

费率厘定

一、引言

1. 费率厘定的目标

①支付期望赔款和费用②费率可以充分应对不确定性③鼓励损失控制④满足保险监管者的要求⑤费率要合理稳定⑥费率要合理应变⑦简单易懂

2. 费率厘定中的数据

①数据制表方法：

发生年度法：在一个日历年度内所有发生的损失事件的理赔数据

保单年度法：在一个日历年度内所有签发的保单的理赔数据

日历年度法：在一个日历年度内所有发生理赔的保单数据

②承保保费：日历年内签发保单时收取的全部保费

已赚保费：日历年内实际赚取的保费。承保保费与已赚保费的差就是未赚保费。

3. 费率厘定的基本单位称为风险单位。每风险单位的保费称为为费率。

承保风险单位：所签的保单在某个时期内所有的风险单位数量。

已经风险单位：各个相应时期内已经承担责任的风险单位数量。

有效风险单位：在一个给定时刻的风险单位数量。

二、保费的构成

商业毛保费由纯保费和附加保费组成，其中附加保费又包括安全附加和费用附加两部分。

1. 纯保费

$P = \frac{L}{E}$, L为由损失经验得到的预测最终损失，E为保单组合的已经风险单位数。

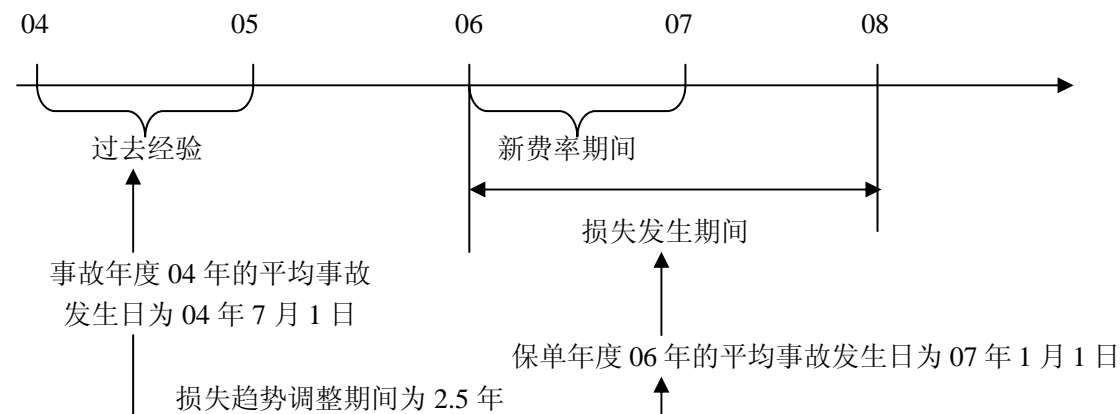
$P = \frac{C}{E} \times \frac{L}{C} = F \times S$, F为理赔频率，S为理赔强度，C为保单组合的总理赔次数。

将理赔频率和理赔强度分开考虑：一是影响理赔频率和理赔强度的因素可能不同。二是有利于分析免赔额或再保险赔偿限额的变化对总理赔额的影响。

2. 最终赔款的预测分两步：

一是损失进展的预测，利用流量三角形；二是损失趋势的预测。（假设费率在2006年1月1日开始生效，且在12个月后重新修订费率。再假设保单为一年期，保单的签发在一年内均匀分布，那么保单的平均起保日期为2006年7月1日。按照该费率签发的保单的有效时间是2006年1月1日到2007年12月31日，在24个月中的任何时候损失都有可能发生，因此损失发生的平均时间为2007年1月1日。这个日期是进行最终赔款损失预测的基础。）

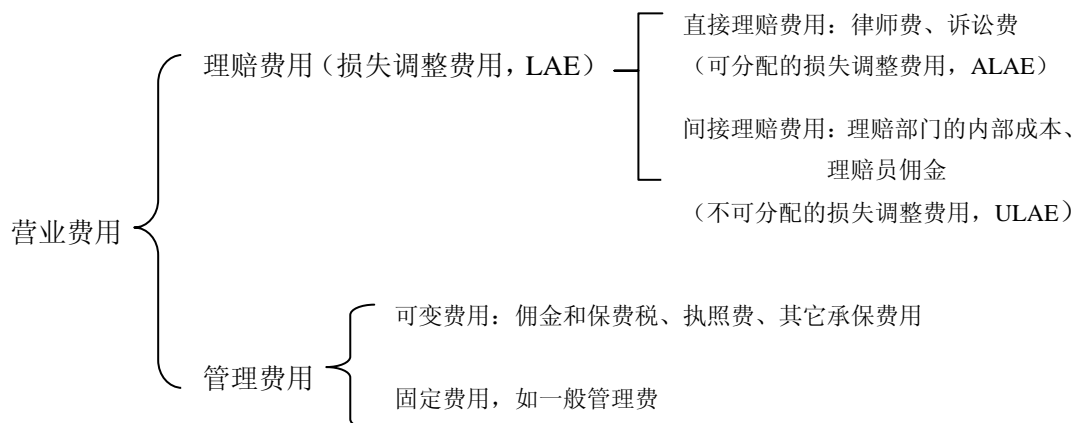
①以事故年度2004年的过去经验来厘定与2006年1月1日生效的一年期保单



②过去的经验是采取保单年度，04 年保单年度发生损失的平均中点是 05 年 1 月 1 日；若未来

经验期不变，则趋势调整期间为 2 年。

3. 营业费用的分类



4. 在费率厘定时，首先要考虑的是固定费用的计算是基于保单还是基于风险单位。根据固定费用的两种计算方法，费率厘定分为：费用法（基于风险单位）和劳工补偿法（基于保单）

5. 风险保费应具有的性质

无欺性， $H(X, z) \leq \max \{X\}$

超均值性， $H(X, z) \geq E(X)$

可加性， $H(X_1 + X_2, z) = H(X_1, z) + H(X_2, z)$

平移不变性， $H(X + C, z) = H(X, z) + C$

齐次性， $H(cX, z) = cH(X, z)$

6. 保费计算原理

期望值原理： $H(X, z) = (1+r)E(X)E(N)$ 。不满足平移不变性。

方差原理： $H(X, z) = E(X) + \beta \text{Var}(X)$ 。不满足齐次性。

标准差原理： $H(X, z) = E(X) + \beta \sqrt{\text{Var}(X)}$ 。不满足可加性。

7.级别费率厘定

①损失率法计算区域相对数

区域	第一年		第二年		当前水平		第 1、2 年在当前费率水平下的已赚保费⑦	第 1、2 年的索赔经验			经验损失率⑩	初步调整⑫	信度因子⑬
	已赚保费①	基础费率②	已赚保费③	基础费率④	已赚保费⑤	基础费率⑥		已发生赔款⑧	理赔数⑨	理赔强度⑪			
A B C							$(3) \times \frac{(6)}{(4)} + (1) \times \frac{(6)}{(2)}$			$\frac{(8)}{(9)}$	$\frac{(8)}{(7)}$	$\frac{(11)}{(11 \text{ 合计})}$	$\min \left(\sqrt{\frac{(9)}{1082}}, 1 \right)$
合计													

区域	信度调整⑭	保费收入⑮	平衡调整⑯	保费收入⑰	当前相对数⑱	新相对数㉑
A B C	$(13) \times [(12) - 1] + 1$	$(5) \times (14)$	$\frac{(14)}{(14 \text{ 合计})}$	$(5) \times (16)$	$\frac{(6)}{(6A)}$	$(18) \times \frac{(16)}{(16A)}$
合计	$\frac{(15 \text{ 合计})}{(5 \text{ 合计})}$			$(17 \text{ 合计}) = (5 \text{ 合计})$		

②纯保费法计算区域相对数

区域	第 1&2 年							基于当前水平的风险单位⑧	初步调整⑨	信度因子⑩
	已经风险单位①	基础风险单位②	已发生赔款③	理赔数④	频率⑤	理赔强度⑥	纯保费⑦			
					$\frac{(4)}{(2)}$	$\frac{(3)}{(4)}$	$\frac{(3)}{(2)}$		$\frac{(7)}{(7\text{合计})}$	$\min\left(\sqrt{\frac{(4)}{1082}},1\right)$
合计										

区域	信度调整⑪	调整后风险单位⑫	平衡调整⑬	调整后风险单位⑭	当前相对数⑮	新相对数⑯
	$(10)\times[(9)-1]+1$	$(8)\times(11)$	$\frac{(11)}{(11\text{合计})}$	$(8)\times(13)$		$(15)\times\frac{(13)}{(13A)}$
合计	$\frac{(12\text{合计})}{(8\text{合计})}$					

③冲销因子的计算

	当前 费率 ①	相对 数②	已经 风险 单位 ③	当前 费 率 水 平 下 的 均 衡 已 赚 保费④	经 验 损 失 与 可 分 配 损 失 ⑤	基于 当前 费率 的经 验损 失率 ⑥	新相对数⑦	新相对数下的均衡已赚保费⑧
A B C	基 础 费 率 =1A	$\frac{(1)}{(1A)}$	$\frac{(4)}{(1)}$	$(3) \times (1)$		$\frac{(5)}{(4)}$	$(2) \times \frac{(6)}{(6A)}$	$(1A) \cdot (7) \cdot (3) \cdot (1 + \text{基础费率变动率})$ $(1A) \cdot \frac{(4)}{(1)} \cdot (7) \cdot (1 + \text{基础费率变动率})$
合 计				(4 合计)				(8 合计)

$$\text{冲销因子} = \frac{\frac{(8\text{合计})}{(4\text{合计})}}{(1 + \text{基础费率变动率})}$$
$$\text{新的基础费率变动率} = \frac{(1 + \text{基础费率变动率})}{\text{冲销因子}} - 1$$

经验费率的厘定

1.完全可信性

每件赔案的损失金额为 X_i ，在一定时期内的赔款次数为 N_i 。则对总损失 S 而言：

$$E(S) = E(N) \cdot E(X), \text{Var}(S) = [E(X)]^2 \cdot \text{Var}(N) + E(N) \cdot \text{Var}(X)$$

$$P\left(\left|\frac{E(S)-S}{E(S)}\right| < k\right) > 1-p \Rightarrow P\{(1-k) \cdot E(S) < S < (1+k) \cdot E(S)\} > 1-p$$

$$\text{由中心极限定理得：} P\left(\left|\frac{S-E(S)}{\sqrt{\text{Var}(S)}}\right| < \frac{k \cdot E(S)}{\sqrt{\text{Var}(S)}}\right) > 1-p$$

$$\Rightarrow \frac{k}{\frac{u_{1-p}}{2}} \cdot \frac{E(S)}{\sqrt{\text{Var}(S)}} = 1 \Rightarrow \frac{k}{\frac{u_{1-p}}{2}} \cdot \frac{E(N) \cdot E(X)}{\sqrt{[E(X)]^2 \cdot \text{Var}(N) + E(N) \cdot \text{Var}(X)}} = 1$$

$$\Rightarrow E(N) = \left(\frac{\frac{u_{1-p}}{2}}{k}\right)^2 \cdot \left(\frac{\text{Var}(N)}{E(N)} + \frac{\text{Var}(X)}{[E(X)]^2}\right)$$

$$\text{若 } S \text{ 服从复合泊松分布，则：} E(N) = n_F = \left(\frac{\frac{u_{1-p}}{2}}{k}\right)^2 \cdot \frac{E(X^2)}{[E(X)]^2}, n_F \text{ 为完全可信所需要的样本数。}$$

