2001 年全国硕士研究生入学统一考试经济数学三试题详解及评析

一、填空题

（1）设生产函数为$Q=AL^{\alpha}K^{\beta}$，其中Q是产出量,L 是劳动投入量,K 是资本投入量,而A,

α, β 均为大于零的参数,则当$Q=1$时K关于L的弹性为______

【答案】（1） $-\dfrac{\alpha}{\beta}$

【解】 当$Q=1$时,有$K=A^{\frac{1}{\beta}}L^{\frac{\alpha}{\beta}}$,

于是K关于L的弹性为

$$\zeta=L\frac{K'(L)}{K(L)}=L\cdot\frac{-\dfrac{\alpha}{\beta}A^{-\frac{1}{\beta}}L^{-\frac{\alpha}{\beta}-1}}{A^{\frac{1}{\beta}}L^{\frac{\alpha}{\beta}}}=-\frac{\alpha}{\beta}.$$

（2） 某公司每年的工资总额比上一年增加20%的基础上再追加2 百万. 若以W_t表示第t

年的工资总额（单位：百万元），则W_t满足的差分方程是___

【答案】（2） $1.2W_{t-1}+2$

【解】$W_t=(1+0.2)W_{t-1}+2=1.2W_{t-1}+2$

(3) 设矩阵$A=\begin{bmatrix}k&1&1&1\\1&k&1&1\\1&1&k&1\\1&1&1&k\end{bmatrix}$, 且秩$(\boldsymbol{A})$=3,则$k$=______

【答案】（3） -3

【解】方法1：由题设$r(A)=3$,知必有

$$|A|=\begin{vmatrix}k&1&1&1\\1&k&1&1\\1&1&k&1\\1&1&1&k\end{vmatrix}=(k+3)(k-1)^3=0,$$

解得 $k=1$或$k=-3$.显然$k=1$时$r(A)=1$,不符合题意,因此一定有$k=-3$.

方法2：初等变换. 不改变矩阵的秩，对 A 作初等变换有

$$A=\begin{bmatrix} k & 1 & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 & 1 \\ 1 & 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & 1 & k \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} k & 1 & 1 & 1 \\ 1-k & k-1 & 0 & 0 \\ 1-k & 0 & k-1 & 0 \\ 1-k & 0 & 0 & k-1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} k+3 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & k-1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k-1 \end{bmatrix}$$

故知 $k=-3$ 时，$r(A)=3$.

（4）设随机变量 X,Y 的数学期望都是2,方差分别为1和4,而相关系数为0.5.则根据切比雪夫不等式 $P\{|X-Y|\geq 6\}\leq$ ____.

【答案】（4） $\dfrac{1}{12}$

【解】 另 $Z=X-Y$，则

$$E(Z)=E(X)-E(Y)=0,$$

$$D(Z)=D(X-Y)=D(X)+D(Y)-2Cov(X,Y)$$

$$=1+4-2\cdot 0.5\cdot\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}=3,$$

于是有

$$P\{|X-Y|\geq 6\}=P\{|Z-E(Z)|\geq 6\}\leq\frac{D(Z)}{6^2}=\frac{1}{12}.$$

（5）设总体X服从正态分布 $N(0,0.2^2)$, 而 $X_1,X_2,\cdots X_{15}$ 是来自总体X的简单随机样本，则

随机变量 $Y=\dfrac{X_1^2+\cdots+X_{10}^2}{2\left(X_{11}^2+\cdots+X_{15}^2\right)}$ 服从___分布，参数为_______

【答案】（5） F $(10,5)$

【解】 因为 $X_i\sim N(0,2^2)i=1,2,\cdots,15.$ 于是 $\dfrac{X_i}{2}\sim N(0,1),$ 从而有

$$\left(\frac{X_1}{2}\right)^2+\cdots+\left(\frac{X_{10}}{2}\right)^2\sim\chi^2(10),\left(\frac{X_{11}}{2}\right)^2+\cdots+\left(\frac{X_{15}}{2}\right)^2\sim\chi^2(5),$$

而且由样本的独立性可知，

$$\left(\frac{X_1}{2}\right)^2+\cdots+\left(\frac{X_{10}}{2}\right)^2\sim\chi^2(10) \text{ 与 } \left(\frac{X_{11}}{2}\right)^2+\cdots+\left(\frac{X_{15}}{2}\right)^2\sim\chi^2(5) \text{ 相互独立.}$$

故

$$Y=\frac{X_1^2+\cdots+X_{10}^2}{2\left(X_{11}^2+\cdots+X_{15}^2\right)}=\frac{\left[\left(\frac{X_1}{2}\right)^2+\cdots+\left(\frac{X_{10}}{2}\right)^2\right]/10}{\left[\left(\frac{X_{11}}{2}\right)^2+\cdots+\left(\frac{X_{15}}{2}\right)^2\right]/5}\sim F(10,5).$$

故Y服从第一个自由度为10，第二个自由度为5 的F分布.

