2001 年全国硕士研究生入学统一考试数学一试题

一、填空题（本题共 5 小题，每小题 3 分，满分 15 分，把答案填在题中横线上）

(1)设 $y=e^x(c_1\sin x+c_2\cos x)$（$c_1,c_2$ 为任意常数）为某二阶常系数线性齐次微分方程的通解，则该方程为 ______________

【答案】(1) $y''-2y'+2y=0$.

【解】由通解知对应的特征根为 $\lambda_{1,2}=1\pm i$, 从而特征方程为

$$\left(\lambda-(1+i)\right)\left(\lambda-(1-i)\right)=\lambda^2-2\lambda+2=0,$$ 于是所求方程为 $y''-2y'+2y=0$.

（2）设 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, 则 $div(gradr)|_{(1,-2,2)}=$ _______

【答案】（2） $\frac{2}{3}$.

【解】根据定义有

$$gradr=\frac{\partial r}{\partial x}i+\frac{\partial r}{\partial y}j+\frac{\partial r}{\partial z}k=\frac{x}{r}i+\frac{y}{r}j+\frac{z}{r}k$$

$$div(gradr)=\frac{\partial\left(\frac{x}{r}\right)}{\partial x}+\frac{\partial\left(\frac{y}{r}\right)}{\partial y}+\frac{\partial\left(\frac{z}{r}\right)}{\partial z}=\frac{r^2-x^2}{r^3}+\frac{r^2-y^2}{r^3}+\frac{r^2-z^2}{r^3}=\frac{2r^2}{r^3}=\frac{2}{r}$$

于是 $$div(gradr)|_{(1,-2,2)}=\frac{2}{\sqrt{1^2+(-2)^2+2^2}}=\frac{2}{3}$$

(3)交换二次积分的积分次序：$\int_{-1}^{0}dy\int_{2}^{1-y}f(x,y)dx=$ ______________

【答案】(3) $\int_{1}^{2}dx\int_{0}^{1-x}f(x,y)dy.$

【解】因为

$$\int_{-1}^{0}dy\int_{2}^{1-y}f(x,y)dx=-\int_{-1}^{0}dy\int_{1-y}^{2}f(x,y)dx,$$

积分区域为 $D=\{(x,y)|-1\le y\le 0,1-y\le x\le 2\}$, 又可将 D 改写为

$$D=\{(x,y)|1\le x\le 2,1-x\le y\le 2\},$$

于是有 $$\int_{-1}^{0}dy\int_{2}^{1-y}f(x,y)dx=-\int_{-1}^{0}dy\int_{1-y}^{2}f(x,y)dx=-\int_{1}^{2}dx\int_{1-x}^{0}f(x,y)dy$$

FREEKAOYAN

$$=\int_1^2 dx\int_0^{1-x} f(x,y)dy.$$

(4)设矩阵 A 满足 $A^2+A-4E=0$,其中 E 为单位矩阵，则 $\left(A-E\right)^{-1}=$____________

【答案】(4) $\frac{1}{2}(A+2E)$

【解】由题设，$A^2+A-4E=0,$

有 $$A^2+A-2E=2E,$$

$$\left(A-E\right)\left(A+2E\right)=2E,$$

也即 $$\left(A-E\right)\cdot\frac{1}{2}\left(A+2E\right)=E,$$

故 $$\left(A-E\right)^{-1}=\frac{1}{2}\left(A+2E\right)$$

（5）设随机变量 X 的方差为 2，则根据切比雪夫不等式有估计 $P\left\{\left|X-E(X)\right|\geq 2\right\}\leq$____