2.部分信度

$$P\left(\frac{a \cdot |E(S)-S|}{E(S)} < k\right) > 1-p, \text{由中心极限定理得}$$

$$\frac{k \cdot E(S)}{a \cdot \sqrt{\text{Var}(S)}} = \frac{u_{1-p}}{2} \Rightarrow a = \frac{k}{\frac{u_{1-p}}{2}} \cdot \frac{E(S)}{\sqrt{\text{Var}(S)}} = \frac{k}{\frac{u_{1-p}}{2}} \cdot \frac{E(N) \cdot E(X)}{\sqrt{[E(X)]^2 \cdot \text{Var}(N) + E(N) \cdot \text{Var}(X)}}$$

$$\text{若 } S \text{ 服从复合泊松分布，则：} a = \frac{k}{\frac{u_{1-p}}{2}} \cdot \frac{E(N) \cdot E(X)}{\sqrt{E(N) \cdot E(X^2)}} = \frac{\sqrt{E(N)}}{\sqrt{\left(\frac{u_{1-p}}{k}\right)^2 \cdot \frac{E(X^2)}{E^2(X)}}} = \sqrt{\frac{E(N)}{n_F}}$$

$$\text{信度因子 } a = \min\left(\sqrt{\frac{n}{n_F}}, 1\right), n \text{ 为样本容量。}$$

3.最小平方信度

①Buhlmann 模型

设随机变量 X 表示某险种的实际损失， $(X_{i1}, X_{i2}, \dots, X_{in})$ 为特殊风险 i 在 n 年内观察到的特殊风

险经验值 ($i=1, 2, \dots, N$)。需要预测 $X_{i,n+1}$ ，假定 X_{ij} 的分布依赖于 θ_i ， θ_i 未知。

$$\text{信度因子 } a = \frac{n}{n + \frac{E[\text{Var}(X_{ij}|\theta_i)]}{\text{Var}[E(X_{ij}|\theta_i)]}} = \frac{n}{n + \frac{S^2}{t^2}}$$

若 $X_{ij}|\theta_i$ 得分布是泊松分布时， $S^2 = E[\text{Var}(X_{ij}|\theta_i)] = \bar{X}$ （总体的均值）； $\text{Var}(X_{ij}) = S^2 + t^2$

$$\text{预测值 } X_{i,n+1} = (1-a)E[E(X_{ij}|\theta_i)] + a\bar{X}_i.$$

$$\text{无偏估计: } E[E(X_{ij}|\theta_i)] = \bar{X} = \sum_{i=1}^N \frac{\bar{X}_{i\cdot}}{N} = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^n \frac{X_{ij}}{N \cdot n}$$

$$S^2 = E[\text{Var}(X_{ij}|\theta_i)] = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^n \frac{(X_{ij} - \bar{X}_{i\cdot})^2}{N \cdot (n-1)}$$

$$t^2 = \text{Var}[E(X_{ij}|\theta_i)] = \sum_{i=1}^N \frac{(\bar{X}_{i\cdot} - \bar{X})^2}{N-1} - \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^n \frac{(X_{ij} - \bar{X}_{i\cdot})^2}{N \cdot n \cdot (n-1)}$$

$$a = 1 - \frac{\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^n \frac{(X_{ij} - \bar{X}_{i\cdot})^2}{N \cdot (n-1)}}{n \cdot \sum_{i=1}^N \frac{(\bar{X}_{i\cdot} - \bar{X})^2}{N-1}}$$

② Buhlmann-Straub 模型

假设 $(Y_{i1}, Y_{i2}, \dots, Y_{in})$ 为特殊风险 i 在 n 年内观察到的特殊风险经验值 ($i=1, 2, \dots, N$)，

$(P_{i1}, P_{i2}, \dots, P_{in})$ 为特殊风险 i 在 n 年内的业务量大小 ($i=1, 2, \dots, N$)。业务量可以是保费收

入，也可以是危险单位数等数据。则 $X_{ij} = \frac{Y_{ij}}{P_{ij}}$ 是去掉业务量影响之后的数据。需要预测 $X_{i,n+1}$ ，

假定 X_{ij} 的分布依赖于 θ_i ， θ_i 未知。

$$\text{信度因子 } a = \frac{\sum_{i=1}^n P_{ij}}{\sum_{i=1}^n P_{ij} + \frac{E[\text{Var}(X_{ij}|\theta_i)]}{\text{Var}[E(X_{ij}|\theta_i)]}}$$

$$\text{预测值 } X_{i,n+1} = (1-a)E[E(X_{ij}|\theta_i)] + a\bar{X}_i.$$

$$\text{无偏估计: } E[E(X_{ij}|\theta_i)] = \bar{X} = \sum_{i=1}^N \frac{\bar{X}_{i\cdot}}{N} = \sum_{i=1}^N \left(\frac{\sum_{j=1}^{n_i} P_{ij} X_{ij}}{\sum_{j=1}^{n_i} P_{ij}} \right) / N$$

$$E[\text{Var}(X_{ij}|\theta_i)] = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{n_i} \frac{P_{ij} (X_{ij} - \bar{X}_{i\cdot})^2}{\sum_{i=1}^N (n_i - 1)} = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^n \frac{P_{ij} \cdot (X_{ij} - \bar{X}_{i\cdot})^2}{N \cdot (n - 1)}$$

$$\text{Var}[E(X_{ij}|\theta_i)] = \frac{\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^n P_{ij} (\bar{X}_{i\cdot} - \bar{X})^2 - (Nn - 1) \cdot E[\text{Var}(X_{ij}|\theta_i)]}{\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^n P_{ij} - \frac{\sum_{i=1}^N \left(\sum_{j=1}^n P_{ij} \right)^2}{\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^n P_{ij}}}$$

4.NCD 系统的优点:

- ①使被保险人缴纳的保险费反映其真实的风险水平，有助于减少各费率组别中风险的非同质性。
- ②避免小额赔款的发生，降低保险公司的理赔费用，从而可进一步降低保险费率，提高公司竞争力。
- ③鼓励被保险人开车更加小心。

5. NCD 系统的构成要素

保费等级、起始组别、转移规则

再保险

一.再保险的理由:

①分散风险②提高承保能力③保持财务稳定性④财务管理⑤得到再保险人的技术支持

二.再保险的分类

1 分保安排方式: 临时再保险、合约再保险、预约再保险 (对分出公司是临时再保险, 对接受公司是合约再保险)

2 按责任限制分类

①比例再保险: 成数再保险、溢额再保险、成数溢额再保险

②非比例再保险:

A.超额赔款再保险: 指分出公司因同一原因所发生的任何一次赔款或由同一原因所导致的各次损失赔款的总和, 在超过约定的自负赔偿额时, 再保险人就超过部分负责至一定额度的再保险形式。

险位超赔再保险: 以保障一般的损失为目的, 以一个风险单位为基础来计算赔款

巨灾超赔再保险: 以保障异常的大灾害为对象, 以一次巨灾事故中众多风险单位的责任积累为基础来计算赔款。

B.停止损失再保险 (赔付率超赔再保险)

以原保险人一年内的总损失额为理赔基础, 按赔款与保费的比例 (赔付率) 来确定自负责任和再保险责任。当赔付率超过一定标准时, 再保险人就超过部分负责至某一赔付率或金额。

三.再保险定价

1.再保险损失的特点:

①理赔事件多为低频率、高索赔额事件。②再保险事件的发生、报告、理赔延迟时间过长。

③容易受通货膨胀的影响。

2.再保险定价公式

RP: 再保险费 RL: 再保险人赔付成本

RELC=E(RL): 再保险人赔付成本的期望,其现值 PVRELC=RDF(贴现因子)×RELC

RTE(再保险的利润和安全附加)=RTER(再保险人的目标收益率)×RPP

纯再保费 RPP=PVRELC+RTE=PVRELC/(1-RTER)

经纪人佣金 RB=RBF(再保险的经纪人佣金率)×RP

分保佣金 RC=RCR(再保险人的分保佣金率)×RP

内部费用=分保现金收入×内部费用率

=RP(1-RCR-RBF)×RIXL

再保险费 RP=RC+RB+(RP-RC-RB)×RIXL+RPP

=RCR×RP+RBF×RP+RP×(1-RCR-RBF)×RIXL+PVRELC/(1-RTER)

$$RP = \frac{PVRELC}{(1-RCR-RBF) \times (1-RIXL) \times (1-RTER)}$$

非寿险责任准备金评估

一.未到期责任准备金的评估

- 1.比例法：二十四分之一法、三百六十五分之一法
- 2.风险分布法：七十八法则与逆七十八法则、流量预期法

二.保费充足性测试与保费不足准备金

未到期责任准备金可能会小于预期的未来赔付、费用及再保等支出，此时需计提保费不足准备金。未到期责任准备金的提取金额应大于或等于以下两者中的较大者：

- *预期未来发生的赔付、费用及再保支出的余额
- *在准备金评估日假设保单退保时的退保金额

当未到期责任准备金不足时，提取的保费不足准备金应能弥补未到期责任准备金与上述两者较大者的差额。

保费充足性测试		
未到期责任准备金	(1)	100
预期终极赔付率	(2)	77%
预期维持费用率	(3)	28.32%
预期投资收益率	(4)	1.6%
预期赔款	(5) = (1) × (2)	77
预期维持费用	(6) = (1) × (3)	28.32
预期投资收入	(7) = (1) × (4) / 2	0.8
差额	(8) = (1) - (5) - (6) + (7)	-4.52

三.未决赔款准备金的评估

1.链梯法

(1) 已决赔款链梯法

- ① 累计已决赔款的流量三角形
- ② 发展因子：发展年的累计已决赔款与前一个发展年的累计已决赔款之比

平均值的计算：所有年度简单平均 $\frac{\sum X_i}{n}$ ，近三年简单平均 $\frac{\sum C_i}{3}$ ，几何平均 $(\prod X_i)^{\frac{1}{n}}$ ，删

除最大最小值后简单平均，加权平均 $\frac{\sum X_i \cdot C_i}{\sum C_i}$ (C_i 为赔款， X_i 为发展因子)，

原始加权平均 $\frac{\sum C_{i, n+1}}{\sum C_{i, n}}$

③ 预测终极损失

④ 准备金

终极损失	已决赔款	未决赔款准备金	已发生已报案未决赔款准备金	已发生未报案未决赔款准备金
(1)	(2)	(3) = (1) - (2)	(4)	(5) = (3) - (4)

(2) 已报案赔款链梯法

- ① 累计已决赔款的流量三角形
- ② 发展因子
- ③ 预测终极损失

④准备金

终极损失	已决赔款	未决赔款准备金	已发生已报案未决赔款准备金	已发生未报案未决赔款准备金
(1)	(2)	$(3) = (1) - (2)$	(4)	$(5) = (3) - (4)$

2.案均赔款法

(1) 已决案均赔款法

A.估计终极有赔付案件数：有赔付已报案案件数流量三角形、发展因子、终极有赔付案件数

B.累计已决赔款除以有赔付的累计已决案件数计算出案均赔款；发展因子；估计已决案均赔款；未决赔款准备金的估计值

终极已决案均赔款	终极有赔付案件数	终极损失	已决赔款	未决赔款准备金
(1)	(2)	$(3) = (1) \times (2)$	(4)	$(5) = (3) - (4)$