二、选择题

（1）设函数$f(x)$的导数在$x=a$处连续,又$\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{x-a}=-1$, 则

(A) $x=a$ 是$f(x)$的极小值点.

(B) $x=a$ 是$f(x)$的极大值点.

(C) $(a,f(a))$是曲线$y=f(x)$的拐点.

(D) $x=a$不是$f(x)$的极值点, $(a,f(a))$也不是曲线$y=f(x)$的拐点.

【答案】（1）（B）

【解】**方法1**：由$\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{x-a}=-1$, 知$\lim\limits_{x\to a}f'(x)=0$, 即$f'(a)=0$,于是有

$$f''(a)=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)-f'(a)}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{x-a}=-1,$$

即 $f'(a)=0$, $f''(a)=-1<0$,故$x=a$是$f(x)$的极大值点,

因此,正确选项为(B).

方法2：由$\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{x-a}=-1$,；及保号性定理知，存在$x=a$的去心邻域，在此去心邻域内$\frac{f'(x)}{x-a}<0$. 于是推知，在此去心邻域内当$x<a$时$f'(x)>0$；当$x>a$时$f'(x)<0$. 又由条件知$f(x)$在$x=a$处连续，由判定极值的第一充分条件知，$f(a)$为$f(x)$的极大值.

因此，选 (B).

（2）设函数$g(x)=\int_0^x f(u)du$, 其中$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}(x^2+1), 0\le x\le 1\\ \frac{1}{3}(x-1), 1\le x\le 2\end{cases}$, 则$g(x)$在区间

(0,2) 内

(A)无界 （B）递减 (C) 不连续 (D) 连续

【答案】（2）(D)

【解】 当$0\le x\le 1$时,有 $g(x)=\int_0^x\frac{1}{2}(x^2+1)dx=\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{2}x,$

当$1\le x\le 2$时,有$g(x)=\int_0^x\frac{1}{2}(x^2+1)dx+\int_1^x\frac{1}{3}(x-1)dx=\frac{2}{3}+\frac{1}{6}\left(x-1\right)^2,$

即 $$g(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{6}x^3+\dfrac{1}{2}x, & 0\le x\le 1\\ \dfrac{2}{3}+\dfrac{1}{6}(x-1)^2, & 1\le x\le 2\end{cases}$$

显然 $g(x)$ 在区间 $[0,2]$ 内连续，所以,应选 (D).

（3）设 $A=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}&a_{14}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}&a_{24}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}&a_{34}\\a_{41}&a_{42}&a_{43}&a_{44}\end{bmatrix},B=\begin{bmatrix}a_{14}&a_{13}&a_{12}&a_{11}\\a_{24}&a_{23}&a_{22}&a_{21}\\a_{34}&a_{33}&a_{32}&a_{31}\\a_{44}&a_{43}&a_{42}&a_{41}\end{bmatrix},P_1=\begin{bmatrix}0&0&0&1\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\1&0&0&0\end{bmatrix},$

$P_2=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$,其中$\boldsymbol{A}$ 可逆,则 B^{-1} 等于

(A) $A^{-1}P_1P_2$ （B） $P_1A^{-1}P_2$ (C) $P_1P_2A^{-1}$ (D) $P_2A^{-1}P_1$.

【答案】（3） （C）

【解】将 A 的 2、3 列互换，再 1、4 列互换，可得 B，根据初等阵的性质，有

$$B=AP_2P_1$$

两边求逆，且 $P_1^{-1}=P_1,P_2^{-1}=P_2$，得 $B^{-1}=\left(AP_2P_1\right)^{-1}=P_1^{-1}P_2^{-1}A^{-1}=P_1P_2A$.

故应选（C）.

（4）设$\boldsymbol{A}$ 是n 阶矩阵， α 是n维列向量.若秩$\begin{pmatrix}A&\alpha\\\alpha^T&0\end{pmatrix}=$秩(A)，则线性方程组

(A) $\boldsymbol{AX}=\alpha$ 必有无穷多解 (B) $\boldsymbol{AX}=\alpha$ 必有惟一解.

