# 2000 年全国硕士研究生入学统一考试数学三试题答案

**一、填空题（本题共 5 小题，每小题 3 分，满分 15 分，把答案填在题中横线上）**

（1）设 $z=f\left(xy,\dfrac{x}{y}\right)+g\left(\dfrac{x}{y}\right)$，其中 $f,g$ 均可微，则 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=$ ________ .

**【考点】**求复合函数的一阶偏导数.

**【解】**应填 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=yf_1'+\dfrac{1}{y}f_2'-\dfrac{y}{x^2}g'$ .由复合函数偏导数公式,有

$$\frac{\partial z}{\partial x}=f_1'\cdot y+f'\cdot_2\frac{1}{y}+g'\cdot(-\frac{y}{x^2}),\text{如上所填.}$$

（2）$\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{dx}{e^x+e^{2-x}}=$ ________.

**【考点】**计算广义积分.

**【解】**应填 $\dfrac{\pi}{4e}$.

$$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{e^x+e^{2-x}}=\int_1^{+\infty}\frac{e^x}{e^{2x}+e^2}dx=\int_1^{+\infty}\frac{1}{e^2+e^{2x}}de^x=\frac{1}{e}\arctan\frac{e^x}{e}\bigg|_1^{+\infty}$$

$$\frac{1}{e}(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4})=\frac{\pi}{4e}.$$

（3）若四阶矩阵 $A$ 与 $B$ 相似,矩阵 $A$ 的特征值为 $\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{4},\dfrac{1}{5}$，则行列式 $\left|B^{-1}-E\right|=$ ______.

**四、选择题（本题共 5 小题，每小题 3 分，共 15 分，在每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求，把所选项前的字母填在题后的括号内.）**

（1）设对任意的 $x$，总有 $\varphi(x)\le f(x)\le g(x)$，且 $\lim\limits_{x\to\infty}[g(x)-\varphi(x)]=0$，则 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$ （　　）

（A）存在且一定等于零.　　（B）存在但不一定等于零.

（C）一定不存在.　　（D）不一定存在.

**【考点】**极限的性质.

**【分析】**不要误认为本题的条件与夹逼定理的条件等价. 由 $\lim\limits_{x\to\infty}g(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\varphi(x)$,可推出 $\lim\limits_{x\to\infty}\left[g(x)-\varphi(x)\right]=0$,但反过去推不出来.

**【解】**应选 (D). 用排斥法. 设 $\dfrac{x^2}{x^2+2}\le f(x)\le\dfrac{x^2+1}{x^2+2}$，满足条件 $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\dfrac{x^2+1}{x^2+2}-\dfrac{x^2}{x^2+2}\right]=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x^2+2}=0$,并且

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1}{x^2+2}=1,\frac{x^2}{x^2+2}=1,$$

由夹逼定理知 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=1$,所以不选(A),也不选(C).

又如设 $\dfrac{x^6+x^2}{x^4+1}\le f(x)\le\dfrac{x^6+2x^2}{x^4+1}$,满足条件

$$\lim_{x\to\infty}\left[\frac{x^6+2x^2}{x^4+1}-\frac{x^6+x^2}{x^4+1}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x^4+1}=0\text{,但是由于}$$

$$f(x)\ge\frac{x^6+x^2}{x^4+1}=x^2,$$

有 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=+\infty$,不选(B),所以选(D).

【评注】因为最终结论是“(D)不一定存在”,所以只能举例说明“可以这样”“可以那样”.

（2）设函数 $f(x)$ 在点 $x=a$ 处可导，则函数 $|f(x)|$ 在点 $x=a$ 处不可导的充分条件是 （　）

（A） $f(a)=0$ 且 $f'(a)=0$　　（B） $f(a)=0$ 且 $f'(a)\ne 0$

（C） $f(a)>0$ 且 $f'(a)>0$　　（D） $f(a)<0$ 且 $f'(a)<0$

**【考点】**绝对值函数的可导性与不可导性.

**【解】**应选(B). **方法 1**:排斥法.

(A)的反例: $f(x)=x^2$,满足 $f(0)=0$ 且 $f'(0)=0$,但 $|f(x)|=x^2$ 在 $x=0$ 处可导;

(C) 的反例: $f(x)=x+1$,满足 $f(0)=1>0$, $f'(0)=1>0$,但 $|f(x)|=x+1$ 当 $x\in(-1,1)$,在 $x=0$ 处可导;

(D) 的反例: $f(x)=-x-1$,满足 $f(0)=-1<0$, $f'(0)=-1<0$ 但 $|f(x)|=x+1$ 当 $x\in(-1,1)$,在 $x=0$ 处可导;

故选(B).