(2) 已报案案均赔款法

A.估计终极有赔付案件数

B.累计已报案赔款除以有赔付的累计已报案案件数；发展因子；估计终极已报案案均赔款；未决赔款准备金的估计值

终极已报案案均赔款	终极有赔付案件数	终极损失	已决赔款	未决赔款准备金
(1)	(2)	$(3) = (1) \times (2)$	(4)	$(5) = (3) - (4)$

3.准备金进展法

(1) 事故年的已发生已报案未决赔款准备金、各进展年已决赔款流量三角形

(2) 已发生已报案未决赔款准备金的支付率：已决赔款除以相同事故年前一个发展年的准备金

(3) 已发生已报案未决赔款准备金的结转率：准备金除以前一个发展年的准备金

(4) 准备金支付率和结转率的发展因子

(5) 估计已发生已报案未决赔款准备金：上一进展年准备金 \times 结转率

(6) 已决赔款的估计值：上一进展年准备金 \times 支付率

(7) 各进展年已决赔款加总得终极累计已决赔款

(8) 未决赔款准备金

终极累计已决赔款	当前累计已决赔款	未决赔款准备金	已发生已报案未决赔款准备金	已发生未报案未决赔款准备金
(1)	(2)	$(3) = (1) - (2)$	(4)	$(5) = (3) - (4)$

4.赔付率法：未决赔款准备金=已赚保费 \times 终极赔付率-已决赔款

5.B-F发(预算IBNR法)

(1) 计算期望终极损失。首先估计期望终极赔付率，再用期望终极赔付率的估计值乘以事故年的已赚保费得期望终极损失。

(2) 累计已报案赔款流量三角形，求出累计发展因子

已赚保费	期望赔付率	期望终极赔款	已报案赔款累计发展因子	未报案赔款在终极损失中的比率IBNR因子	期望未报案赔款
(1)	(2)	$(3) = (1) \times (2)$	(4)	$(5) = 1 - 1/(4)$	$(6) = (5) \times (3)$
已报案赔款	修正终极损失	已决赔款	未决赔款准备金	已发生已报案未决赔款准备金	已发生未报案未决赔款准备金
(7)	$(8) = (6) + (7)$	(9)	$(10) = (8) - (9)$	$(11) = (7) - (9)$	$(12) = (10) - (11)$

6.已发生已报案未决赔款准备金

(1) 逐案估计法（适于短尾业务）

(2) 案均赔款法

四.理赔费用准备金的评估方法

1.直接理赔费用准备金的评估

① 累计已决赔款、累计已决直接理赔费用流量三角形

② 累计已决直接理赔费用与累计已决赔款之比的发展因子

③ 每 100 元已决赔款所导致的已决直接理赔费用（率）

④

终极损失	终 极 直 接 理 赔费用率	终极直接理赔费 用	已决直接理赔费用	直接理赔费用准备金
(1)	(2)	(3) = (1) × (2)	(4)	(5) = (3) - (4)

2.间接理赔费用准备金的评估

间接理赔费用准备金=（已发生已报案未决赔款准备金×r+IBNR）×间接理赔费用与已决赔款的检验比率

假设 r%的间接理赔费用在后面的理赔过程中发生，实务中取 r=100%

间接理赔费用准备金=〔（已发生已报案未决赔款准备金+其他 IBNR）×r+纯 IBNR〕×间接理赔费用与已决赔款的检验比率

第一章 生存分布与生命表

1. $T(x)$ 为个体 (x) 的未来寿命随机变量或个体 (x) 生存至死亡的时间随机变量, $T(x)$ 的分布函数为:

$$P[T(x) \leq t] = {}_tq_x; \quad T(x) \text{ 的概率密度函数为: } {}_tp_x \cdot \mu_{x+t}$$

$$\int_0^\infty {}_tp_x \cdot \mu_{x+t} dt = 1 \quad \int_n^{n+m} {}_tp_x \cdot \mu_{x+t} dt = {}_n|mq_x$$

$$\int_0^r {}_tp_x \cdot \mu_{x+t} dt = {}_rq_x \quad \int_r^\infty {}_tp_x \cdot \mu_{x+t} dt = {}_rp_x$$

2. 记 $K(x)$ 为 (x) 的未来寿命的整数随机变量, 则:

$$P\{K(x)=k\} = P[k < T(x) \leq k+1] = {}_k|q_x$$

$$3. \quad \mu_x = -\frac{\frac{d}{dx}S(x)}{S(x)} = -\frac{\frac{d}{dx}l_x}{l_x}, \quad {}_np_x = e^{-\int_x^{x+n}\mu_y dy}, \quad S(x) = e^{-\int_0^x\mu_y dy}$$

$$4. \quad E(T) = \int_0^\infty t \cdot {}_tp_x \cdot \mu_{x+t} dt = \int_0^\infty {}_tp_x dt = {}^\circ e_x = \frac{T_x}{l_x}, \quad {}^\circ e_x \text{ 为 } x \text{ 岁的人的完全平均余命。}$$

$$\text{Var}(T) = 2 \int_0^\infty t \cdot {}_tp_x dt - \left({}^\circ e_x\right)^2 = \frac{2 \cdot Y_x}{l_x} - \left(\frac{T_x}{l_x}\right)^2$$

$$5. \quad E[K] = \sum_{t=0}^{\omega-x-2} t \cdot {}_t|q_x = \sum_{t=0}^{\omega-x-2} {}_{t+1}p_x = e_x, \quad e_x \text{ 为 } x \text{ 岁的人未来寿命随机变量的期望取整余命。}$$

$$\text{Var}[K] = \sum_{t=0}^{\omega-x-2} (2t+1) \cdot {}_{t+1}p_x - (e_x)^2$$

$$6. \quad \alpha(x) \text{ 为在 } x \text{ 岁和 } x+1 \text{ 岁之间死亡的人的平均生存时间, } \alpha(x) = \frac{L_x - l_{x+1}}{d_x} = \frac{\int_0^1 t \cdot l_{x+t} \mu_{x+t} dt}{\int_0^1 l_{x+t} \mu_{x+t} dt}$$

$$l_x \text{ 个现年 } x \text{ 岁的人, 在 } x \text{ 和 } x+1 \text{ 岁之间总存活的年数为: } L_x = \int_0^1 l_{x+t} dt, \quad {}_nL_x = \int_0^n l_{x+t} dt$$

$$l_x \text{ 个现年 } x \text{ 岁的人未来总的存活年数为: } T_x = \int_0^\infty l_{x+t} dt = \sum_{y=x}^\infty L_y, \quad T_x^* = \sum_{y=x+1}^\infty l_y, \quad Y_x = \int_x^\infty T_y dy,$$

$$7. \text{ 在区间 } (x, x+1) \text{ 上的中心死亡率 } {}_n m_x = \frac{\int_0^n S(x+s) \mu_{x+s} ds}{\int_0^n S(x+s) ds} = \frac{\int_0^n l_{x+s} \mu_{x+s} ds}{\int_0^n l_{x+s} ds} = \frac{{}_n d_x}{{}_n L_x}$$

8. 死力的若干解析形式

① De-Moivre 形式:

$$\mu_x = \frac{1}{\omega - x}, \quad 0 \leq x \leq \omega, \quad S(x) = \frac{\omega - x}{\omega}, \quad T(x) \text{ 的密度函数 } {}_tp_x \cdot \mu_x = \frac{1}{\omega - x}$$

②Compertz 形式:

$$\mu_x = BC^x, B > 0, C \geq 1 \quad S(x) = e^{-\frac{B}{\log C}(C^x - 1)}, \text{当 } C = 1 \text{ 时 } \mu_x = B, \text{ 即常值死力假设}$$

③Makeham 形式:

$$\mu_x = A + BC^x, B > 0, C \geq 1 \quad S(x) = e^{-Ax - \frac{B}{\log C}(C^x - 1)}, \text{当 } A = 0 \text{ 时 Makeham} = \text{Gompertz}$$

④Weibull 形式:

$$\mu_x = k \cdot x^n, k > 0, n > 0 \quad S(x) = e^{-\frac{k \cdot x^{n+1}}{n+1}}$$

9.关于尾龄的若干假设

函数	死亡均匀分布假设 (线性)	常值死力假设 (指数)	Balducci 假设 (双曲线)
l_{x+t}	$l_x - t \cdot d_x = (1-t)l_x + t \cdot l_{x+1}$	$l_x (p_x)^t = l_x e^{-\mu \cdot t} = (l_x)^{1-t} (l_{x+1})^t$	$\left(t \cdot \frac{1}{l_{x+1}} + (1-t) \frac{1}{l_x} \right)^{-1}$
${}_t p_x$	$1 - t \cdot q_x$	$(p_x)^t = e^{-\mu \cdot t}$	$\frac{p_x}{p_x + t(1-p_x)} = \frac{q_x}{1-(1-t)q_x}$
${}_t q_x$	$t \cdot q_x$	$1 - (1-q_x)^t$	$\frac{t \cdot q_x}{1-(1-t)q_x}$
${}_{1-t} p_{x+t}$	$\frac{p_x}{1-tq_x}$	$(p_x)^{1-t} = e^{-\mu \cdot (1-t)}$	$p_x + t(1-p_x) = 1 - (1-t) \cdot q_x$
${}_{1-t} q_{x+t}$	$\frac{(1-t)q_x}{1-tq_x}$	$1 - (1-q_x)^{1-t}$	$(1-t) \cdot q_x$
μ_{x+t}	$\frac{q_x}{1-t \cdot q_x}$	$\mu = -\ln p_x$	$\frac{q_x}{1-(1-t) \cdot q_x}$
${}_t p_x \cdot \mu_{x+t}$	q_x	$\mu \cdot e^{-\mu t}$	$\frac{p_x \cdot q_x}{[1-(1-t) \cdot q_x]^2}$
L_x	$l_x - \frac{1}{2}d_x = l_{x+1} + \frac{1}{2}d_x$	$\frac{d_x}{\mu}$	$-l_{x+1} \left(\frac{\ln p_x}{q_x} \right)$
m_x	$\frac{q_x}{1 - \frac{1}{2} \cdot q_x}$	μ	$\frac{(q_x)^2}{-p_x \cdot \ln p_x}$