(C) $\begin{pmatrix}A&\alpha\\\alpha^T&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}X\\y\end{pmatrix}=0$ 仅有零解 (D) $\begin{pmatrix}A&\alpha\\\alpha^T&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}X\\y\end{pmatrix}=0$ 必有非零解.

【答案】（4） (D)

【解】 由题设，显然有秩$\begin{pmatrix}A&\alpha\\\alpha^T&0\end{pmatrix}=$秩$(A)\le n\le n+1$, 即系数矩阵$\begin{pmatrix}A&\alpha\\\alpha^T&0\end{pmatrix}$非列满秩，

因此齐次线性方程组$\begin{pmatrix}A&\alpha\\\alpha^T&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}X\\y\end{pmatrix}=0$必有非零解.

故正确选项为（D）.

（5）将一枚硬币重复掷n 次,以X和Y 分别表示正面向上和反面向上的次数,则X和Y的相关系数等于

(A) -1　　　(B) 0　　　(C) $\frac{1}{2}$　　　(D) 1

【答案】（5）　(A)

【解】设 X和Y 分别表示正面向上和反面向上的次数,则有$Y=n-X$,因此X和Y 的相关系数为$r = -1$.

三 、（本题满分8 分）

设$u= f(x,y,z)$有连续的一阶偏导数,又函数$y=y(x)$及$z=z(x)$分别由下列两式确定:$e^{xy}-xy=2$和$e^x=\int_0^{x-z}\frac{\sin t}{t}dt$,求$\frac{du}{dx}$

【解】 根据复合函数求导公式,有

$$\frac{du}{dx}=\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx}+\frac{\partial f}{\partial z}\cdot\frac{dz}{dx} \qquad (*)$$

由$e^{xy}-xy=2$两边对x求导,得

$$e^{xy}(y+x\frac{dy}{dx})-(y+x\frac{dy}{dx})=0,$$

即
$$\frac{dy}{dx}=-\frac{y}{x}.$$

由$e^x=\int_0^{x-z}\frac{\sin t}{t}dt$,两边对$x$求导,得

$$e^x=\frac{\sin(x-z)}{x-z}\cdot(1-\frac{dz}{dx}),$$

即
$$\frac{dz}{dx}=1-\frac{e^x(x-z)}{\sin(x-z)}.$$

将其代入(*)式,得

$$\frac{du}{dx}=\frac{\partial f}{\partial x}-\frac{y}{x}\frac{\partial f}{\partial y}+\left(1-\frac{e^x(x-z)}{\sin(x-z)}\right)\frac{\partial f}{\partial z}.$$

四 、（本题满分8 分）

已知$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内可导,且$\lim\limits_{x\to\infty}f'(x)=e$, $\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{x+c}{x-c})^x=\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)-f(x-1)]$,求$c$的值.

【解】因为 $\lim\limits_{x\to\infty}(\dfrac{x+c}{x-c})^x=\lim\limits_{x\to\infty}\left[(1+\dfrac{2c}{x-c})^{\frac{x-c}{2c}}\right]^{\frac{2cx}{x-c}}=e^{2c}$.

又由拉格朗日中值定理,有

$$f(x)-f(x-1)=f'(\xi)\cdot(x-(x-1))=f'(\xi),$$

于是 ξ 介于 $x-1$ 与 x 之间,于是

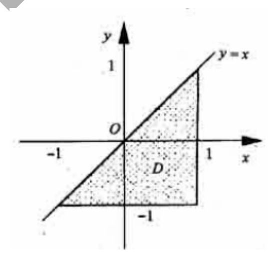
$$\lim_{x\to\infty}[f(x)-f(x-1)]=\lim_{x\to\infty}f'(\zeta)=e$$

从而 $e^{2c}=e$ 故 $c=\dfrac{1}{2}$.

五 、（本题满分8 分）

求二重积分 $\iint\limits_D y[1+xe^{\frac{1}{2}(x^2+y^2)}]dxdy$ 的值,其中D 是由直线y=x,y= −1及x =1围成的平面区域

【解】 积分区域如图所示



$$\iint\limits_D y[1+xe^{\frac{1}{2}(x^2+y^2)}]dxdy=\iint\limits_D ydxdy+\iint\limits_D xye^{\frac{1}{2}(x^2+y^2)}dxdy,$$