【答案】（5） $\frac{1}{2}$

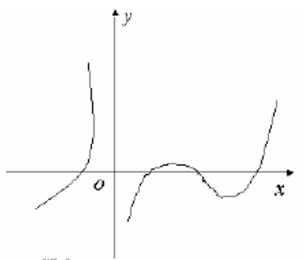
【解】根据切比雪夫不等式有

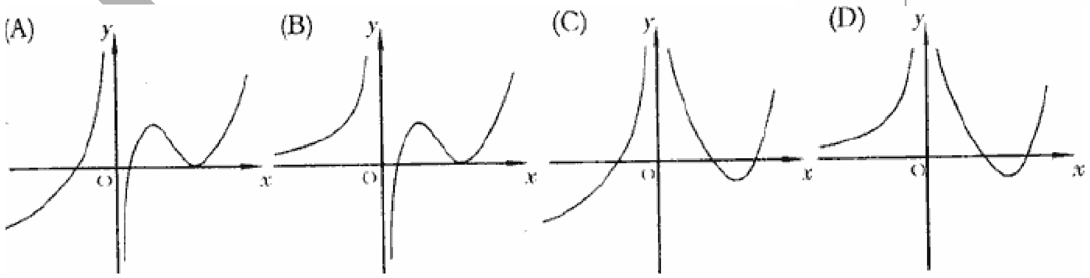
$$P\left\{\left|X-E(X)\right|\geq 2\right\}\leq\frac{D(X)}{2^2}=\frac{1}{2}$$

二、选择题（本题共 5 小题，每小题 3 分，共 15 分，在每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求，把所选项前的字母填在题后的括号内.）

（1）设函数 $f(x)$ 在定义域内可导， $y=f(x)$ 的图形如右图所示

则导函数 $y=f'(x)$ 的图形为 （ ）

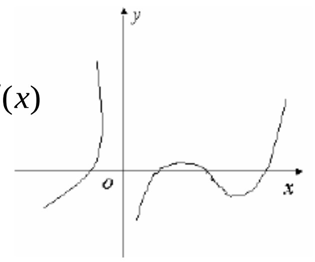




【答案】（1）D

【解】从题设图形可见，在 y 轴的左侧，曲线 $y=f(x)$ 是

严格单调增加的，因此当 $x<0$ 时，一定有 $f'(x)>0$ 对应 $y=f'(x)$



2

FREEKAOYAN

图形必在x 轴的上方，由此可排除（A），（C）；

又$y=f(x)$的图形在y轴右侧有三个零点，因此由罗尔中值定理知，

其导函数$y=f'(x)$图形在y轴一定有两个零点，进一步可排除（B）.

故正确答案为（D）.

（2）设函数$f(x,y)$在点$(0,0)$附近有定义，且$f_x^{'}(0,0)=3,\ f_y^{'}(0,0)=1,$则　　（　）

（A）$dz|_{(0,0)}=3dx+dy.$

（B）曲面$z=f(x,y)$在点$(0,0,f(0,0))$的法向量为$\{3,1,1\}$.

（C）曲线$\begin{cases} z=f(x,y) \\ y=0 \end{cases}$在点$(0,0,f(0,0))$的切向量为$\{1,0,3\}$.

（D）曲线$\begin{cases} z=f(x,y) \\ y=0 \end{cases}$在点(0, 0, f (0,0))的切向量为{3,0,1}.

【答案】（2）C

【解】题设只知道一点的偏导数存在，但不一定可微，因此可立即排除（A）；

至于（B），（C）,(D)则需要通过具体的计算才能进行区分，

令$F(x,y,z)=z-f(x,y)$，则有$F_x^{'}=-f_x^{'},F_y^{'}=-f_y^{'},F_z^{'}=1$

因此过点$(0,0,f(0,0))$的法向量为$\pm\{-3,-1,1\}$，可排除（B）；

曲线$\begin{cases} z=f(x,y) \\ y=0 \end{cases}$可表示为参数形式：$\begin{cases} x=x \\ y=0 \\ z=f(x,0) \end{cases}$，其中点$(0,0,f(0,0))$的切向量为

$$\pm\left\{1,0,f_x^{'}(0,0)\right\}=\pm\left\{1,0,3\right\}$$

故正确选项为（C）.

（3）设$f(0)=0$，则$f(x)$在点$x=0$可导的充要条件为　　（　）

（A）$\lim\limits_{h\to0}\frac{1}{h^2}f(1-\cosh)$存在.　　（B）$\lim\limits_{h\to0}\frac{1}{h}f(1-e^{h})$存在.

（C）$\lim\limits_{h\to0}\frac{1}{h^2}f(h-\sinh)$存在.　　（D）$\lim\limits_{h\to0}\frac{1}{h}\left[f(2h)-f(h)\right]$存在.