第二章 趸缴纯保费

一. 趸缴纯保费

考虑一个保险计划：如果被保险人现年 x 岁并在 $x+t$ 岁死亡，将赔付 b_t 。记 $Z_t = v^t b_t$ 为赔偿额在保单签发时的现值，则 Z 为现值随机变量，且有：

$$E(Z) = \int_0^{\infty} v^t b_t \cdot {}_t p_x \cdot \mu_{x+t} dt$$

$$\text{Var}(Z) = E(Z^2) - [E(Z)]^2 = E^2(Z) - [E(Z)]^2$$

其中 $E^2(Z)$ 是以 2δ 计算的 Z 的期望值

1. n 年定期保险

$$E(Z) = \bar{A}_{x:\overline{n}|}^1 = \int_0^n v^t \cdot {}_t p_x \cdot \mu_{x+t} dt \quad \text{Var}(Z) = {}^2\bar{A}_{x:\overline{n}|}^1 - (\bar{A}_{x:\overline{n}|}^1)^2$$

$$E(Z) = A_{x:\overline{n}|}^1 = \sum_{k=0}^{n-1} v^{k+1} {}_k|q_x \quad \text{Var}(Z) = {}^2A_{x:\overline{n}|}^1 - (A_{x:\overline{n}|}^1)^2$$

$$\bar{A}_{x:\overline{n}|}^1 = \frac{i}{\delta} A_{x:\overline{n}|}^1 \quad (\text{在 UDD 假设下})$$

$$\text{递推公式: } A_{x:\overline{n}|}^1 = vq_x + vp_x A_{x+1:\overline{n-1}|}^1$$

$$\text{转换函数: } A_{x:\overline{n}|}^1 = \frac{M_x - M_{x+n}}{D_x}$$

在人寿保险中， $A_{x:\overline{1}|}^1$ 通常称为自然纯保费，并用符号 c_x 表示，即 $A_{x:\overline{1}|}^1 = c_x = \frac{C_x}{D_x}$

2. 终身寿险

$$E(Z) = \bar{A}_x = \int_0^{\infty} v^t \cdot {}_t p_x \cdot \mu_{x+t} dt \quad \text{Var}(Z) = {}^2\bar{A}_x - (\bar{A}_x)^2$$

$$E(Z) = A_x = \sum_{k=0}^{\omega-x-1} v^{k+1} {}_k|q_x \quad \text{Var}(Z) = {}^2A_x - (A_x)^2$$

$$\bar{A}_x = \frac{i}{\delta} A_x \quad (\text{在 UDD 假设下})$$

递推公式: $A_x = vq_x + vp_x A_{x+1}$

转换函数: $A_x = \frac{M_x}{D_x}$

3. n 年两全保险

$$\begin{aligned} E(Z) &= \bar{A}_{x:n} \\ &= \int_0^n v^t \cdot {}_t p_x \cdot \mu_{x+t} dt + \int_0^\infty v^n \cdot {}_t p_x \cdot \mu_{x+t} dt \quad \text{Var}(Z) = {}^2\bar{A}_{x:n} - (\bar{A}_{x:n})^2 \\ &= \bar{A}_{x:n}^1 + A_{x:n}^1 \quad = ({}^2\bar{A}_{x:n}^1 + {}^2A_{x:n}^1) - (\bar{A}_{x:n}^1 + A_{x:n}^1)^2 \\ &= \bar{A}_{x:n}^1 + v^n {}_n p_x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E(Z) &= A_{x:n} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} v^{k+1} {}_k q_x + v^n \cdot {}_n p_x \quad \text{Var}(Z) = {}^2A_{x:n} - (A_{x:n})^2 \\ &= A_{x:n}^1 + A_{x:n}^1 \quad = ({}^2A_{x:n}^1 + {}^2A_{x:n}^1) - (A_{x:n}^1 + A_{x:n}^1)^2 \end{aligned}$$

$$\bar{A}_{x:n} = \frac{i}{\delta} A_{x:n}^1 + A_{x:n}^1 \quad (\text{在 UDD 假设下})$$

递推公式: $A_{x:n} = vq_x + vp_x A_{x+1:n-1}$

转换函数: $A_{x:n} = \frac{M_x - M_{x+n} + D_{x+n}}{D_x}$

4. h 年延期终身寿险

$$\begin{aligned} E(Z) &= {}_h|\bar{A}_x = \int_h^\infty v^t \cdot {}_t p_x \cdot \mu_{x+t} dt \quad E(Z) = {}_h|A_x = \sum_{k=h}^{\omega-x-1} v^{k+1} {}_k q_x \\ &= \bar{A}_x - \bar{A}_{x:h}^1 \quad = A_x - A_{x:h}^1 = A_{x:n}^1 \cdot A_{x+h} \end{aligned}$$

$${}_h|\bar{A}_x = \frac{i}{\delta} {}_h|A_x = \left(\frac{i}{\delta} \right) (A_x - A_{x:h}^1) \quad (\text{在 UDD 假设下})$$

递推公式: ${}_h|A_x = v^{m+1} {}_h p_x \cdot q_{x+h} + {}_h|A_{x+1} \cdot v \cdot p_x$

转换函数: ${}_h|A_x = \frac{M_{x+h}}{D_x}$

5. h 年延期 n 年定期保险

$$\begin{aligned} E(Z) &= {}_h|\bar{A}_x \\ &= \int_h^{n+h} v^t \cdot {}_t p_x \cdot \mu_{x+t} dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E(Z) &= {}_h|A_{x:\overline{n}}^1 \\ &= \sum_{k=h}^{h+n-1} v^{k+1} \cdot {}_k|q_x \end{aligned}$$

$${}_h|\bar{A}_x = \frac{i}{\delta} \cdot {}_h|A_{x:\overline{n}}^1$$

转换函数: ${}_h|A_{x:\overline{n}}^1 = \frac{M_{x+h} - M_{x+h+n}}{D_x}$

6. h 年延期 n 年两全保险

$${}_h|\bar{A}_{x:\overline{n}} = \int_h^{n+h} v^t \cdot {}_t p_x \cdot \mu_{x+t} dt + v^{n+h} \cdot {}_{n+h} p_x$$

$$\begin{aligned} {}_h|A_{x:\overline{n}} &= \sum_{k=h}^{n+h-1} v^{k+1} \cdot {}_k|q_x + v^{n+h} \cdot {}_{n+h} p_x \\ &= A_{x:\overline{h}}^1 \cdot A_{x+h:\overline{n}} \end{aligned}$$

$${}_h|\bar{A}_{x:\overline{n}} = \frac{i}{\delta} {}_h|A_{x:\overline{n}}^1 + {}_h|A_{x:\overline{n}}^1$$

转换函数: ${}_h|A_{x:\overline{n}} = \frac{M_{x+h} - M_{x+h+n} + D_{x+h+n}}{D_x}$

7. 保额递增的终身寿险

$$\begin{aligned} E(Z) &= (I\bar{A})_x \\ &= \int_0^{\infty} [t+1] v^t \cdot {}_t p_x \cdot \mu_{x+t} dt \\ &= \sum_{t=0}^{\infty} (t+1) \int_t^{t+1} v^s \cdot {}_s p_x \cdot \mu_{x+s} ds \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E(Z) &= (IA)_x \\ &= \sum_{k=0}^{\omega-x-1} (k+1) v^{k+1} \cdot {}_k|q_x \end{aligned}$$

$$(I\bar{A})_x = \frac{i}{\delta} (IA)_x$$

$$\text{递推公式: } (IA)_x = vq_x + vp_x \left[(IA)_{x+1} + A_{x+1} \right]$$

$$\text{转换函数: } (IA)_x = \frac{R_x}{D_x}$$

8. 保额递增的 n 年定期保险

$$\begin{aligned} E(Z) &= (\bar{IA})_{x:\overline{n}|}^1 \\ &= \int_0^n [t+1] v^t \cdot {}_t p_x \cdot \mu_{x+t} dt \\ &= \sum_{t=0}^{n-1} (t+1) \int_t^{t+1} v^s \cdot {}_s p_x \cdot \mu_{x+s} ds \end{aligned}$$

$$E(Z) = (IA)_{x:\overline{n}|}^1 = \sum_{k=0}^{n-1} (k+1) v^{k+1} \cdot {}_k q_x$$

$$(\bar{IA})_{x:\overline{n}|}^1 = \frac{i}{\delta} (IA)_{x:\overline{n}|}^1$$

$$\text{递推公式: } (IA)_{x:\overline{n}|}^1 = vq_x + vp_x \left[(IA)_{x+1:\overline{n-1}|}^1 + A_{x+1:\overline{n-1}|}^1 \right]$$

$$\text{转换函数: } (IA)_{x:\overline{n}|}^1 = \frac{R_x - (n+1)R_{x+n} + nR_{x+n+1}}{D_x}$$

9. 保额递减的 n 年定期保险

$$\begin{aligned} E(Z) &= (D\bar{A})_{x:\overline{n}|}^1 & E(Z) &= (DA)_{x:\overline{n}|}^1 \\ &= \int_0^n (n-t) v^t \cdot {}_t p_x \cdot \mu_{x+t} dt & &= \sum_{k=0}^{n-1} (n-k) v^{k+1} \cdot {}_k q_x \\ &= \sum_{t=0}^{n-1} (n-t) \int_t^{t+1} v^s \cdot {}_s p_x \cdot \mu_{x+s} ds & &= \sum_{k=1}^n A_{x:\overline{k}|}^1 \end{aligned}$$

$$(D\bar{A})_{x:\overline{n}|}^1 = \frac{i}{\delta} \cdot (DA)_{x:\overline{n}|}^1$$

$$\text{递推公式: } (DA)_{x:\overline{n}|}^1 = nvq_x + vp_x (DA)_{x+1:\overline{n-1}|}^1$$

转换函数: $(DA)_{x:\overline{n}|}^1 = \frac{nR_x - (n+1)R_{x+n} + R_{x+n+1}}{D_x}$

10. 按年递增, 并且每年递增 m 次的终身寿险

$$\begin{aligned} E(Z) &= \left(I^{(m)} \bar{A} \right)_x \\ &= \int_0^\infty \frac{[tm+1]}{m} v^t \cdot {}_t p_x \cdot \mu_{x+t} dt \\ &= \sum_{t=0}^\infty \left(\sum_{r=1}^m \left(t + \frac{r}{m} \right) \right) \int_{t+\frac{r-1}{m}}^{t+\frac{r}{m}} v^s \cdot {}_s p_x \cdot \mu_{x+s} ds \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{m \rightarrow \infty} \left(I^{(m)} \bar{A} \right)_x &= \left(\bar{IA} \right)_x \\ &= E(Z) \\ &= \int_0^\infty t \cdot v^t \cdot {}_t p_x \cdot \mu_{x+t} dt \\ &= \int_0^\infty {}_s | \bar{A}_x ds \end{aligned}$$

$$\left(\bar{IA} \right)_x = \left(\frac{i}{\delta} \right) \left[\left(IA \right)_x - \left(\frac{1}{d} - \frac{1}{\delta} \right) A_x \right]$$

二. 年金

1. 连续型生存年金

① 终身生存年金

$$\begin{aligned} E(Y) &= \bar{a}_x = \int_0^\infty v^t {}_t p_x dt = \int_0^\infty \bar{a}_{t|} \cdot {}_t p_x \cdot \mu_{x+t} dt \\ &= \frac{1}{\delta} (1 - \bar{A}_x) = \frac{\bar{N}_x}{D_x} \end{aligned}$$

$$Var(Y) = \left(\frac{1}{\delta} \right)^2 \left[{}^2 \bar{A}_x - (\bar{A}_x)^2 \right]$$

② n 年生存年金

$$\begin{aligned}
 E(Y) &= \bar{a}_{x:\overline{n}|} = \int_0^n v^t \cdot {}_t p_x dt = \int_0^n \bar{a}_{t|} \cdot {}_t p_x \cdot \mu_{x+t} dt + \bar{a}_{n|} \cdot {}_n p_x \\
 &= \frac{1 - \bar{A}_{x:\overline{n}|}}{\delta} = \frac{\bar{N}_x - \bar{N}_{x+n}}{D_x}
 \end{aligned}$$

$$Var(Y) = \left(\frac{1}{\delta} \right)^2 \left[{}^2\bar{A}_{x:\overline{n}|} - (\bar{A}_{x:\overline{n}|})^2 \right]$$