其中

$$\iint\limits_D ydxdy=\int_{-1}^{1}dy\int_y^1 ydx=\int_{-1}^{1}y(1-y)dy=-\frac{2}{3};$$

$$\iint\limits_D xye^{\frac{1}{2}(x^2+y^2)}dxdy=\int_{-1}^{1}ydy\int_y^1 xe^{\frac{1}{2}(x^2+y^2)}dx=\int_{-1}^{1}y(e^{\frac{1}{2}(1+y^2)}-e^{y^2})dy=0$$

于是

$$\iint\limits_D y[1+xe^{\frac{1}{2}(x^2+y^2)}]dxdy=-\frac{2}{3}$$

六、（本题满分9 分）

已知抛物线 $y=px^2+qx$（其中p<0,q>0）在第一象限与直线x+y=5相切，且此抛物线与x轴所围成的平面图形的面积为S.

（1） 问p和q为何值时，S达到最大?

（2）求出此最大值.

【解】方法1：题中抛物线 $y=px^2+qx$ 与 x 轴交点的横坐标为：$x_1=0,x_2=-\dfrac{q}{p}.$

面积 S 为

$$S=\int_0^{-\frac{q}{p}}\left(px^2+qx\right)dx=\left(\frac{p}{3}x^3+\frac{q}{2}x^2\right)\Bigg|_0^{-\frac{q}{p}}.$$

因直线 $x+y=5$ 与抛物线 $y=px^2+qx$ 相切，故它们有惟一公共点.

由方程组 $\begin{cases}x+y=5\\ y=px^2+qx\end{cases}$

得 $y=px^2+(q+1)x-5=0,$ 其判别式必为零，即

$$\Delta=(q+1)^2+20p=0,\ p=-\frac{1}{20}(q+1)^2.$$

将 p 代入 S 中，得 $S(q)=\dfrac{200q^3}{3(q+1)^4}.$

令 $S'(q)=\dfrac{200q^3(3-q)}{3(q+1)^5}\ \underline{\underline{\text{令}}}\ 0.$

得驻点 $q=3.$ 当 $1<q<3$ 时，$S'(x)>0;$ $q>3$ 时，$S'(x)<0;$ 当 $q=3$ 时，$S(q)$ 取极大值，即最大值.

此时 $p=-\dfrac{4}{5},$ 从而最大值为 $S=\dfrac{225}{32}.$

方法2：题中抛物线 $y=px^2+qx$ 与 x 轴交点的横坐标为：$x_1=0,x_2=-\dfrac{q}{p}.$

面积 S 为

$$S=\int_0^{-\frac{q}{p}}\left(px^2+qx\right)dx=\left(\frac{p}{3}x^3+\frac{q}{2}x^2\right)\Bigg|_0^{-\frac{q}{p}}=\frac{q^3}{6p^2}.$$

以下由题设条件 $y=px^2+qx$ 与直线 $x+y=5$ 推出 p 与 q 的关系.

设抛物线 $y=px^2+qx$ 与直线 $x+y=5$ 相切的切点坐标为 (x_0,y_0)，于是有

$$y_0=px_0^2+qx_0$$

$$x_0+y_0=5$$

$$y'\Big|_{x=x_0}=2px_0+q=-1$$

由第2式解出 $y_0=5-x_0$，第3式解出 $x_0=-\dfrac{q+1}{2p}$，代入第1式化简得

$p=-\dfrac{1}{20}(q+1)^2$（以下方法同方法1）

七、（本题满分9 分）

设$f(x)$在区间[0,1]上连续,在(0,1)内可导,且满足

$f(1)=k\int_0^{\frac{1}{3}}xe^{1-x}f(x)dx,(k>1).$

证明存在 $\xi\in(0,1)$, 使得 $f'(\xi)=2(1-\xi^{-1})f(\xi).$

【解】由 $f(1)=k\int_0^{\frac{1}{k}}xe^{1-x}f(x)dx,(k>1).$ 及积分中值定理，知至少存在一点 $\xi\in\left(0,\dfrac{1}{k}\right)$,

使得

$$f(1)=k\int_0^{\frac{1}{k}}xe^{1-x}f(x)dx=\xi_1e^{1-\xi}f'(\xi_1)$$

即 $$f(1)e^{-1}=\xi_1e^{-\xi_1}f(\xi_1).$$

令 $F(x)=xe^{-x}f(x).$ 那么, $F(x)$ 在 $[\xi_1,1]$ 上连续,在 $(\xi_1,1)$ 内可导,且 $F(\xi_1)=F(1)$

由罗尔中值定理知,至少存在一点 $\xi\in(\xi_1,1)\subset(0,1)$,使得

$$F'(\xi)=e^{-\xi}f(\xi)+\xi e^{-\xi}f'(\xi)=0,$$

即 $f'(\xi)=(1-\xi^{-1})f(\xi).$

八、已知 $f_n(x)$ 满足 $f_n'(x)=f_n(x)+x^{n-1}e^x$（$n$为正整数）且 $f_n(1)=\dfrac{e}{n}$, 求函数项级数

$\sum\limits_{i=1}^{\infty}f_n(x)$ 之和.