【答案】（3）B

【解】方法 1： 因为　$\lim\limits_{h\to0}\frac{1}{h}f(1-e^{h})\underline{\underline{1-e^{h}=x}}\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{x}\cdot\frac{x}{\ln(1-x)}$

FREEKAOYAN

可见，若 $f(x)$ 在点 $x=0$ 可导，则极限 $\lim\limits_{h\to0}\frac{1}{h}f(1-e^{h})$ 一定存在；反过来，若 $\lim\limits_{h\to0}\frac{1}{h}f(1-e^{h})$ 存在，则

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}\xlongequal{x=1-e^{h}}\lim_{h\to0}\frac{f(1-e^{h})}{h}\cdot\frac{h}{1-e^{h}}=-\lim_{h\to0}\frac{f(1-e^{h})}{h}$$

存在，即 $f(x)$ 在点 $x=0$ 可导，因此正确选项为（B）.

至于（A），（C）,(D)均为必要而非充分条件，可举反例说明不成立.比如，$f(x)=|x|$，在 $x=0$ 处不可导，但

$$\lim_{h\to0}\frac{1}{h^2}f(1-\cosh)=\lim_{h\to0}\frac{|1-\cosh|}{h^2}=\lim_{h\to0}\frac{1-\cosh}{h^2}=\frac{1}{2}$$

$$\lim_{h\to0}\frac{1}{h^2}f(h-\sinh)=\lim_{h\to0}\frac{|h-\sinh|}{h^2}=\lim_{h\to0}\left|\frac{h-\sinh}{h^3}\right|\cdot|h|=0$$

均存在，可排除（A）、（C）.

又如 $f(x)=\begin{cases}1, x\neq0\\0, x=0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处不可导，但

$\lim\limits_{h\to0}\frac{1}{h}\left[f(2h)-f(h)\right]=\lim\limits_{h\to0}\frac{1-1}{h}=0$ 存在，进一步可排除（D）.

（4）设 $A=\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}4&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$, 则 A与B （　　）

（A）合同且相似．　　（B）合同但不相似.

（C）不合同但相似．　　（D）不合同且不相似.

【答案】（4）A

【解】**方法 1：**因为 A 是实对称矩阵，且其特征值为：$\lambda_1=4,\lambda_2=\lambda_3=\lambda_4=0,$ 故存在正交矩阵 Q，使得

$$Q^{-1}AQ=Q^{T}AQ=\begin{bmatrix}4&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

可见，则 A与B 既合同又相似.

方法 2： A 是实对称矩阵，且 $r(A)=1,$ 故 $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0$ 是 A 的特征值，另一个特

征值，由 $\lambda_4=\sum_{i=1}^{4}\lambda_i=\sum_{i=1}^{4}a_{ii}=4.$

即 A 有特征值 $\lambda=4$ 和 $\lambda=0$（三重根），和对角阵 B 的特征值完全一致，故 A 相似且合同于 B.

(5)将一枚硬币重复掷 n 次，以 X 和 Y 分别表示正面向上和反面向上的次数，则 X 和 Y 的相关系数等于（ ）

（A）-1　　（B）0　　（C）$\frac{1}{2}$　　（D）1

【答案】(5) A

【解】$Y=n-X$，故 $D(Y)=D(n-X)=D(X)$.

$$\mathrm{cov}(X,Y)=\mathrm{cov}(X,n-X)=\mathrm{cov}(X,n)-\mathrm{cov}(X,X)$$

$$=E[X-E(X)][n-E(n)]-D(X)=-D(X)$$

$$\rho_{XY}=\frac{\mathrm{cov}(X,Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}=-\frac{-D(X)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(X)}}=-1.$$

三、(本题满分 6 分)

求 $\int\frac{\arctan e^x}{e^{2x}}dx$

【解】
$$\int\frac{\arctan e^x}{e^{2x}}dx=-\frac{1}{2}\int\arctan e^x\,d\left(e^{-2x}\right)$$

$$=-\frac{1}{2}\left(e^{-2x}\arctan e^x-\int\frac{de^x}{e^{2x}(1+e^{2x})}\right)$$

$$=-\frac{1}{2}\left(e^{-2x}\arctan e^x+e^{-x}+\arctan e^x\right)+C$$

四、(本题满分 6 分)

设函数 $z=f(x,y)$ 在点(1,1) 处可微，且 $f(1,1)=1,\frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{(1,1)}=3,\varphi(x)=f(x,f(x,x)).$

求 $\frac{d}{dx}\varphi^3(x)\Big|_{x=1}$.