③ n 年延期终身生存年金

$$\begin{aligned}
 E(Y) &= {}_n|\bar{a}_x = \int_n^\infty v^t \cdot {}_t p_x dt = v^n \int_n^\infty \bar{a}_{t-n|} \cdot {}_t p_x \cdot \mu_{x+t} dt \\
 &= \bar{a}_x - \bar{a}_{x:\overline{n}|} = {}_nE_x \cdot \bar{a}_{x+n} \\
 &= \frac{\bar{A}_{x:\overline{n}|} - \bar{A}_x}{\delta} = \frac{\bar{N}_{x+n}}{D_x}
 \end{aligned}$$

④ m 年延期 n 年生存年金

$$\begin{aligned}
 E(Y) &= {}_{m|n}\bar{a}_x = \int_m^{m+n} v^t \cdot {}_t p_x dt = {}_m|\bar{a}_x - {}_{m+n}|\bar{a}_x = v^m \cdot {}_m p_x \cdot \bar{a}_{x+m:\overline{n}|} \\
 &= \frac{\bar{A}_{x:\overline{m}|} - \bar{A}_{x:\overline{m+n}|}}{\delta} = \frac{\bar{N}_{x+m} - \bar{N}_{x+m+n}}{D_x}
 \end{aligned}$$

2. 离散型生存年金

① 终身生存年金

$$\begin{aligned}
 E(Y) &= \ddot{a}_x = \sum_{k=0}^{\infty} v^k \cdot {}_k p_x = \sum_{k=0}^{\infty} \ddot{a}_{k+1|} \cdot {}_k q_x \\
 &= \frac{1 - A_x}{d} = \frac{N_x}{D_x}
 \end{aligned}$$

$$Var(Y) = \left(\frac{1}{d} \right)^2 \left[{}^2A_x - (A_x)^2 \right]$$

$$a_x = \ddot{a}_x - 1 = \frac{1 - (1+i)A_x}{i}$$

②n 年生存年金

$$\begin{aligned} E(Y) &= \ddot{a}_{x:\overline{n}|} = \sum_{k=0}^{n-1} v^k \cdot {}_k p_x = \sum_{k=0}^{n-1} \ddot{a}_{\overline{k+1}|} \cdot {}_k q_x + \ddot{a}_{\overline{n}|} \cdot {}_n p_x \\ &= \frac{1 - A_{x:\overline{n}|}}{d} = \frac{N_x - N_{x+n}}{D_x} \end{aligned}$$

$$Var(Y) = \left(\frac{1}{d}\right)^2 \left[{}^2A_{x:\overline{n}|} - \left(A_{x:\overline{n}|}\right)^2 \right]$$

$$a_{x:\overline{n}|} = \ddot{a}_{x:\overline{n}|} - 1 + {}_n E_x = \frac{1 - A_{x:\overline{n}|} - iA_{x:\overline{n}|}^1}{i}$$

③n 年延期终身生存年金

$$\begin{aligned} E(Y) &= {}_n|\ddot{a}_x = \sum_{k=n}^{\infty} v^k \cdot {}_k p_x = \sum_{k=0}^{\infty} {}_n|\ddot{a}_{\overline{k+1-n}|} \cdot {}_k q_x = \ddot{a}_x - \ddot{a}_{x:\overline{n}|} = {}_n E_x \cdot \ddot{a}_{x+n} \\ &= \frac{A_{x:\overline{n}|} - A_x}{d} = \frac{N_{x+n}}{D_x} \end{aligned}$$

$${}_n|a_x = a_x - a_{x:\overline{n}|} = {}_n|\ddot{a}_x - v^n {}_n p_x$$

④每年分 m 次支付的生存年金

$$\begin{aligned} \ddot{a}_x^{(m)} &= \frac{1 - A_x^{(m)}}{d^{(m)}} = \alpha(m) \ddot{a}_x - \beta(m) \approx \ddot{a}_x - \frac{m-1}{2m} \\ &= \frac{N_x^{(m)}}{D_x} = \frac{\alpha(m) \cdot N_x - \beta(m) \cdot D_x}{D_x} \approx N_x - \frac{m-1}{2m} \cdot D_x, \end{aligned}$$

$$\text{其中 } \alpha(m) = \frac{id}{i^{(m)}d^{(m)}}, \quad \beta(m) = \frac{i - i^{(m)}}{i^{(m)}d^{(m)}}$$

⑤每年分 m 次期初付的 n 年定期生存年金

$$\begin{aligned}\ddot{a}_{x:\overline{n}|}^{(m)} &= \ddot{a}_x^{(m)} - {}_n|\ddot{a}_x^{(m)} = \ddot{a}_x^{(m)} - {}_nE_x \ddot{a}_{x+n}^{(m)} \\ &= \alpha(m) \ddot{a}_{x:\overline{n}|} - \beta(m)(1 - {}_nE_x) \\ &\approx \ddot{a}_{x:\overline{n}|} - \frac{m-1}{2m}(1 - {}_nE_x)\end{aligned}$$

⑥每年分 m 次期初付的 n 年延期终身生存年金

$$\begin{aligned}{}_n|\ddot{a}_x^{(m)} &= \ddot{a}_x^{(m)} - \ddot{a}_{x:\overline{n}|}^{(m)} \\ &= \alpha(m) {}_n|\ddot{a}_x - \beta(m) {}_nE_x \\ &\approx {}_n|\ddot{a}_x - \frac{m-1}{2m} \cdot {}_nE_x\end{aligned}$$

3. 完全期末年金与比例期初年金

1. 完全期末年金

该年金现值与每年 $\frac{1}{m} \cdot \frac{1}{\bar{s}_{1/m}}$ 单位以连续方式支付的年金现值相等。其中，

$$\bar{s}_{1/m} = \int_0^{1/m} (1+i)^t dt = \frac{i^{(m)}}{m \cdot \delta}, \text{ 于是:}$$

$$a_x^{(m)} = \frac{1}{m} \cdot \frac{1}{\bar{s}_{1/m}} \cdot \bar{a}_x = \frac{\delta}{i^{(m)}} \bar{a}_x$$

$$a_{x:\overline{n}|}^{(m)} = a_x^{(m)} - {}_nE_x a_{x+n}^{(m)} = \frac{\delta}{i^{(m)}} \bar{a}_{x:\overline{n}|}$$

$${}_n|\bar{a}_x^{(m)} = \frac{\delta}{i^{(m)}} {}_n|\bar{a}_x$$

2. 比例期初年金

该年金等价于每年 $\frac{1}{m} \cdot \frac{1}{\bar{a}_{1/m}}$ 单位以连续方式支付的年金，其中，

$$\bar{a}_{1/m} = \int_0^{1/m} v^t dt = \frac{d^{(m)}}{m \cdot \delta}, \text{ 于是:}$$

$$\ddot{a}_x^{\{m\}} = \frac{1}{m} \cdot \frac{1}{\bar{a}_{1/m}} \bar{a}_x = \frac{\delta}{d^{(m)}} \bar{a}_x$$

$$\ddot{a}_{x:n}^{\{m\}} = \frac{\delta}{d^{(m)}} \bar{a}_{x:n}$$

$${}_n|\ddot{a}_x^{\{m\}} = \frac{\delta}{d^{(m)}} {}_n|\bar{a}_x$$

3.两者的关系

$$\ddot{a}_x^{\{m\}} = (1+i)^{\frac{1}{m}} \circ (m) a_x, \ddot{a}_{x:n}^{\{m\}} = (1+i)^{\frac{1}{m}} \circ (m) a_{x:n}, {}_n|\ddot{a}_x^{\{m\}} = (1+i)^{\frac{1}{m}} \circ (m) {}_n|a_x$$

第三章 均衡纯保费

1. 人寿保险模型的种类

- 全离散式人寿保险模型指死亡给付是在死亡的保单年度末时支付，保险费是按期初付生存年金的方式缴付的寿险模型。
- 半连续式人寿保险模型指死亡给付是在死亡的当时立即支付，保险费是按期初付生存年金的方式缴付的寿险模型。
- 全连续式人寿保险模型指死亡给付是在死亡的当时立即支付，保险费按连续性生存年金给付的方式缴付的寿险模型。

2. 平衡原理：

未来给付保险金额现值的期望值（即趸缴纯保费）=缴纳纯保费的精算现值

L =保险给付金额现值—缴付纯保费现值， $E(L)=0$ 。

3. 全连续式寿险模型的年缴纯保费

$$L = Z - \bar{P}Y$$

$$\text{由 } E(L)=0 \Rightarrow \bar{P} = \frac{E(Z)}{E(Y)} = \frac{E(b_T \cdot v_T)}{E(Y)}$$

① 终身寿险，每年均衡缴费

$$\bar{P}(\bar{A}_x) = \frac{\bar{A}_x}{\bar{a}_x} = \frac{\bar{M}_x}{\bar{N}_x}$$

$$L = v^T - \bar{P} \cdot \bar{a}_{T|}$$

$$\text{Var}(L) = \left[1 + \frac{\bar{P}}{\delta}\right]^2 \cdot \left[{}^2\bar{A}_x - (\bar{A}_x)^2\right] = \frac{\left[{}^2\bar{A}_x - (\bar{A}_x)^2\right]}{(\delta \bar{a}_x)^2}$$

② 终身寿险， h 年限期缴费

$${}_h\bar{P}(\bar{A}) = \frac{\bar{A}_x}{\bar{a}_{x:\overline{h}|}} = \frac{\bar{M}_x}{\bar{N}_x - \bar{N}_{x+h}}$$

$$L = \begin{cases} v^t - \bar{P}\bar{a}_{t|}, & t \leq h \\ v^t - \bar{P}\bar{a}_{h|}, & t > h \end{cases}$$

③n 年定期寿险，在 n 年内均衡缴费

$$\bar{P}(\bar{A}_{x:n|}^1) = \frac{\bar{A}_{x:n|}^1}{\bar{a}_{x:n|}} = \frac{\bar{M}_x - \bar{M}_{x+n}}{\bar{N}_x - \bar{N}_{x+n}}$$

$$L = \begin{cases} v^t - \bar{P}\bar{a}_{t|}, & t \leq n \\ -\bar{P}\bar{a}_n, & t > n \end{cases}$$

④n 年定期寿险，h 年限期缴费

$${}_h\bar{P}(\bar{A}_{x:n|}^1) = \frac{\bar{A}_{x:n|}^1}{\bar{a}_{x:\overline{h}|}} = \frac{\bar{M}_x - \bar{M}_{x+n}}{\bar{N}_x - \bar{N}_{x+h}}$$

$$L = \begin{cases} v^t - \bar{P}\bar{a}_{t|}, & t \leq h \\ v^t - \bar{P}\bar{a}_{h|}, & h < t \leq n \\ -\bar{P}\bar{a}_{h|}, & t > n \end{cases}$$

⑤n 年两全保险，在 n 年内均衡缴费

$$\bar{P}(\bar{A}_{x:n|}) = \frac{\bar{A}_{x:n|}}{\bar{a}_{x:n|}} = \frac{\bar{M}_x - \bar{M}_{x+n} + D_{x+n}}{\bar{N}_x - \bar{N}_{x+n}}$$

$$L = \begin{cases} v^t - \bar{P}\bar{a}_{t|}, & t \leq n \\ v^n - \bar{P}\bar{a}_n, & t > n \end{cases}$$