【解】由已知条件可见 $f_n'(x)-f_n(x)=x^{n-1}e^x$, 这是以 $f_n(x)$ 为未知函数的一阶线性非齐次微分方程，其通解为

$$f_n(x)=e^{\int dx}\left(\int x^{n-1}e^xe^{-\int dx}dx+C\right)=e^x\left(\frac{x^n}{n}+C\right),$$

由条件 $f_n(1)=\dfrac{e}{n}$, 得 $C=0$，故 $f_n(x)=\dfrac{x^ne^x}{n}$, 从而

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n e^x}{n}=e^x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$$

记 $s(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$, 其收敛域为 $(-1,1)$，当 $x\in(-1,1)$ 时，可以逐项求导：

$$S'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x^n}{n}\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}x^{n-1}=\frac{1}{1-x},$$

故

$$S(x)=\int_0^x\frac{1}{1-t}dt=-\ln(1-x).$$

即有 $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}=-\ln(1-x),\qquad x\in(-1,1)$$

而在 $x=-1$ 处，右边函数连续，左边级数在此点收敛，因此成立的范围可扩大到 $x=-1$ 处，即

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}=-\ln(1-x),\qquad x\in[-1,1)$$

于是，当 $-1\le x\le 1$ 时，有 $\sum_{i=1}^{\infty}f_n(x)=-e^x\ln(1-x)$.

九、（本题满分13 分）

设矩阵 $A=\begin{bmatrix}1&1&a\\1&a&1\\a&1&1\end{bmatrix},\beta=\begin{bmatrix}1\\1\\-2\end{bmatrix}$. 已知线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\beta$ 有解但不唯一,试求:

(1) a 的值;

(2) 正交矩阵Q,使 Q^TAQ 为对角矩阵.

则有 $Q^TAQ=Q^{-1}AQ=\begin{bmatrix}3&0&0\\0&-3&0\\0&0&0\end{bmatrix}$.

【解】(1) 对线性方程组 $AX=\beta$ $AX=\beta$ 的增广矩阵作行初等变换,有.

$$\overline{A}=\left[\begin{array}{ccc:c}1&1&a&1\\1&a&1&1\\a&1&1&-2\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc:c}1&1&a&1\\0&a-1&1-a&0\\0&0&(a-1)(a+2)&a+2\end{array}\right]$$

因为方程组 $AX=\beta$ 有解但不唯一,所以 $r(A)=r(\overline{A})<3$ 3,故 $a=-2$.

(2) 由(1),有 $A=\begin{bmatrix}1 & 1 & -2\\ 1 & -2 & 1\\ -2 & 1 & 1\end{bmatrix}$

A 的特征多项式 $\left|\lambda E-A\right|=\lambda(\lambda+3)(\lambda-3)$.

故 A 的特征值为 $\lambda_1=3,\lambda_2=-3,\lambda_3=0$.

对应的特征向量依次为

$$\alpha_1=(1,0,-1)^T,\alpha_2=(1,-2,1)^T,\alpha_3=(1,1,1)^T.$$

由于他们是三个不同特征值的特征向量,因此相互正交,将 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 单位化,得

$$\beta_1=(\frac{1}{\sqrt{2}},0,-\frac{1}{\sqrt{2}})^T,\beta_2=(\frac{1}{\sqrt{6}},-\frac{2}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}})^T,\beta_3=(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}})^T.$$

令

$$Q=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\\ 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\end{bmatrix},$$

则有 $Q^TAQ=Q^{-1}AQ=\begin{bmatrix}3 & 0 & 0\\ 0 & -3 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$.

十、（本题满分13 分）

设$\boldsymbol{A}$为n阶实对称矩阵，秩（A）=n， A_{ij} 是 $A=\left(a_{ij}\right)_{n\times n}$ 中元素 a_{ij} 的代数余子式 $\left(i,j\right.$

$\left.=1,2,\cdots,n\right)$，二次型

$$f(x_1,x_2,\cdots x_n)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{A_{ij}}{A}x_ix_j.$$

（1） 记 $A=(x_1,x_2,\cdots x_n)$, 把 $f(x_1,x_2,\cdots x_n)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{A_{ij}}{A}x_ix_j$.写成矩阵形式，并证明二次型 $f(X)$ 的矩阵为 A^{-1};

（2） 二次型 $g(X)=X^TAX$ 与 $f(X)$ 的规范形是否相同？说明理由.