【解】 由题设，有 $\varphi(1)=f(1,f(1,1))=f(1,1)=1,$

$$\frac{d}{dx}\varphi^3(x)\Big|_{x=1}=\left[3\varphi^2(x)\frac{d\varphi(x)}{dx}\right]\Big|_{x=1}$$

免费考研论坛Http://BBS.FreeKaoYan.Com

$$=3\varphi^2(x)\left[f_x'(x,f(x,x))+f_y'(x,f(x,x))\left(f_x'(x,x)+f_y'(x,x)\right)\right]\Big|_{x=1}$$

$$=3\cdot1\cdot\left[2+3(2+3)\right]=51$$

五、(本题满分 8 分)

设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1+x^2}{x}\arctan x, x\neq 0\\ 1,\quad x=0\end{cases}$，试将 $f(x)$ 展开成 x 的幂级数，并求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{1-4n^2}$ 的和.

【解】 因 $\left(\arctan x\right)'=\dfrac{1}{1+x^2}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n x^{2n},\qquad x\in(-1,1)$

故 $\arctan x=\int_0^x\left(\arctan x\right)'dx=\int_0^x\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}\right)dx$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\int_0^x x^{2n}dx=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1},\qquad x\in\left(-1,1\right)$$

于是

$$f(x)=\frac{1+x^2}{x}\arctan x=(1+x^2)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+2}$$

$$=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n}$$

$$=1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n-1}\right)x^{2n}$$

$$=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n 2}{1-4n^2}x^{2n},\qquad x\in\left(-1,1\right),x\neq0$$

上述级数显然在 $x=0$ 收敛于 1，而 $f(0)=1$，所以上述等式在处亦成立：

$$f(x)=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n 2}{1-4n^2}x^{2n},\qquad x\in\left(-1,1\right)$$

又在 $x=\pm1$ 处右边级数收敛，左边 $f(x)=\dfrac{1+x^2}{x}\arctan x$ 连续，所以等式可扩大到. $x=\pm1$

FREEKAOYAN

从而 $$f(x)=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n 2}{1-4n^2}x^{2n},\qquad x\in[-1,1]$$

因此 $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{1-4n^2}=\frac{1}{2}\left[f(1)-1\right]=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}.$$

六、(本题满分 7 分)

计算 $I=\oint_L (y^2-z^2)dx+(2z^2-x^2)dy+(3x^2-y^2)dz$，其中 L 是平面 $x+y+z=2$ 与柱面 $|x|+|y|=1$ 的交线，从 z 轴正向看去，L 为逆时针方向.

【解】方法 1：记 S 为平面 $x+y+z=2$ 上 L 所围成部分的上侧，D 为 S 在 xoy 坐标面上的投影.

由斯托克斯公式得

$$I=\iint_S(-2y-4z)dydz+(-2z-6x)dzdx+(-2x-6y)dxdy$$

$$=-\frac{2}{\sqrt{3}}\iint_S(4x+2y+3z)dS$$

按第一型曲面积分的算法，将 S 投影到 xoy，然后再将 S 的方程代入，计算 $dS=\sqrt{3}d\sigma$ 得

$$I=-\frac{2}{\sqrt{3}}\iint_S(4x+2y+3z)dS=-2\iint_D(x-y+6)d\sigma$$

由于 D 关于 y 轴对称，所以 $\iint_D xd\sigma=0$，D 关于 x 轴对称，$\iint_D yd\sigma=0$，所以

$$I=-12\iint_D dxdy=-24.$$

方法 2：转换投影法.用斯托克斯公式，取平面 $x+y+z=2$ 被 L 所围成的部分为 S，按斯托克斯公式的规定，它的方向向上，S 在 xoy 平面上的投影域记为

$D=\{(x,y)\mid |x|+|y|=1\}$. S 为 $z=2-x-y,\dfrac{\partial z}{\partial x}=-1,\dfrac{\partial z}{\partial y}=-1,$ 于是

$$I=\oint_L (y^2-z^2)dx+(2z^2-x^2)dy+(3x^2-y^2)dz$$

$$=\iint_S(-2y-4z)dydz+(-2z-6x)dzdx+(-2x-6y)dxdy$$

$$=\iint_S\{-2y-4z,-2z-6x,-2x-6y\}\cdot\left\{-\frac{\partial z}{\partial x},-\frac{\partial z}{\partial y},1\right\}dxdy$$

$$=-2\iint_S(4x+2y+3z)dxdy=-2\iint_D(x-y+6)dxdy$$
$$=-12\iint_D dxdy=-24.$$

其中$\iint_D(x-y)dxdy=\iint_D xdxdy-\iint_D ydxdy=0-0=0,$用的性质：$x$ 为x 的奇函数，D 对称于y轴；y为y的奇函数，D对称于x 轴；积分均应为零.