**方法 2:**推理法.去证明当(B)成立时必不可导.由(B)的条件 $f(a)=0$,则

$$\lim_{x\to a}\frac{|f(x)|-|f(a)|}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{|f(x)|}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{|f(x)-f(a)|}{x-a},$$

$$\lim_{x\to a^+}\frac{|f(x)-f(a)|}{x-a}=\lim_{x\to a^+}\left|\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\right|=|f'(a)|, \tag{1}$$

$$\lim_{x\to a^-}\frac{|f(x)-f(a)|}{x-a}=\lim_{x\to a^-}\left(-\left|\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\right|\right)=-|f'(a)|. \tag{2}$$

可见，$|f(x)|$在$x=a$处可导的充要条件是（1）=（2），为$|f'(a)|=0,$即$f'(a)=0.$

所以当$f'(a)\neq 0$时必不可导.选(B).

（3）设$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$是四元非齐次线性方程组$AX=b$的三个解向量，且秩$(A)=3$，

$\alpha_1=(1,2,3,4)^T,\alpha_2+\alpha_3=(0,1,2,3)^T$，$c$表任意常数，则线性方程组$AX=b$的通解$X=$ （ ）

（A）$\begin{bmatrix}1\\2\\3\\4\end{bmatrix}+c\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix}$　　（B）$\begin{bmatrix}1\\2\\3\\4\end{bmatrix}+c\begin{bmatrix}0\\1\\2\\3\end{bmatrix}$

（C）$\begin{bmatrix}1\\2\\3\\4\end{bmatrix}+c\begin{bmatrix}2\\3\\4\\5\end{bmatrix}$　　（D）$\begin{bmatrix}1\\2\\3\\4\end{bmatrix}+c\begin{bmatrix}3\\4\\5\\6\end{bmatrix}$

（4）设$A$为$n$阶实矩阵，$A^T$是$A$的转置矩阵，则对于线性方程组$(I):AX=0$和$(II):A^TAX=0$，必有 （ ）

（A）$(II)$的解是$(I)$的解，$(I)$的解也是$(II)$的解.

（B）$(II)$的解是$(I)$的解，但$(I)$的解不是$(II)$的解.

（C）$(I)$的解不是$(II)$的解，$(II)$的解也不是$(I)$的解.

（D）$(I)$的解是$(II)$的解，但$(II)$的解不是$(I)$的解.



三、**（本题满分 6 分）**

求微分方程$y''-2y'-e^{2x}=0$满足条件$y(0)=0,y'(0)=1$.

**【考点】**求二阶常系数线性微分方程的解.

**【解】**对应的齐次微分方程为$y''-2y'=0$,其特征方程为$r^2-2r=0$,特征根为$r_1=0,r_2=2$.齐次方程的通解为

$$Y=C_1+C_2e^{2x}.$$

非齐次方程的自由项$e^{2x}$指数上的 2 为特征根的单重根,故命特解

$$y^*=Axe^{2x},$$

求得 $y^{*\prime}=Ae^{2x}+2Axe^{2x}, y^{*\prime\prime}=4Ae^{2x}+4Axe^{2x}$,代入原方程,约去 $e^{2x}$,再比较等式左、右两边 $x$ 的同次幂系数,得 $2A=1, A=\frac{1}{2}$,故得特解 $y^*=\frac{1}{2}xe^{2x}$, 通解为

$$y=Y+y^*=C_1+C_2e^{2x}+\frac{1}{2}xe^{2x}.$$

再由初始条件 $y(0)=1, y'(0)=1$, 得

$$C_1+C_2=1, 2C_2+\frac{1}{2}=1,$$

得 $C_1=\frac{3}{4}, C_2=\frac{1}{4}$, 满足初始条件的特解为

$$y=\frac{3}{4}+(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}x)e^{2x}.$$

**四、(本题满分 6 分)**

计算二重积分 $\iint\limits_D \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{4a^2-x^2-y^2}}d\sigma,$ , 其中 $D$ 是由曲线 $y=-a+\sqrt{a^2-x^2}\,(a>0)$ 和直线 $y=-x$ 围成的区域

**【考点】**二重积分的计算.

**【解】**画出积分区域 D 如图. 由被积函数的形式以及积分区域形状, 易见采用极坐标方便.

曲线 $y=-a+\sqrt{a^2-x^2}$ 化为 $x^2+(y+a)^2=a^2(y\ge -a)$, 极坐标方程为 $r=-2a\sin\theta(-\pi\le\theta\le 0)$. 于是

$$I=\iint\limits_D \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{4a^2-x^2-y^2}}d\sigma=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{0}d\theta\int_0^{-2a\sin\theta}\frac{r^2}{\sqrt{4a^2-r^2}}dr.$$

