2000 年全国硕士研究生入学统一考试数学一试题

一、填空题（本题共 5 小题，每小题 3 分，满分 15 分，把答案填在题中横线上）

（1） $\int_0^1 \sqrt{2x-x^2}dx=$________

（2）曲面 $x^2+2y^2+3z^2=21$ 在点 $(1,\ \text{-}2,\ 2)$ 的法线方程为___________

（3）微分方程 $xy''+3y'=0$ 的通解为_______________

（4）已知方程组 $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & a+2 \\ 1 & a & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$ 无解，则 $a=$________

（5）设两个相互独立的事件 A 和 B 都不发生的概率为 $\dfrac{1}{9}$ ，A 发生 B 不发生的概率与 B 发生 A 不发生的概率相等，则 $P(A)$ =________

二、选择题（本题共 5 小题，每小题 3 分，共 15 分，在每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求，把所选项前的字母填在题后的括号内.）

（1）设 $f(x), g(x)$ 是恒大于零的可导函数，且 $f'(x)g(x)-f(x)g'(x)<0,$ 则当 $a<x<b$ 时，有　　　　（　）

（A） $f(x)g(b)>f(b)g(x)$　　　　（B） $f(x)g(a)>f(a)g(x)$

（C） $f(x)g(x)>f(b)g(b)$　　　　（D） $f(x)g(x)>f(a)g(a)$

（2）设 $S: x^2+y^2+z^2=a^2(z\ge 0), S_1$ 为 S 在第一卦限中的部分，则有　　　（　）

（A） $\iint\limits_S xdS=4\iint\limits_{S_1} xdS$　　　　（B） $\iint\limits_S ydS=4\iint\limits_{S_1} xdS$

（C） $\iint\limits_S zdS=4\iint\limits_{S_1} xdS$　　　　（D） $\iint\limits_S xyzdS=4\iint\limits_{S_1} xyzdS$

（3）设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，则必收敛的级数为　　　　（　）

（A） $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{u_n}{n}.$　　　　（B） $\sum\limits_{n=1}^{\infty}{u_n}^2.$

（C） $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_{2n-1}-u_{2n}).$　　　　（D） $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n-u_{n+1}).$

（4）设 n 维列向量组 $\alpha_1,\cdots,\alpha_m(m<n)$ 线性无关，则 n 维列向量组 $\beta_1,\cdots,\beta_m$ 线性无关的充

FREEKAOYAN

分必要条件为 （ ）

（A） 向量组$\alpha_1,\cdots,\alpha_m$可由向量组$\beta_1,\cdots,\beta_m$线性表示.

（B） 向量组$\beta_1,\cdots,\beta_m$可由向量组$\alpha_1,\cdots,\alpha_m$线性表示.

（C） 向量组$\alpha_1,\cdots,\alpha_m$与向量组$\beta_1,\cdots,\beta_m$等价.

（D） 矩阵$A=\left(\alpha_1,\cdots,\alpha_m\right)$与矩阵$B=\left(\beta_1,\cdots,\beta_m\right)$等价.

（5）设二维随机变量$\left(X\ ,Y\right)$服从二维正态分布，则随机变量$\xi=X+Y$与$\eta=X-Y$不相关的充分必要条件为 （ ）

(A) $E(X)=E(Y)$.

(B) $E(X^2)-\left[E(X)\right]^2=E(Y^2)-\left[E(Y)\right]^2$.

(C) $E(X^2)=E(Y^2)$.

(D) $E(X^2)+\left[E(X)\right]^2=E(Y^2)+\left[E(Y)\right]^2$.

三、(本题满分5分)

求$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\dfrac{\sin x}{|x|}\right)$.

四、(本题满分6分)

设$z=f\left(xy,\dfrac{x}{y}\right)+g\left(\dfrac{x}{y}\right)$,其中$f$具有二阶连续偏导数，$g$具有二阶连续导数，

求$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

五、(本题满分6分)

计算曲线积分$I=\oint_L\dfrac{xdy-ydx}{4x^2+y^2}$,其中$L$是以点$\left(1,0\right)$为中心，$R$为半径的圆周$\left(\mathrm{R}>1\right)$，取逆时针方向.

六、(本题满分7分)

设对于半空间$x>0$内任意的光滑有向封闭曲面S，都有

$$\oiint_S xf(x)dydz-xyf(x)dzdx-e^{2x}zdxdy=0,$$

其中函数$f(x)$在$(0,+\infty)$内具有连续的一阶导数，且$\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=1$,= 求$f(x)$.

七、(本题满分6分)

求幂级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{3^n+(-2)^n}\dfrac{x^n}{n}$的收敛区域，并讨论该区间端点处的收敛性.

免费考研论坛Http://BBS.FreeKaoYan.Com

八、(本题满分7分)

设有一半径为 R 的球体，P_0 是此球的表面上的一个定点，球体上任一点的密度与该点到 P_0 距离的平方成正比（比例常数 $k>0$），求球体的重心位置.

九、(本题满分6分)

设函数 $f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上连续，且 $\int_0^{\pi} f(x)dx=0, \int_0^{\pi} f(x)\cos x dx=0,$ 试证：在 $(0,\pi)$ 内至少存在两个不同的点 ξ_1,ξ_2, 使 $f(\xi_1)=f(\xi_2)=0.$

十、（本题满分6 分）

设矩阵 A 的伴随矩阵 $A^*=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\1&0&1&0\\0&-3&0&8\end{bmatrix}$, 且 $ABA^{-1}=BA^{-1}+3E,$ 其中 E 为4 阶单位矩阵，求矩阵 B.

十一、（本题满分8分）

某试验性生产线每年一月份进行熟练工与非熟练工的人数统计，然后将 $\frac{1}{6}$ 熟练工支援其他生产部门，其缺额由招收新的非熟练工补齐，新、老非熟练工经过培训及实践至年终考核有 $\frac{2}{5}$ 成为熟练工.设第 n 年一月份统计的熟练工和非熟练工所占百分比分别为 x_n, y_n 记成向量 $\begin{pmatrix}x_n\\y_n\end{pmatrix}$.

（1） 求 $\begin{pmatrix}x_{n+1}\\y_{n+1}\end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix}x_n\\y_n\end{pmatrix}$ 的关系式并写成矩阵形式：$\begin{pmatrix}x_{n+1}\\y_{n+1}\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}x_n\\y_n\end{pmatrix}$;

（2） 验证 $\eta_1=\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix},\eta_2=\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$ 是 A 的两个线性无关的特征向量，并求出相应的特征值；

（3） 当 $\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\end{bmatrix}$ 时，求 $\begin{pmatrix}x_{n+1}\\y_{n+1}\end{pmatrix}$.

十二、（本题满分8分）

某流水生产线上每个产品不合格的概率为 $p(0<p<1)$,各产品合格与否相互独立，当出现一个不合格产品时即停机检修.设开机后第一次停机时已生产了产品的个数为 X ，求 X 的数学期望 $E(X)$ 和方差 $D(X)$.

十三、（本题满分8分）

设某种元件的使用寿命 X 的概率密度为 $f(x;\theta)=\begin{cases}2e^{-2(x-\theta)}, & x\ge\theta\\ 0, & x<\theta\end{cases}$

其中 $\theta>0$ 为未知参数，又设 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是 X 的一组样本观测值，求参数 θ 的最大似然估计值.

FREEKAOYAN