方法 3：降维法，取 S 如解法 1 中定义，代入I 中，

$$I=\oint_{L_1}(y^2-(2-x-y)^2)dx+(2(2-x-y)^2-x^2)dy+(3x^2-y^2)(-dx-dy)$$
$$=\oint_{L_1}(y^2-4x^2-2xy+4x+4y-4)dx+(3y^2-2x^2+4xy-8x-8y+8)dy$$
$$\underline{\underline{\text{格林公式}}}-2\iint_D(x-y+6)dxdy=-24$$

其中，L_1为L 在xoy平面上投影，逆时针.

方法 4：用斯托克斯公式后用第二型曲面积分逐个投影法，由方法 1，已有

$$I=\iint_S(-2y-4z)dydz+(-2z-6x)dzdx+(-2x-2y)dxdy,$$

用逐个投影法，例如计算 $I_1=\iint_S(-2y-4z)dydz,$

其中$D_{yz}=\{(y,z)\,\|\,2-y-z|+|y|\le 1\}$,分别令$y\ge 0,y\le 0,2-y-z\ge 0,2-y-z\le 0$，可得到$D_{yz}$的 4 条边界线的方程：

右：$2y+z=3$；上：$z=3$；左：$2y+z=1$；下：$z=1$.

于是 $I_1=-2\int_1^3 dz\int_{\frac{1}{2}(1-z)}^{\frac{1}{2}(3-z)}(y+2z)dy=-16$

类似地，可计算 $I_2=-2\iint_S(z+3x)dzdx=-8$

$I_3=-2\iint_S(x+y)dxdy=0$（由奇、偶数及对称性）

$I=I_1+I_2+I_3=-24.$

方法 5：参数法.L: $|x|+|y|=1,z=2-x-y$

当$x\ge 0,y\ge 0$时，$L_1:y=1-x,z=2-x-y$，x 从 1 到 0.于是

$$\oint_{L_1}(y^2-z^2)dx+(2z^2-x^2)dy+(3x^2-y^2)dz$$

$$=\int_1^0\left[(1-x)^2-1+(2-x^2)(-1)\right]dx=\frac{7}{3}.$$

当 $x\le 0, y\ge 0$ ， L_2： $y=1+x$, $z=1-2$, x 从 0 到 -1

$$\int_{L_2}=\int_0^{-1}(2x+4)dx=-3$$

当 $x\le 0, y\le 0$，$L_3: y=1-x, z=3$，x 从 −1 到 0

$$\int_{L_3}=\int_{-1}^{0}(2x^2+2x-26)dx=-\frac{79}{3}$$

当 $x\ge 0, y\le 0$，$L_4: y=x-1, z=3-2x$， x 从 0 到 1

$$\int_{L_4}=\int_0^{1}(-18x+12)dx=3.$$

所以 $$I=\int_{L_1}+\int_{L_2}+\int_{L_3}+\int_{L_4}=-24.$$

七、(本题满分 7 分)

设 $y=f(x)$ 在 $(-1,1)$ 内具有二阶连续导数且 $f''(x)\ne 0$, 试证：

（1） 对于$(-1,1)$内的任意 $x\ne 0$，存在唯一的 $\theta(x)\in(0,1)$ ，

使 $f(x)=f(0)+xf'\left[\theta(x)x\right]$成立；

（2）$\lim\limits_{x\to 0}\theta(x)=\frac{1}{2}.$

【解】方法 1：（1）任给非零 x∈$(-1,1)$，由拉格朗日中值定理得

$$f(x)=f(0)+xf'\left[\theta(x)x\right](0<\theta(x)<1)$$

因为 $f''(x)$ 在$(-1,1)$内连续且 $f''(x)\ne 0$, 所以 $f''(x)$ 在$(-1,1)$ 内不变号，不妨设 $f''(x)>0,$

则 $f''(x)$ 在$(-1,1)$内严格单调且增加，故唯一.

