位矩阵.

【考点】矩阵的特征值、正定矩阵

【解】

（1）设 λ 是 A 的任意特征值，α 是 A 的属于 λ 的特征向量，即 $A\alpha = \lambda\alpha, \alpha \neq 0,\ (1)$

两边左乘 A，得　$A^2\alpha = \lambda A\alpha = \lambda^2\alpha$　(2)

$(2) + 2(1)$ 得　$(A^2 + 2A)\alpha = (\lambda^2 + 2\lambda)\alpha$

因 $A^2 + 2A = 0$，$\alpha \neq 0$，从而有 $\lambda^2 + 2\lambda = 0$，故 A 的特征值 λ 的取值范围为 $0, -2$.

因 A 是实对称矩阵，必相似于对角阵 Λ，且 $r(A) = r(\Lambda) = 2$ 故

$$A \sim \Lambda = \begin{bmatrix} -2 & & \\ & -2 & \\ & & 0 \end{bmatrix}$$

即 A 有特征值 $\lambda_1 = \lambda_2 = -2, \lambda_3 = 0$.

（2）$A + kE$ 是实对称矩阵，由（1）知 $A + kE$ 的特征值为 $k-2, k-2, k$.

$$A + kE \text{ 正定} \Leftrightarrow \begin{cases} k - 2 > 0 \\ k > 0 \end{cases}$$

故 $k > 2$ 时 $A + kE$ 是正定矩阵.

十一、（本题满分 8 分）

假设随机变量 U 在区间 $[-2, 2]$ 上服从均匀分布，随机变量

$$X=\begin{cases}-1, & 若U\le -1\\ 1, & 若U>-1;\end{cases}\quad Y=\begin{cases}-1, & 若U\le 1\\ 1, & 若U>1;\end{cases}$$

试求（1） X 和 Y 的联合概率分布；（2） $D(X+Y)$.

【考点】二维离散型随机变量的概率分布，两个随机变量函数的分布，随机变量的方差，均匀分布.

【解】(X,Y) 只有四个可能值 $(-1,-1),(-1,1),(1,-1)$和$(1,1)$.

$$P\{X=-1,Y=-1\}=P\{U\le -1,U\le 1\}=P\{U\le -1\}=\frac{-1-(-2)}{2-(-2)}=\frac{1}{4};$$

$$P\{X=-1,Y=1\}=P\{U\le -1,U>1\}=P\{\varnothing\}=0;$$

$$P\{X=1,Y=-1\}=P\{U>-1,U\le 1\}=P\{-1<U\le 1\}=\frac{1}{2};$$

$$P\{X=1,Y=1\}=P\{U>-1,U>1\}=P\{U>1\}=\frac{1}{4}.$$

于是，(X,Y) 分布为

X \ Y	-1	1
-1	$\frac{1}{4}$	0
1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

（2） $X+Y$ 和 $(X+Y)^2$ 的分布分别为

$X+Y$	-2	0	2
P	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

和

$(X+Y)^2$	0	4
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

所以$E(X+Y)=-\frac{2}{4}+\frac{2}{4}=0,\ \ E(X+Y)^2=\frac{4}{2}=2$.

$$D(X+Y)=E(X+Y)^2-[E(X+Y)]^2=2.$$

十二、（本题满分 8 分）

假设一设备开机后无故障工作的时间 X 服从指数分布，平均无故障工作的时间 $E(X)$ 为 5 小时.设备定时开机，出现故障时自动关机，而在无故障的情况下工作 2 小时便关机.试求该设备每次开机无故障工作的时间 Y 的分布函数 $F(y)$.

【考点】随机变量函数的分布，指数分布.

【解】指数分布的 X 的分布参数为 $\dfrac{1}{E(X)}=\dfrac{1}{5}$,

显然，$Y=\min(X,2)$.

对于 $y<0, F(y)=0$，对于 $y\geq 1, F(y)=1$.

当 $0\leq y<2$ 时

$$F(y)=P\{Y\leq y\}=P\{\min(X,2)\leq y\}=P\{X\leq 2\}=1-e^{-\frac{y}{5}}.$$

所以，Y 的分布函数为

$$F(y)=\begin{cases}0, & y<0\\ 1-e^{-\frac{y}{5}}, & 0\leq y<2\\ 1, & 2\leq y\end{cases}$$