2000 年全国硕士研究生入学统一考试数学四试题

FREEKAOYAN

一、填空题（本题共 5 小题，每小题 3 分，满分 15 分，把答案填在题中横线上）

（1）$\int \frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx =$ __________ .

（2）若 $a>0,b>0$ 均为常数，则 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)^{\frac{3}{x}} =$ __________ .

（3）设 $\alpha=(1,0,-1)^T$，矩阵 $A=\alpha\alpha^T$，n 为正整数，则 $\left|aE-A^n\right| =$ __________ .

（4）已知四阶矩阵 A 相似于 B，A 的特征值为 $2,3,4,5$. E 为四阶单位矩阵，则

$\left|B-E\right| =$ __________ .

（5）假设随机变量 X 在区间 $[-1,2]$ 上服从均匀分布，随机变量

$$Y=\begin{cases}1, & 若X>0\\ 0, & 若X=0\\ -1, & 若X<0\end{cases}$$

则方差 $D(Y) =$ __________.

二、选择题（本题共 5 小题，每小题 3 分，共 15 分，在每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求，把所选项前的字母填在题后的括号内.）

（1）设对任意的 x，总有 $\varphi(x)\le f(x)\le g(x)$，且 $\lim\limits_{x\to\infty}[g(x)-\varphi(x)]=0$，则 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ （ ）

（A）存在且一定等于零. （B）存在但不一定等于零.
（C）一定不存在. （D）不一定存在.

（2）设函数 $f(x)$ 在点 $x=a$ 处可导，则函数 $\left|f(x)\right|$ 在点 $x=a$ 处不可导的充分条件是 （ ）

（A）$f(a)=0且f'(a)=0$ （B）$f(a)=0且f'(a)\ne 0$

（C）$f(a)>0且f'(a)>0$ （D）$f(a)<0且f'(a)<0$

（3）设 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是四元非齐次线性方程组 $AX=b$ 的三个解向量，且秩（A）$=3$，

$\alpha_1=(1,2,3,4)^T,\alpha_2+\alpha_3=(0,1,2,3)^T$，$c$ 表任意常数，则线性方程组 $AX=b$ 的通解 $X=$ （ ）

（A）$\begin{bmatrix}1\\2\\3\\4\end{bmatrix}+c\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix}$ （B）$\begin{bmatrix}1\\2\\3\\4\end{bmatrix}+c\begin{bmatrix}0\\1\\2\\3\end{bmatrix}$

（C）$\begin{bmatrix}1\\2\\3\\4\end{bmatrix}+c\begin{bmatrix}2\\3\\4\\5\end{bmatrix}$ （D）$\begin{bmatrix}1\\2\\3\\4\end{bmatrix}+c\begin{bmatrix}3\\4\\5\\6\end{bmatrix}$

（4）设 A,B,C 三个事件两两独立，则 A,B,C 相互独立的充分必要条件是 （ ）

（A）A 与 BC 独立 （B）AB 与 $A\cup C$ 独立

（C）AB 与 AC 独立 （D）$A\cup B$ 与 $A\cup C$ 独立

（5）在电炉上安装了 4 个温控器，其显示温度的误差是随机的.在使用过程中，只要有两个温控器显示的温度不低于临界温度 t_0，电炉就断电，以 E 表示事件“电炉断电”，而 $T_{(1)}\le T_{(2)}\le T_{(3)}\le T_{(4)}$ 为 4 个温控器显示的按递增顺序排列的温度值，则事件 E 等于事件 （ ）