（2）对于非零 x∈$(-1,1)$，由拉格朗日中值定理得

$$f(x)=f(0)+xf'\left[\theta(x)x\right](0<\theta(x)<1)$$

于是有

$$\frac{f'\left[\theta(x)x\right]-f'(0)}{x}=\frac{f(x)-f(0)-f'(0)x}{x^2}$$

上式两边取极限，得

左端＝$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f'\left[\theta(x)x\right]-f'(0)}{\theta(x)x}\theta(x)=f''(0)\lim\limits_{x\to 0}\theta(x)$

FREEKAOYAN

右端＝$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f'(x)-f'(0)}{2x}=\dfrac{1}{2}f''(0)$

故 $\lim\limits_{x\to 0}\theta(x)=\dfrac{1}{2}.$

【解 2】

（1） 同【解 1】.

（2） 由泰勒公式得

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{1}{2}f''(\xi)x^2,\varepsilon$$

在 0 与 x 之间

所以

$$xf'\left[\theta(x)x\right]=f(x)-f(0)=f'(0)x+\frac{1}{2}f''(\xi)x^2,$$

从而

$$\frac{f'\left[\theta(x)x\right]-f'(0)}{\theta(x)x}\theta(x)=\frac{1}{2}f''(\xi),$$

由于

$$\lim_{x\to 0}\frac{f'\left[\theta(x)x\right]-f'(0)}{\theta(x)x}=f''(0),\lim_{x\to 0}f''(x)=\lim_{\xi\to 0}f''(\xi)=f''(0)$$

故$\lim\limits_{x\to 0}\theta(x)=\dfrac{1}{2}.$

八、(本题满分 8 分)

设有一高度为 $h(t)$ （t 为时间）的雪堆在融化过程中，其侧面满足方程 $z=h(t)-\dfrac{2(x^2+y^2)}{h(t)}$（设长度单位为厘米，时间单位为小时），已知体积减少的速率与侧面积成正比（比例系数 0.9），问高度为 130 厘米的雪堆全部融化需多少小时？

【解】记 V 为雪堆体积， S 为雪堆的侧面积，则

$$V=\int_0^{h(t)}dz=\iint\limits_{x^2+y^2\le\frac{1}{2}\left[h(t)^2-h(t)z\right]}dxdy$$

$$=\int_0^{h(t)}\frac{1}{2}\pi\left[h(t)^2-h(t)z\right]dz$$

$$=\frac{\pi}{4}h(t)^3$$

$$S=\iint\limits_{x^2+y^2\le\frac{h(t)^2}{2}}\sqrt{1+\left(Z_x'\right)^2+\left(Z_y'\right)^2}\,dxdy$$

$$=\iint\limits_{x^2+y^2\le\frac{h(t)^2}{2}}\sqrt{1+\frac{16(x^2+y^2)}{h(t)^2}}dxdy$$

$$=\frac{2\pi}{h(t)}\int_0^{\frac{h(t)}{\sqrt{2}}}\left[h^2(t)+16r^2\right]^{\frac{1}{2}}rdr$$

$$=\frac{13\pi h^2(t)}{12}$$

由题意知 $\frac{dV}{dt}=-0.9S(t)$, 将上述 $V(t)$ 和 $S(t)$ 代入，得

$$\frac{dh(t)}{dt}=-\frac{13}{10}$$

解得 $h(t)=-\frac{13}{10}t+C$

由 h(0) = 130, 得

$$h(t)=-\frac{13}{10}t+130.$$

令 h(t) → 0 得 t = 100 （小时）.

因此高度为 130 厘米得雪堆全部融化所需要时间为 100 小时.

九、(本题满分 6 分)

设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 为线性方程组 $Ax=0$ 的一个基础解系，

$\beta_1=t_1\alpha_1+t_2\alpha_2,\beta_2=t_1\alpha_2+t_2\alpha_3,\cdots,\beta_s=t_1\alpha_s+t_2\alpha_1$, 其中 t_1,t_2 为实常数.试问 t_1,t_2 满足什么关系时， $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 也为 $Ax=0$ 的一个基础解系.