⑥n 年两全保险，h 年限期缴费

$${}_h\bar{P}(\bar{A}_{x:n|}) = \frac{\bar{A}_{x:n|}}{\bar{a}_{x:\overline{h}|}} = \frac{\bar{M}_x - \bar{M}_{x+n} + D_{x+n}}{\bar{N}_x - \bar{N}_{x+h}}$$

$$L = \begin{cases} v^t - \bar{P}\bar{a}_{t|}, t \leq h \\ v^t - \bar{P}\bar{a}_{h|}, h < t \leq n \\ v^n - \bar{P}\bar{a}_{h|}, t > n \end{cases}$$

⑦ n 年生存保险，在 n 年内均衡缴费

$$\bar{P} \left(\bar{A}_x : \bar{n} \right) = \frac{\bar{A}_x : \bar{n}}{\bar{a}_{x:\bar{n}}} = \frac{D_{x+n}}{\bar{N}_x - \bar{N}_{x+n}}$$

$$L = \begin{cases} -\bar{P}\bar{a}_{t|}, t \leq n \\ v^n - \bar{P}\bar{a}_{n|}, t > n \end{cases}$$

⑧ n 年生存保险，h 年限期缴费

$${}_h\bar{P} \left(\bar{A}_x : \bar{n} \right) = \frac{\bar{A}_x : \bar{n}}{\bar{a}_{x:h|}} = \frac{D_{x+n}}{\bar{N}_x - \bar{N}_{x+h}}$$

$$L = \begin{cases} -\bar{P}\bar{a}_{t|}, t < h \\ -\bar{P}\bar{a}_{h|}, h \leq t < n \\ v^n - \bar{P}\bar{a}_{h|}, t \geq n \end{cases}$$

⑨ n 年延期的终身生存年金，n 年缴费（保费在延长期内缴纳）

$$\bar{P} \left({}_n|\bar{a}_x \right) = \frac{{}_n|\bar{a}_x}{\bar{a}_{x:\bar{n}}} = \frac{\bar{N}_{x+n}}{\bar{N}_x - \bar{N}_{x+n}}$$

$$L = \begin{cases} -\bar{P}a_{t|}, t \leq n \\ \bar{a}_{t-n|}v^n - \bar{P}a_{n|}, t > n \end{cases}$$

⑩ $\bar{P}, \bar{A}, \bar{a}$ 之间的关系

$$\bar{P}(\bar{A}_x) = \frac{\bar{A}_x}{\bar{a}_x} = \frac{1 - \delta \bar{a}_x}{\bar{a}_x} = \frac{\delta \bar{A}_x}{1 - \bar{A}_x}$$

$$\bar{P}(\bar{A}_{x:\overline{n}|}) = \frac{\bar{A}_{x:\overline{n}|}}{\bar{a}_{x:\overline{n}|}} = \frac{1 - \delta \bar{a}_{x:\overline{n}|}}{\bar{a}_{x:\overline{n}|}} = \frac{\delta \bar{A}_{x:\overline{n}|}}{1 - \bar{A}_{x:\overline{n}|}}$$

$$\bar{P}(\bar{A}_{x:\overline{n}|}^1) = \frac{\bar{A}_{x:\overline{n}|}^1}{\bar{a}_{x:\overline{n}|}} = \frac{1 - \delta \bar{a}_{x:\overline{n}|} - {}_nE_x}{\bar{a}_{x:\overline{n}|}} = \frac{\delta \bar{A}_{x:\overline{n}|}^1}{1 - \bar{A}_{x:\overline{n}|}}$$

4. 全离散式均衡纯保费

① 终身寿险

$$P_x = \frac{A_x}{\ddot{a}_x} = \frac{M_x}{N_x}$$

$$L = v^{k+1} - P_x \ddot{a}_{\overline{k+1}|} = v^{k+1} \left(1 + \frac{P_x}{d} \right) - \frac{P_x}{d}$$

$$\text{Var}(L) = \left(1 + \frac{P_x}{d} \right)^2 \left(2A_x - A_x^2 \right) = \frac{2A_x - A_x^2}{(d \cdot \ddot{a}_x)^2} = \frac{2A_x - A_x^2}{(1 - A_x)^2}$$

② 终身寿险，h 年限期缴费

$${}_hP_x = \frac{A_x}{\ddot{a}_{x:\overline{h}|}} = \frac{M_x}{N_x - N_{x+h}}$$

$$L = \begin{cases} v^{k+1} - ({}_hP_x) \ddot{a}_{\overline{k+1}|}, & k < h \\ v^{k+1} - ({}_hP_x) \ddot{a}_{\overline{h}|}, & k \geq h \end{cases}$$

③ n 年定期寿险，在 n 年内均衡缴费

$$P_{x:\overline{n}|}^1 = \frac{A_{x:\overline{n}|}^1}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}} = \frac{M_x - M_{x+n}}{N_x - N_{x+n}}$$

$$L = \begin{cases} v^{k+1} - (P_{x:\overline{n}|}^1) \ddot{a}_{\overline{k+1}|}, & k < n \\ - (P_{x:\overline{n}|}^1) \ddot{a}_{\overline{n}|}, & k \geq n \end{cases}$$

④ n 年定期寿险，h 年限期缴费

$${}_hP_{x:\overline{n}|}^1 = \frac{A_{x:\overline{n}|}^1}{\ddot{a}_{x:\overline{h}|}} = \frac{M_x - M_{x+n}}{N_x - N_{x+h}}$$

$$L = \begin{cases} v^{k+1} - ({}_hP_{x:\overline{n}|}^1) \ddot{a}_{\overline{k+1}|}, & k < h \\ v^{k+1} - (P_{x:\overline{n}|}^1) \ddot{a}_{\overline{h}|}, & h \leq k < n \\ -(P_{x:\overline{n}|}^1) \ddot{a}_{\overline{n}|}, & k \geq n \end{cases}$$

⑤ n 年两全保险，在 n 年内均衡缴费

$$P_{x:\overline{n}|} = \frac{A_{x:\overline{n}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}} = \frac{M_x - M_{x+n} + D_{x+n}}{N_x - N_{x+n}}$$

$$L = \begin{cases} v^{k+1} - (P_{x:\overline{n}|}) \ddot{a}_{\overline{k+1}|}, & k < n \\ v^n - (P_{x:\overline{n}|}) \ddot{a}_{\overline{n}|}, & k \geq n \end{cases}$$

⑥ n 年两全保险， h 年限期缴费

$${}_hP_{x:\overline{n}|} = \frac{A_{x:\overline{n}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{h}|}} = \frac{M_x - M_{x+n} + D_{x+n}}{N_x - N_{x+h}}$$

$$L = \begin{cases} v^{k+1} - ({}_hP_{x:\overline{n}|}) \ddot{a}_{\overline{k+1}|}, & k < h \\ v^{k+1} - ({}_hP_{x:\overline{n}|}) \ddot{a}_{\overline{h}|}, & h \leq k < n \\ v^n - ({}_hP_{x:\overline{n}|}) \ddot{a}_{\overline{h}|}, & k \geq n \end{cases}$$

⑦ n 年生存保险，在 n 年内均衡缴费

$$P_{x:\overline{n}|}^1 = \frac{A_{x:\overline{n}|}^1}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}} = \frac{D_{x+n}}{N_x - N_{x+n}}$$

$$L = \begin{cases} -\left(P_{x:\overline{n}|}^1\right) \ddot{a}_{x:\overline{k+1}|}, k < n \\ v^n - \left(P_{x:\overline{n}|}^1\right) \ddot{a}_{\overline{n}|}, k \geq n \end{cases}$$

⑧ n 年生存保险，h 年限期缴费

$${}_hP_{x:\overline{n}|}^1 = \frac{A_{x:\overline{n}|}^1}{\ddot{a}_{x:\overline{h}|}} = \frac{D_{x+n}}{N_x - N_{x+h}}$$

$$L = \begin{cases} -\left({}_hP_{x:\overline{n}|}^1\right) \ddot{a}_{x:\overline{k+1}|}, k < h \\ -\left({}_hP_{x:\overline{n}|}^1\right) \ddot{a}_{x:\overline{h}|}, h \leq k < n \\ v^n - \left({}_hP_{x:\overline{n}|}^1\right) \ddot{a}_{\overline{h}|}, k \geq n \end{cases}$$

⑨ n 年延期的终身生存年金，n 年缴费（保费在延长期内缴纳）

$$P\left({}_n|\ddot{a}_x\right) = \frac{{}_n|\ddot{a}_x}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}} = \frac{N_{x+n}}{N_x - N_{x+n}}$$

$$L = \begin{cases} -P\left({}_n|\ddot{a}_x\right) \ddot{a}_{\overline{k+1}|}, k < n \\ v^n \ddot{a}_{\overline{k+1-n}|} - P\left({}_n|\ddot{a}_x\right) \ddot{a}_{\overline{n}|}, k \geq n \end{cases}$$

⑩ n 年延期的终身生存年金，h 年限期缴费

$${}_hP\left({}_n|\ddot{a}_x\right) = \frac{{}_n|\ddot{a}_x}{\ddot{a}_{x:\overline{h}|}} = \frac{N_{x+n}}{N_x - N_{x+h}}$$

$$L = \begin{cases} -\left[{}_hP\left({}_n\ddot{a}_x \right) \right] \ddot{a}_{\overline{k+1}|}, k < h \\ -\left[{}_hP\left({}_n\ddot{a}_x \right) \right] \ddot{a}_{\overline{h}|}, h \leq k < n \\ v^n \ddot{a}_{\overline{k+1-n}|} - \left[{}_hP\left({}_n\ddot{a}_x \right) \right] \ddot{a}_{\overline{h}|}, k \geq n \end{cases}$$

5. 半连续式寿险模型的年缴纯保费

① 终身寿险

$$P\left(\bar{A}_x \right) = \frac{\bar{A}_x}{\ddot{a}_x} = \frac{i}{\delta} \frac{A_x}{\ddot{a}_x} = \frac{i}{\delta} P_x \text{ (在UDD假设下)}$$

② 终身寿险， h 年限期缴费

$${}_hP\left(\bar{A}_x \right) = \frac{\bar{A}_x}{\ddot{a}_{x:\overline{h}|}} = \frac{i}{\delta} \frac{A_x}{\ddot{a}_{x:\overline{h}|}} = \frac{i}{\delta} {}_hP_x \text{ (在UDD假设下)}$$

③ n 年定期寿险，在 n 年内均衡缴费

$$P\left(\bar{A}_{x:\overline{n}|}^1 \right) = \frac{\bar{A}_{x:\overline{n}|}^1}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}} = \frac{i}{\delta} \frac{\bar{A}_{x:\overline{n}|}^1}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}} = \frac{i}{\delta} P_{x:\overline{n}|}^1 \text{ (在UDD假设下)}$$

④ n 年定期寿险， h 年限期缴费

$${}_hP\left(\bar{A}_{x:\overline{n}|}^1 \right) = \frac{\bar{A}_{x:\overline{n}|}^1}{\ddot{a}_{x:\overline{h}|}} = \frac{i}{\delta} \frac{\bar{A}_{x:\overline{n}|}^1}{\ddot{a}_{x:\overline{h}|}} = \frac{i}{\delta} {}_hP_{x:\overline{n}|}^1 \text{ (在UDD假设下)}$$