【解】（1）二次型 $f(x_1,x_2,\cdots x_n)$ 的矩阵形式为

$$f(X)=(x_1,x_2,\cdots x_n)\frac{1}{|A|}\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{n1} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

因秩（A）$=n$， A 可逆，且 $A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^*$.

又因为 $\left(A^{-1}\right)^T=\left(A^T\right)^{-1}=A^{-1}$, 可见 A^{-1} 也是实对称矩阵，因此二次型 $f(x_1,x_2,\cdots x_n)$ 的对称矩阵形式为 A^{-1}.

（2）**方法1**：因为 $\left(A^{-1}\right)^T AA^{-1}=\left(A^T\right)^{-1}E=A^{-1}$ 所以$\boldsymbol{A}$ 与 A^{-1}合同，于是 $g(X)=X^TAX$ 与 $f(X)$ 有相同的规范形.

方法2：对 $f(X)=X^TA^{-1}X$ 作坐标变换（可逆线性变换 $X=AY$ ），则有

$$f(X)=X^TA^{-1}X\underline{\underline{令X=AY}}(AY^T)A^{-1}AY$$

$$=Y^TA^TY=Y^TAY=g(Y)$$

坐标变换（可逆线性变换）不改变二次型的正、负惯性指数，故 f 和g 有相同的规范形.

十一、（本题满分13 分）

生产线生产的产品成箱包装,每箱的重量是随机的,假设每箱平均重50 千克,标准差为5 千克.若用最大载重量为5 吨的汽车承运,试利用中心极限定理说明每辆车最多可以装多少箱,才能保障不超载的概率大于0.977. ($\Phi(2)$=0.977,其中$\Phi(x)$ 是标准正态分布函数).

【解】 设 $X_i(i=1,2,\cdots n)$ 是装运的第i i 箱的重量(单位:千克), n 是所求箱数.由题设可以将 $X_1,X_i,\cdots X_n$ 视为独立同分布的随机变量,而 n 箱的总重量

$S_n=X_1+X_2+\cdots+X_n$ 是独立同分布随机变量之和.

由题设,有 $E(X_i)=50,\sqrt{D(X_i)}=5;E(S_n)=50n,\sqrt{D(S_n)}=5\sqrt{n}$ (单位:千克)

根据列维—林德柏格中心极限定理,知 S_n 近似服从正泰分布 $N(50n,25n)$ 而箱数 n 根据下述条件确定

$$P\left\{S_n \le 5000\right\} = P\left\{\frac{S_n - 50n}{5\sqrt{n}} \le \frac{5000 - 50n}{5\sqrt{n}}\right\}$$

$$\approx \Phi(\frac{1000-10n}{\sqrt{n}}) > 0.977 = \Phi(2)$$

由此得

$$\frac{1000-10n}{\sqrt{n}} > 2,$$

从而$n < 98.0199$，即最多可以装98箱.

十二、（本题满分8 分）

设随机变量X 和Y 对联和分布是正方形$G=\left\{(x,y)|1\le x\le 3,1\le y\le 3\right\}$上的均匀分布，试求随机变量$U=\left\{X-Y\right\}$ 的概率密度 $p(u)$.

【解】 由题设条件知，X和Y 的联合密度为

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{4},1\le x\le 3,1\le y\le 3, \\ 0,\text{其他} \end{cases}$$

以$F(u) = P\left\{U \le u\right\} = P\left\{|x-y| \le u\right\}.(-\infty,+\alpha)$表示随机变量$U$ 的分布函数.显然，

当$u \le 0$时，$F(u) = 0$；当$u \ge 2$时，$F(u) = 1$.

当$0 < u < 2$时,则

$$F(u) = \iint\limits_{|x-y|\le u} f(x,y)dxdy = \iint\limits_{|x-y|\le u} \frac{1}{2}dxdy = \frac{1}{4}\left[4-(2-u)^2\right] = 1 - \frac{1}{4}(2-u)^2$$

于是随机变量U 的概率密度为

$$p(u) = F'(u) = \begin{cases} \frac{1}{2}(2-u), 0<u<2, \\ 0,\quad \text{其他} \end{cases}$$