【解】由于 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 为均为 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 的线性组合，所以 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 为均为 Ax = 0 的解.下面证明 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 线性无关.设

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s=0$$

即 $\left(t_1k_1+t_2k_s\right)\alpha_1+\left(t_2k_1+t_1k_2\right)\alpha_2+\cdots+\left(t_2k_{s-1}+t_1k_s\right)\alpha_s=0$

由于 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性无关，因此其系数全为零，即

$$\begin{cases}t_1k_1+t_2k_s=0\\t_2k_1+t_1k_2=0\\\quad\vdots\\t_2k_{s-1}+t_1k_s=0\end{cases}$$

其系数行列式

$$\begin{vmatrix} t_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ t_2 & t_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & t_2 & t_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & t_2 & t_1 \end{vmatrix} = t_1^s + (-1)t_2^s$$

可见，当 $t_1^s + (-1)t_2^s \neq 0,$ 即当 s 为偶数，$t_1 \neq \pm t_2$; 当 s 为奇数，$t_1 \neq t_2$ 时，上述方程组只有

零解 $k_1 = k_2 = \cdots = k_s = 0,$ 因此向量组 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_s$ 线性无关，

从而 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_s$ 也为 Ax = 0 的一个基础解系.

十、(本题满分 8 分)

已知 3 阶矩阵 A 与三维向量 x，使得向量组 x, Ax, A^2x 线性无关，且满足

$$A^3x = 3Ax - 2A^2x$$

（1） 记 $P = \left(x, Ax, A^2x\right)$, 求 2 阶矩阵 B，使 $A = PBP^{-1}$;

（2） 计算行列式 $\left|A + E\right|$.

【解】

（1）方法一：

因为

$Ax = Ax$

$A\left(Ax\right) = A^2x$

$A\left(A^2x\right) = A^3x = 3Ax - 2A^2x$

于是综合上述三式有

$$A\left(x, Ax, A^2x\right) = \left(Ax, A^2x, A^3x\right) = \left(Ax, A^2x, 3Ax - 2A^2x\right)$$

$$= \left(x, Ax, A^2x\right)\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix},$$

即

$$AP = P\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} = PB$$

也即 $A = PBP^{-1}$; 其中

$$B=\begin{bmatrix}0&0&0\\1&0&3\\0&1&-2\end{bmatrix}$$

方法二：

设$\begin{bmatrix}a_1&a_2&a_3\\b_1&b_2&b_3\\c_1&c_2&c_3\end{bmatrix}$，则由 AP = PB 得

$$\left(Ax,A^2x,A^3x\right)=\left(x,Ax,A^2x\right)\begin{bmatrix}a_1&a_2&a_3\\b_1&b_2&b_3\\c_1&c_2&c_3\end{bmatrix},$$

上式可写成

$$Ax=a_1x+b_1Ax+c_1A^2x, \qquad (1)$$
$$A^2x=a_2x+b_2Ax+c_2A^2x, \qquad (2)$$
$$A^3x=a_3x+b_3Ax+c_3A^2x, \qquad (3)$$

将 $A^3x=3Ax-2A^2x$ 代入（3）式得

$$3Ax-2A^2x=a_3x+b_3Ax+c_3A^2x \qquad (4)$$

由于 x,Ax,A^2x 线性无关，故

由（1）式可得 $a_1=c_1=0,b_1=1;$

由（2）式可得 $a_2=b_2=0,c_2=1;$

由（4）式可得 $a_3=b_3=0,c_3=-2;$

故

$$B=\begin{bmatrix}0&0&0\\1&0&3\\0&1&-2\end{bmatrix}$$

方法三：

将 $A^3x=3Ax-2A^2x$ 改写成

$$A\left(A^2x-Ax\right)=-3\left(A^2x-Ax\right)$$

故 $\lambda_1=-3$ 为 A 的特征值，A^2x-Ax 为属于 -3 的特征向量；

FREEKAOYAN

$\lambda_2=1$为 A 的特征值，A^2x+3Ax为属于 1 的特征向量；

$\lambda_3=0$为 A 的特征值，$A^2x+2Ax-3x$为属于 -3 的特征向量；

令

$$Q=\left(x,Ax,A^2x\right)\begin{bmatrix}0&0&-3\\-1&3&2\\1&1&1\end{bmatrix}=P\begin{bmatrix}0&0&-3\\-1&3&2\\1&1&1\end{bmatrix},$$