命 $r=2a\sin t$, 有 $r=0$ 时 $t=0; r=-2a\sin\theta$ 时, $t=-\theta$,

$$I=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{0}d\theta\int_0^{-\theta}4a^2\sin^2 tdt=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{0}d\theta\int_0^{-\theta}2a^2(1-\cos 2t)dt$$

$$=2a^2\int_{-\frac{\pi}{4}}^{0}(-\theta+\frac{1}{2}\sin 2\theta)d\theta=a^2(\frac{\pi^2}{16}-\frac{1}{2}).$$

**五、(本题满分 6 分)**

假设某企业在两个相互分割的市场上出售同一种产品，两个市场的需求函数分别是

$$P_1=18-Q_1, P_2=12-Q_2,$$

其中 $P_1$ 和 $P_2$ 分别表示该产品在两个市场的价格（单位：万元/吨），$Q_1$ 和 $Q_2$ 分别表示该

产品在两个市场的销售量（即需求量，单位：吨），并且该企业生产这种产品的总成本函数是$C=2Q+5$，其中$Q$表示该产品在两个市场的销售总量，即$Q=Q_1+Q_2$

（1）如果该企业实行价格差别策略，试确定两个市场上该产品的销售量和价格，使该企业获得最大利润；

（2）如果该企业实行价格无差别策略，试确定两个市场上该产品的销售量及其统一的价格，使该企业的总利润最大化；并比较两种价格策略下的总利润大小.

**【考点】**以经济为背景的无条件最值与有条件最值问题.

**【解】**建模:由题意,总利润函数

$$L=R-C=p_1Q_1+p_2Q_2-(2Q+5)$$

$$=p_1Q_1+p_2Q_2-[2(Q_1+Q_2)+5]$$

$$=-2Q_1^{\ 2}-Q_2^{\ 2}+16Q_1+10Q_2-5,\qquad Q_1>0,Q_2>0.$$

其中R为收益,$Q=Q_1+Q_2$为销售总量.

(1) $\dfrac{\partial L}{\partial Q_1}=-4Q_1+16\overset{命}{=}0,\dfrac{\partial L}{\partial Q_2}=-2Q_2+10\overset{命}{=}0,$

解得$Q_1=4$，$Q_2=5$.相应地$p_1=10,p_2=7.$

在$Q_1>0,Q_2>0$的范围内驻点唯一,且实际问题在$Q_1>0,Q_2>0$范围内必有最大值,

故在$Q_1=4$，$Q_2=5$处L为最大值.

$$\max L=-2\times4^2-5^2+16\times4+10\times5-5=52(万元).$$

(2)若两地的销售单价无差别,即$p_1=p_2$,于是

$$18-2Q_1=12-Q_2,$$

得$2Q_1-Q_2=6$,在此约束条件下求L的最值.以下用两个方法.

**方法1:**用拉格朗日乘数法,命

$$F(Q_1,Q_2,\lambda)=-2Q_1^{\ 2}-Q_2^{\ 2}+16Q_1+10Q_2-5+\lambda(2Q_1-Q_2-6),$$

$$\frac{\partial F}{\partial Q_1}=-4Q_1+16+2\lambda\overset{命}{=}0,$$

$$\frac{\partial F}{\partial Q_2}=-2Q_2+10-\lambda\overset{命}{=}0,$$

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda}=2Q_1-Q_2-6\overset{命}{=}0.$$

解得 $Q_1=5$，$Q_2=4$,以下讨论与(1)同,得

$$\max L=-2\times5^2-4^2+16\times5+10\times4-5=49(万元).$$

**方法 2:由 $2Q_1-Q_2=6$** 代入 L 消去一个变量得

$$L=-6{Q_1}^2+60Q_1-101,$$

$$\frac{dL}{dQ_1}=-12Q_1+60\overset{等}{=}0,$$

得 $Q_1=5$,为 L 的唯一驻点.当 $0<Q_1<5$时$\dfrac{dL}{dQ_1}>0$,当$Q_1>5$时$\dfrac{dL}{dQ_1}<0$,故 $Q_1=5$ 为 L 的唯一极大值点,所以是最大值点,此时 $Q_2=4$,

$$\max L=-6\times5^2+60\times5-101=49(万元).$$

**六、（本题满分 7 分）**

求函数 $y=(x-1)e^{\frac{\pi}{2}+\arctan x}$ 的单调区间和极值，并求该函数图形的渐近线.