（A）$\left\{T_{(1)}\ge t_0\right\}$ （B）$\left\{T_{(2)}\ge t_0\right\}$

（C）$\left\{T_{(3)}\ge t_0\right\}$ （D）$\left\{T_{(4)}\ge t_0\right\}$

三、（本题满分 6 分）

已知 $z=u^v,u=\ln\sqrt{x^2+y^2},v=\arctan\dfrac{y}{x}$，求 dz

四、（本题满分 6 分）

计算 $I=\int_1^{+\infty}\dfrac{dx}{e^{1+x}+e^{3-x}}.$

五、（本题满分 6 分）

假设某企业在两个相互分割的市场上出售同一种产品，两个市场的需求函数分别是

$$P_1=18-Q_1,P_2=12-Q_2,$$

其中 P_1 和 P_2 分别表示该产品在两个市场的价格（单位：万元/吨），Q_1 和 Q_2 分别表示该产品在两个市场的销售量（即需求量，单位：吨），并且该企业生产这种产品的总成本函数是 $C=2Q+5$ 其中 Q 表示该产品在两个市场的销售总量，即 $Q=Q_1+Q_2$

（1）如果该企业实行价格差别策略，试确定两个市场上该产品的销售量和价格，使该企业获得最大利润；

（2）如果该企业实行价格无差别策略，试确定两个市场上该产品的销售量及其统一的价格，使该企业的总利润最大化；并比较两种价格策略下的总利润大小.

FREEKAOYAN

【免费考研网制作PDF版本FreeKaoyan.Com】

六、（本题满分 7 分）

求函数 $y=(x-1)e^{\frac{\pi}{2}+\arctan x}$ 的单调区间和极值，并求该函数图形的渐近线.

七、（本题满分 6 分）

设 $f(x,y)=\begin{cases} x^2y, & 1\le x\le 2, 0\le y\le x \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$

求 $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$，其中 $D=\left\{(x,y)\middle| x^2+y^2\ge 2x\right\}$

八、（本题满分 6 分）

设函数 $f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上连续，且 $\int_0^{\pi} f(x)dx=0, \int_0^{\pi} f(x)\cos xdx=0$，试证明：在 $(0,\pi)$ 内至少存在两个不同的点 ξ_1,ξ_2，使 $f(\xi_1)=f(\xi_2)=0.$

九、（本题满分 8 分）

设向量组，$\alpha_1=(a,2,10)^T, \alpha_2=(-2,1,5)^T, \alpha_3=(-1,1,4)^T, \beta=(1,b,c)^T$ 试问 a,b,c 满足什么条件时，

（1）β 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表出，且表示唯一？

（2）β 不能由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表出？

（3）β 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表出，但表示不唯一？并求出一般表达式.

十、（本题满分 9 分）

设矩阵 $A=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ x & 4 & y \\ -3 & -3 & 5 \end{bmatrix}$，已知 A 有三个线性无关的特征向量，$\lambda=2$ 是 A 的二重特征值，试求可逆矩阵 P，使得 $P^{-1}AP$ 为对角矩阵.

十一、（本题满分 8 分）

设二维随机变量 (X,Y) 的密度函数为

$$f(x,y)=\frac{1}{2}\left[\varphi_1(x,y)+\varphi_2(x,y)\right],$$

其中 $\varphi_1(x,y)$ 和 $\varphi_2(x,y)$ 都是二维正态密度函数，且它们对应的二维随机变量的相关系数分别是 $\frac{1}{3}$ 和 $-\frac{1}{3}$，它们的边缘密度函数所对应的随机变量的数学期望都是零，方差都是 1.

（1）求随机变量 X 和 Y 的密度函数 $f_1(x)$ 和 $f_2(y)$，及 X 和 Y 的相关系数 ρ（可以直接利

FREEKAOYAN

用二维正态密度的性质）

（2）问 X 和 Y 是否独立？为什么？

十二、（本题满分 8 分）

设 A,B 是二随机事件；随机变量

$$X=\begin{cases}1, & \text{若}A\text{出现}\\ -1, & \text{若}A\text{不出现}\end{cases} \qquad Y=\begin{cases}1, & \text{若}B\text{出现}\\ -1, & \text{若}B\text{不出现}\end{cases}$$

试证明随机变量 X 和 Y 不相关的充分必要条件是 A 与 B 相互独立.

FREEKAOYAN