于是

$$Q^{-1}AQ=\begin{bmatrix}0&0&-3\\-1&3&2\\1&1&1\end{bmatrix}^{-1}P^{-1}AP\begin{bmatrix}0&0&-3\\-1&3&2\\1&1&1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}0&0&-3\\-1&3&2\\1&1&1\end{bmatrix}^{-1}B\begin{bmatrix}0&0&-3\\-1&3&2\\1&1&1\end{bmatrix}$$

但另一方面，Q 为特征向量组成的矩阵，所以$Q^{-1}AQ$为由对应的特征值组成的对角矩阵：

$$Q^{-1}AQ=\begin{bmatrix}-3&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{bmatrix},$$

所以

$$B=\begin{bmatrix}0&0&-3\\-1&3&2\\1&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-3&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&-3\\-1&3&2\\1&1&1\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}0&0&0\\1&0&3\\0&1&-2\end{bmatrix}$$

（2）由（1）知，A 与 B 相似，故 A+ E 与 B + E 也相似，于是有

$$\left|A+E\right|=\left|B+E\right|=\begin{vmatrix}1&0&0\\1&1&3\\0&1&-1\end{vmatrix}=-4$$

十一、(本题满分 7 分)

设某班车起点站上客人数 X 服从参数 $\lambda(\lambda>0)$ 的泊松分布，每位乘客在中途下车的概率为 $P(0<P<1)$，且途中下车与否相互独立，以 Y 表示在中途下车的人数，求：

（1）在发车时有 n 个乘客的条件下，中途有 m 人下车的概率；

（2）二维随机变量 (X,Y) 的概率分布.

FREEKAOYAN

【解】（1） 求在发车时有 n 个乘客的条件下，中途有 m 人下车的概率，相当于求条件概率 $P\left\{Y=m \mid X=n\right\}$，

而由题设知，此条件概率服从二项分布，
因此有:

$$P\left\{Y=m \mid X=n\right\}=C_n^m P^m(1-P)^{n-m}, 0 \le m \le n, n=0,1,2\cdots$$

（2） 利用乘法公式，得

$$P\left\{X=n \mid Y=m\right\}=P\left\{Y=m \mid X=n\right\}P\left\{X=n\right\}=C_n^m P^m(1-P)^{n-m}\cdot\frac{e^{-\lambda}}{n!}\lambda^n, 0 \le m \le n, n=0,1,2\cdots$$

十二、(本题满分 7 分)

设总体 X 服从证态分布 $N(\mu,\sigma^2)(\sigma>0)$, 从该总体中抽取简单随机样本

$X_1, X_2, \cdots, X_{2n}(n\ge 2)$ 其样本均值为 $\overline{X}=\frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{2n}X_i$, 求统计量

$Y=\sum_{i=1}^{n}\left(X_i+X_{n+i}-2\overline{X}\right)^2$, 的数学期望 $E(Y)$.

【解】

记 $\overline{X_1}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i, \overline{X_2}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_{n+i}$ 则有 $2\overline{X}=\overline{X_1}+\overline{X_2}$

$$\text{因此}\ E(Y)=E\left[\sum_{i=1}^{n}\left(X_i+X_{n+i}-2\overline{X}\right)^2\right]=E\left\{\sum_{i=1}^{n}\left[\left(X_i-\overline{X_1}\right)+\left(X_{n+i}-\overline{X_2}\right)\right]^2\right\}$$

$$=E\left\{\sum_{i=1}^{n}\left[\left(X_i-\overline{X_1}\right)^2+2\left(X_i-\overline{X_1}\right)\left(X_{n+i}-\overline{X_2}\right)+\left(X_{n+i}-\overline{X_2}\right)^2\right]\right\}$$

$$=E\left[\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\overline{X_1}\right)^2\right]+0+E\left[\sum_{i=1}^{n}\left(X_{n+i}-\overline{X_2}\right)^2\right]$$

$$=\left(n-1\right)\delta^2+\left(n-1\right)\delta^2$$

$$=2\left(n-1\right)\delta^2$$

FREEKAOYAN