**【考点】**求单调区间、极值与该函数图形的渐近线

**【解】** $y'=\dfrac{x^2+x}{x^2+1}e^{\frac{\pi}{2}+\arctan x}$,命 $y'=0$, 得驻点 $x_1=0, x_2=-1$.

列表

| $x$ | $(-\infty,1)$ | $-1$ | $(-1,0)$ | $0$ | $(0,+\infty)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | + | 0 | − | 0 | + |
| $y$ | □ | $-2e^{\frac{\pi}{4}}$ | □ | $-e^{\frac{\pi}{2}}$ | □ |

严格单调增的区间为$(-\infty,-1)$与$(0,+\infty)$；严格单调减的区间为$(-1,0)$. $f(0)=-e^{\frac{\pi}{2}}$ 为极小值，$f(-1)=-2e^{\frac{\pi}{4}}$ 为极大值.以下求渐近线.

$$a_1=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=e^{\pi},b_1=\lim_{x\to+\infty}[f(x)-a_1x]=-2e^{\pi},$$

$$a_2=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=1,b_2=\lim_{x\to-\infty}[f(x)-a_2x]=-2,$$

渐近线为 $y=a_1x+b_1=e^{\pi}(x-2)$及$y=a_2x+b_2=x-2$,共两条.

**七、(本题满分 6 分)**

设 $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^n x\cos xdx, n=0,1,2,\cdots$, 求 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}I_n$.

**【考点】**利用幂级数求数项级数的和, 计算定积分.

**【解】** $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^n x\cos xdx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^n xd\sin x=\frac{1}{n+1}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n+1}$,

$$\sum_{n=0}^{\infty}I_n=\sum_{n=0}^{\infty}I_n\frac{1}{n+1}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n+1}.$$

考虑幂级数

$$S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+1}x^{n+1},$$

按通常求收敛半径的办法,其收敛半径 $R=1$, 在$(-1,1)$内,

$$S'(x)=\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+1}x^{n+1}\right)'=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{n+1}x^{n+1}\right)'=\sum_{n=0}^{\infty}x^n=\frac{1}{1-x},$$

$$S(x)=S(0)+\int_0^x S'(x)dx=0+\int_0^x\frac{1}{1-x}dx=-\ln|1-x|,$$

以 $x=\frac{\sqrt{2}}{2}\in(-1,1)$ 代入,得

$$S(\frac{\sqrt{2}}{2})=-\ln(1-\frac{\sqrt{2}}{2})=\ln(2+\sqrt{2}).$$

$$即\sum_{n=0}^{\infty}I_n=\ln(2+\sqrt{2}).$$

**八、(本题满分 6 分)**

设函数 $f(x)$ 在$[0,\pi]$上连续, 且 $\int_0^{\pi}f(x)dx=0, \int_0^{\pi}f(x)\cos xdx=0$, 试证明: 在$(0,\pi)$内至少存在两个不同的点$\xi_1,\xi_2$, 使 $f(\xi_1)=f(\xi_2)=0$.

**【考点】**积分中值定理, 罗尔定理, 变上限函数, 分部积分, 或反证法. 本题是一道涉及积分多方面的题, 有相当的难度.

**【解】** 令 $F(x)=\int_0^{\pi}f(t)dt$, 则有 $F(0)=F(\pi)=0$, 又因为

$$0=\int_0^{\pi}f(x)\cos xdx=\int_0^{\pi}\cos xdF(x)$$

$$= F(x)\cos x\Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi} F(x)\sin x dx$$

$$= \int_0^{\pi} F(x)\sin x dx$$

令 $G(x) = \int_0^{\pi} F(x)\sin t dt$, 则 $G(0) = G(\pi) = 0,$

于是存在$\xi \in (0,\pi)$, 使$F(\xi)\sin\xi = 0$, 因为当$\xi \in (0,\pi)$, 这样就证明了.

$$F(0) = F(\xi) = F(\pi) = 0$$

再对$F(x)$在区间$\left[0,\xi\right],\left[\xi,\pi\right]$上分别用罗尔定理知，至少存在$\xi_1 \in \left(0,\xi\right), \xi_2 \in \left(\xi,\pi\right)$

使

$$F'(\xi_1) = F'(\xi_2) = 0$$

即 $f(\xi_1) = f(\xi_2) = 0$

**九、（本题满分 8 分）**

设向量组，$\alpha_1 = (a,2,10)^T, \alpha_2 = (-2,1,5)^T, \alpha_3 = (-1,1,4)^T, \beta = (1,b,c)^T$ 试问 $a,b,c$ 满足什么条件时，

（1）$\beta$可由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表出，且表示唯一？

（2）$\beta$不能由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表出？

（3）$\beta$可由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表出，但表示不唯一？并求出一般表达式.

**十、（本题满分 9 分）**

设有$n$元实二次型

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n) = (x_1 + a_1x_2)^2 + (x_2 + a_2x_3)^2 + \cdots + (x_{n-1} + a_{n-1}x_n)^2 + (x_n + a_nx_1)^2$$

其中 $a_i$ ( $i = 1, 2, \cdots, n$) 为实数. 试问：当 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 满足条件时，二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 为正定二次型.