⑤ n 年两全保险，在 n 年内均衡缴费

$$P\left(\bar{A}_{x:\overline{n}|} \right) = \frac{\bar{A}_{x:\overline{n}|}^1 + A_{x:\overline{n}|}^1}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}} = \frac{i}{\delta} \frac{\bar{A}_{x:\overline{n}|}^1 + A_{x:\overline{n}|}^1}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}} = \frac{i}{\delta} P_{x:\overline{n}|}^1 + P_{x:\overline{n}|}^1 \text{ (在UDD假设下)}$$

⑥ n 年两全保险， h 年限期缴费

$${}_hP\left(\bar{A}_{x:\overline{n}|} \right) = \frac{\bar{A}_{x:\overline{n}|}^1 + A_{x:\overline{n}|}^1}{\ddot{a}_{x:\overline{h}|}} = \frac{i}{\delta} \frac{\bar{A}_{x:\overline{n}|}^1 + A_{x:\overline{n}|}^1}{\ddot{a}_{x:\overline{h}|}} = \frac{i}{\delta} {}_hP_{x:\overline{n}|}^1 + {}_hP_{x:\overline{n}|}^1 \text{ (在UDD假设下)}$$

6. 每年真实分 m 次缴付的年缴纯保费

险种	保险金额给付时间	
	在保险年度末	在死亡当时
终身寿险	$P_x^{(m)} = \frac{A_x}{\ddot{a}_x^{(m)}}$ $= \frac{M_x}{N_x^{(m)}}$	$P^{(m)}(\bar{A}_x) = \frac{\bar{A}_x}{\ddot{a}_x^{(m)}}$ $= \frac{\bar{M}_x}{N_x^{(m)}}$
h 年定期缴付的终身寿险	${}_hP_x^{(m)} = \frac{A_x}{\ddot{a}_{x:\overline{h} }^{(m)}}$ $= \frac{M_x}{N_x^{(m)} - N_{x+h}^{(m)}}$	${}_hP^{(m)}(\bar{A}_x) = \frac{\bar{A}_x}{\ddot{a}_{x:\overline{h} }^{(m)}}$ $= \frac{\bar{M}_x}{N_x^{(m)} - N_{x+h}^{(m)}}$
n 年定期寿险	$P_{x:\overline{n} }^{1(m)} = \frac{A_{x:\overline{n} }^1}{\ddot{a}_{x:\overline{n} }^{(m)}}$ $= \frac{M_x - M_{x+n}}{N_x^{(m)} - N_{x+n}^{(m)}}$	$P^{(m)}(\bar{A}_{x:\overline{n} }^1) = \frac{\bar{A}_{x:\overline{n} }^1}{\ddot{a}_{x:\overline{n} }^{(m)}}$ $= \frac{\bar{M}_x - \bar{M}_{x+n}}{N_x^{(m)} - N_{x+n}^{(m)}}$
n 年两全保险	$P_{x:\overline{n} }^{(m)} = \frac{A_{x:\overline{n} }}{\ddot{a}_{x:\overline{n} }^{(m)}}$ $= \frac{M_x - M_{x+n} + D_{x+n}}{N_x^{(m)} - N_{x+n}^{(m)}}$	$P^{(m)}(\bar{A}_{x:\overline{n} }) = \frac{\bar{A}_{x:\overline{n} }}{\ddot{a}_{x:\overline{n} }^{(m)}}$ $= \frac{\bar{M}_x - \bar{M}_{x+n} + D_{x+n}}{N_x^{(m)} - N_{x+n}^{(m)}}$
h 年定期缴付的 n 年两全保险	${}_hP_{x:\overline{n} }^{(m)} = \frac{A_{x:\overline{n} }}{\ddot{a}_{x:\overline{h} }^{(m)}}$ $= \frac{M_x - M_{x+n} + D_{x+n}}{N_x^{(m)} - N_{x+h}^{(m)}}$	${}_hP^{(m)}(\bar{A}_{x:\overline{n} }) = \frac{\bar{A}_{x:\overline{n} }}{\ddot{a}_{x:\overline{h} }^{(m)}}$ $= \frac{\bar{M}_x - \bar{M}_{x+n} + D_{x+n}}{N_x^{(m)} - N_{x+h}^{(m)}}$
<p>注 1: $P^{(m)}$ 表示每年分 m 次缴付的年缴纯保费, 每次缴付的纯保费为 $P^{(m)}/m$。这里 h 表示缴费期的年数, 而不是缴费的次数。</p> <p>注 2: 在 UDD 假设条件下, $N_x^{(m)} = \alpha(m)N_x - \beta(m)D_x$,</p>		

其中 $\alpha(m) = id / i^{(m)} d^{(m)}, \beta(m) = (i - i^{(m)}) / i^{(m)} d^{(m)}$;

在传统的近似计算公式下, 有 $N_x^{(m)} \approx N_x - \frac{m-1}{2m} D_x$

7. 比例保费

即保费采用比例期初年金的方式缴纳

终身寿险:

$$P^{\{m\}}(\bar{A}_x) = \frac{\bar{A}_x}{\ddot{a}_x^{\{m\}}} = \frac{d^{(m)}}{\delta} \cdot \frac{\bar{A}_x}{\bar{a}_x} = \frac{d^{(m)}}{\delta} \cdot \bar{P}(\bar{A}_x)$$

$$\text{即在每个 } 1/m \text{ 年初缴纳 } \frac{1}{m} P^{\{m\}}(\bar{A}_x) = \frac{d^{(m)}}{m\delta} \cdot \bar{P}(\bar{A}_x)$$

$P^{\{1\}}(\bar{A}_x) - P(\bar{A}_x)$ 是为了获得保费退款收益而每年缴纳的费用, 设其为 $P(\bar{A}_x^{PR})$,

则: $(\bar{A}_x^{PR}) = \frac{d}{\delta} \times \frac{\bar{A}_x}{\bar{a}_x} - \frac{\bar{A}_x}{\ddot{a}_x}$ 。一般而言, $P^{\{m\}}(\bar{A}_x) - P^{(m)}(\bar{A}_x)$ 是退款收益的

每年分 m 次缴费的年均衡纯保费。

其它公式可类似得到:

$${}_h P^{\{m\}}(\bar{A}_{x:\overline{n}|}) = \frac{\bar{A}_{x:\overline{n}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}^{\{m\}}} = \frac{d^{(m)}}{\delta} \cdot \frac{\bar{A}_{x:\overline{n}|}}{\bar{a}_{x:\overline{n}|}} = \frac{d^{(m)}}{\delta} \cdot {}_h \bar{P}(\bar{A}_{x:\overline{n}|})$$

8. 累计增额受益

简单说就是除了正常的保险给付外, 再加上保费的返还, 并且返还的方式有两种: 保费不计利息或是包含利息。

假设 (x) 的 n 年人寿保险, 其受益保险金额当死亡发生在第 $k+1$ 年时为 $\ddot{S}_{k+1|j}$, 根据平

衡原理, 其趸缴纯保费为 $E[W] = \frac{A_{x:\overline{n}|}^1 - A_{x:\overline{n}|}^1}{d_{(j)}}$ 。其中, 保险人的现值按利率 i 计算, $d_{(j)}$

是与利率 j 等价的 (银行) 贴现率, $A_{x:\overline{n}|}^1$ 按利率 $i' = \frac{i-j}{1+j}$ 计算。

若 $i=j$, 则趸缴纯保费转化为 $\ddot{a}_{x:\overline{n}|} - {}_n p_x \cdot \ddot{a}_{n|} = \ddot{a}_{x:\overline{n}|} - {}_n E_x \cdot \ddot{S}_{n|} = \frac{{}_n q_x - A_{x:\overline{n}|}^1}{d}$

$$W=\left\{\begin{array}{ll} v^{k+1}\cdot\ddot{s}_{k+1|j}=\frac{1}{d_{(j)}}\left[v^{k+1}\cdot(1+j)^{k+1}-v^{k+1}\right] & 0\leq k< n \\ 0 & k\geq n \end{array}\right.$$

第四章均衡纯保费的责任准备金

1.责任准备金的计算原理

过去法:

时刻 t 的准备金=已缴纯保费在时刻 t 的精算积累值—以往保险利益在时刻 t 的精算积累值

未来法:

时刻 t 的准备金=未来保险利益在时刻 t 的精算现值—未缴纯保费在时刻 t 的精算现值

2.全连续式寿险模型的责任准备金

$$v^n \cdot {}_n p_x \cdot \bar{s}_{x:n} = {}_n E_x \cdot \bar{s}_{x:n} = \bar{a}_{x:n}$$

${}_n E_x$ 为(x)在第n年末仍活着时1元的现值, $\frac{1}{{}_n E_x}$ 为1元在第n年末(x)仍活着时的精算积累值

方法 险种		未来法	过去法	保费差公式	缴清保险公式
终身寿险	${}_t \bar{V}(\bar{A}_x)$	$\bar{A}_{x+t} - \bar{P}(\bar{A}_x) \bar{a}_{x+t}$	$\left[\frac{\bar{P}(\bar{A}_x) \bar{a}_{x:t}}{{}_t E_x} \right] - \left[\frac{\bar{A}_{x:t}^1}{{}_t E_x} \right]$	$\left[\bar{P}(\bar{A}_{x+t}) - \bar{P}(\bar{A}_x) \right] \bar{a}_{x+t}$	$\left[1 - \frac{\bar{P}(\bar{A}_x)}{\bar{P}(\bar{A}_{x+t})} \right] \bar{A}_{x+t}$
h 年限期 缴费终身 寿险	${}_t^h \bar{V}(\bar{A}_x)$	$\bar{A}_{x+t} - {}_h \bar{P}(\bar{A}_x) \bar{a}_{x+t:h-t}, t < h$ $\bar{A}_{x+t} \qquad \qquad \qquad t \geq h$			
n 年定期 保险	${}_t \bar{V}(\bar{A}_{x:n}^1)$	$\bar{A}_{x+t:n-t}^1 - \bar{P}(\bar{A}_{x:n}^1) \bar{a}_{x+t:n-t}, t < n$ $0 \qquad \qquad \qquad t \geq n$	$\left[\frac{\bar{P}(\bar{A}_{x:n}^1) \bar{a}_{x:t}}{{}_t E_x} \right] - \left[\frac{\bar{A}_{x:t}^1}{{}_t E_x} \right]$	$\left[\bar{P}(\bar{A}_{x+t:n-t}^1) - \bar{P}(\bar{A}_{x:n}^1) \right] \bar{a}_{x+t:n-t}$	$\left[1 - \frac{\bar{P}(\bar{A}_{x:n}^1)}{\bar{P}(\bar{A}_{x+t:n-t}^1)} \right] \bar{A}_{x+t:n-t}^1$

h 年限期 缴 费 , n 年定期保 险	${}_t^h\bar{V}(\bar{A}_{x:\overline{n} }^1)$	$\bar{A}_{x+t:n-t}^1 - {}_h\bar{P}(\bar{A}_{x:\overline{n} }^1)\bar{a}_{x+t:h-t}, t < h$ $\bar{A}_{x+t:n-t}^1 \quad h \leq t < n$ $0 \quad t \geq n$			
n 年两全 保险	${}_t\bar{V}(\bar{A}_{x:\overline{n} })$	$\bar{A}_{x+t:n-t} - \bar{P}(\bar{A}_{x:\overline{n} })\bar{a}_{x+t:n-t}, t < n$ $1 \quad t = n$ $0 \quad t > n$	$\left[\frac{\bar{P}(\bar{A}_{x:\overline{n} })\bar{a}_{x:t}}{{}_tE_x} \right] - \left[\frac{\bar{A}_{x:t}}{{}_tE_x} \right]$	$[\bar{P}(\bar{A}_{x+t:n-t}) - \bar{P}(\bar{A}_{x:\overline{n} })]\bar{a}_{x+t:n-t}$	$\left[1 - \frac{\bar{P}(\bar{A}_{x:\overline{n} })}{\bar{P}(\bar{A}_{x+t:n-t})} \right] \bar{A}_{x+t:n-t}$
h 年限期 缴 费 , n 年两全保 险	${}_t^h\bar{V}(\bar{A}_{x:\overline{n} })$	$\bar{A}_{x+t:n-t} - {}_h\bar{P}(\bar{A}_{x:\overline{n} })\bar{a}_{x+t:h-t}, t < h$ $\bar{A}_{x+t:n-t} \quad h \leq t < n$ $1 \quad t = n$ $0 \quad t > n$			
n 年延期 终身生存 年金	${}_t\bar{V}({}_n\bar{a}_x)$	$\bar{a}_{x+n}v^{n-t} {}_{n-t}p_{x+t} - \bar{P}({}_n\bar{a}_x)\bar{a}_{x+t:n-t}, t < n$ $\bar{a}_{x+t} \quad t \geq n$	$\bar{P}({}_n\bar{a}_x)\frac{\bar{a}_{x:t}}{{}_tE_x} \quad t < n$ $\frac{\bar{P}({}_n\bar{a}_x) \cdot \bar{a}_{x:\overline{n} }}{{}_tE_x} - \frac{{}_n\bar{a}_{x:t-n}}{{}_tE_x}, t \geq n$		
h 年限期 缴 费 , n 年延期终 身生存年 金	${}_t^h\bar{V}({}_n\bar{a}_x)$	$\bar{a}_{x+n}v^{n-t} {}_{n-t}p_{x+t} - {}_h\bar{P}({}_n\bar{a}_x)\bar{a}_{x+t:h-t}, t < h$ $\bar{a}_{x+n}v^{n-t} {}_{n-t}p_{x+t} \quad h \leq t < n$ $\bar{a}_{x+t} \quad t \geq n$			

3.全离散式寿险模型的责任准备金

方法 险种		未来法	过去法
终身寿险	${}_kV_x$	$A_{x+k} - P_x \cdot \ddot{a}_{x+k}$	$\frac{P_x \cdot \ddot{a}_{x:\overline{k} }}{{}_kE_x} - \frac{A_{x:\overline{k} }^1}{{}_kE_x}$
h 年限期缴费终身寿险	${}_hV_k$	$A_{x+k} - {}_hP_x \cdot \ddot{a}_{x+k:\overline{h-k} }, k < h$ $A_{x+k} \quad k \geq h$	${}_hP_x \cdot \ddot{s}_{x:\overline{k} } - \frac{A_{x:\overline{k} }^1}{{}_kE_x}, k < h$ $\frac{{}_hP_x \cdot \ddot{a}_{x:\overline{h} }}{{}_kE_x} - \frac{A_{x:\overline{k} }^1}{{}_kE_x}, k \geq h$
n 年定期保险	${}_kV_{x:n}^1$	$A_{x+k:n-k}^1 - P_{x:n}^1 \cdot \ddot{a}_{x+k:n-k}$	$\frac{P_{x:n}^1 \cdot \ddot{a}_{x:\overline{k} }}{{}_kE_x} - \frac{A_{x:\overline{k} }^1}{{}_kE_x}$
h 年限期缴费, n 年定期保险	${}_hV_k^1$	$A_{x+k:n-k}^1 - {}_hP_{x:n}^1 \cdot \ddot{a}_{x+k:\overline{h-k} }, k < h$ $A_{x+k:n-k}^1 \quad k \geq h$	$\frac{{}_hP_{x:n}^1 \cdot \ddot{a}_{x:\overline{k} }}{{}_kE_x} - \frac{A_{x:\overline{k} }^1}{{}_kE_x}, k < h$ $\frac{{}_hP_{x:n}^1 \cdot \ddot{a}_{x:\overline{h} }}{{}_kE_x} - \frac{A_{x:\overline{k} }^1}{{}_kE_x}, k \geq h$
n 年两全保险	${}_kV_{x:n}$	$A_{x+k:n-k} - P_{x:n} \cdot \ddot{a}_{x+k:n-k}$	$\frac{P_{x:n} \cdot \ddot{a}_{x:\overline{k} }}{{}_kE_x} - \frac{A_{x:\overline{k} }^1}{{}_kE_x}$

h 年限期缴费, n 年两全保险	${}_k^h V_{x:\overline{n} }$	$A_{x+k:\overline{n-k} } - {}_h P_{x:\overline{n} } \cdot \ddot{a}_{x+k:\overline{h-k} }, k < h$ $A_{x+k:\overline{n-k} } \quad k \geq h$	$\frac{{}_h P_{x:\overline{n} } \cdot \ddot{a}_{x:k} }{{}_k E_x} - \frac{A_{x:k}^1}{{}_k E_x}, k < h$ $\frac{{}_h P_{x:\overline{n} } \cdot \ddot{a}_{x:h} }{{}_k E_x} - \frac{A_{x:k}^1}{{}_k E_x}, k \geq h$
n 年延期终身生存年金	${}_k V({}_n \ddot{a}_x)$	$\ddot{a}_{x+n} \cdot {}_{n-k} E_{x+k} - P({}_n \ddot{a}_x) \ddot{a}_{x+n:\overline{n-k} }, k < n$ $\ddot{a}_{x+k} \quad k \geq n$	$\frac{P({}_n \ddot{a}_x) \ddot{a}_{x:k} }{{}_k E_x}, \quad k < n$ $\frac{P({}_n \ddot{a}_x) \ddot{a}_{x:n} }{{}_k E_x} - \frac{{}_n \ddot{a}_{x:k-n} }{{}_k E_x}, k \geq n$

4. 半连续式寿险模型的责任准备金

		未来法	在 UDD 假设下
终身寿险	${}_t V(\bar{A}_x)$	$\bar{A}_{x+t} - P(\bar{A}_x) \ddot{a}_{x+t}$	$\frac{i}{\delta} {}_k V_x$
h 年限期缴费终身寿险	${}_t^h V(\bar{A}_x)$	$\bar{A}_{x+t} - {}_h P(\bar{A}_x) \ddot{a}_{x+t:\overline{h-t} }, t < h$ $\bar{A}_{x+t} \quad t \geq h$	$\frac{i}{\delta} {}_k^h V_x$
n 年定期保险	${}_t V(\bar{A}_{x:n}^1)$	$\bar{A}_{x+t:\overline{n-t} }^1 - P(\bar{A}_{x:n}^1) \ddot{a}_{x+t:\overline{n-t} }, t < n$ $0 \quad t \geq n$	$\frac{i}{\delta} {}_k V_{x:n}^1$

h 年限期缴费，n 年定期保险	${}_t^h V(\bar{A}_{x:\overline{n} }^1)$	$\begin{aligned} &\bar{A}_{x+t:\overline{n-t} }^1 - {}_h P(\bar{A}_{x:\overline{n} }^1) \ddot{a}_{x+t:\overline{h-t} }, t < h \\ &\bar{A}_{x+t:\overline{n-t} }^1 & h \leq t < n \\ &0 & t \geq n \end{aligned}$	$\frac{i}{\delta} {}_k^h V_{x:\overline{n} }^1$
n 年两全保险	${}_t V(\bar{A}_{x:\overline{n} })$	$\begin{aligned} &\bar{A}_{x+t:\overline{n-t} } - P(\bar{A}_{x:\overline{n} }) \ddot{a}_{x+t:\overline{n-t} }, t < n \\ &1 & t = n \\ &0 & t > n \end{aligned}$	$\frac{i}{\delta} {}_k V_{x:\overline{n} }^1 + {}_t V_{x:\overline{n} }^1$
h 年限期缴费，n 年两全保险	${}_t^h V(\bar{A}_{x:\overline{n} })$	$\begin{aligned} &\bar{A}_{x+t:\overline{n-t} } - {}_h P(\bar{A}_{x:\overline{n} }) \ddot{a}_{x+t:\overline{h-t} }, t < h \\ &\bar{A}_{x+t:\overline{n-t} } & h \leq t < n \\ &1 & t = n \\ &0 & t > n \end{aligned}$	$\frac{i}{\delta} {}_t^h V_{x:\overline{n} }^1 + {}_t^h V_{x:\overline{n} }^1$

5. 每年真实分 m 次缴费的责任准备金

① 在全离散式下寿险的责任准备金

h 年限期缴费，n 年储蓄寿险，根据未来法：

$${}_k^h V_{x:\overline{n}|}^{(m)} = A_{x+k:\overline{n-k}|} - {}_h P_{x:\overline{n}|}^{(m)} \ddot{a}_{x+h:\overline{n-k}|}^{(m)} (k < h), \text{ 在 UDD 假设下 } {}_k^h V_{x:\overline{n}|}^{(m)} = {}_k^h V_{x:\overline{n}|} - \beta(m) \cdot {}_h P_{x:\overline{n}|}^{(m)} \cdot {}_k V_{x:\overline{h}|}^1$$

在死亡均匀分布的条件下，每年分 m 次真实缴费的责任准备金等于全离散式相应寿险责任准备金，加上全离散式定期保险（期限为缴费 h 年的）责任准备金的一部分[比例是 $(-\beta(m) \cdot {}_h P_{x:\overline{n}|}^{(m)})$]

② 在半连续式下寿险的责任准备金

h 年限期缴费，n 年储蓄寿险，根据未来法：

$${}_k^h V_{x:\overline{n}|}^{(m)}(\bar{A}_{x:\overline{n}|}) = \bar{A}_{x+k:\overline{n-k}|} - {}_h P_{x:\overline{n}|}^{(m)}(\bar{A}_{x:\overline{n}|}) \ddot{a}_{x+k:\overline{n-k}|}^{(m)} (k < h), \text{ 在 UDD 假设下 } {}_k^h V_{x:\overline{n}|}^{(m)}(\bar{A}_{x:\overline{n}|}) = {}_k^h V_{x:\overline{n}|}(\bar{A}_{x:\overline{n}|}) - \beta(m) \cdot {}_h P_{x:\overline{n}|}^{(m)}(\bar{A}_{x:\overline{n}|}) \cdot {}_k V_{x:\overline{h}|}^1$$

在 UDD 假设下，全连续式储蓄寿险的责任准备金公式是： ${}_k^h \bar{V}(\bar{A}_{x:\overline{n}|}) = {}_k^h V(\bar{A}_{x:\overline{n}|}) - \beta(\infty) \cdot {}_h \bar{P}(\bar{A}_{x:\overline{n}|}) \cdot {}_k V_{x:\overline{h}|}^1$

6.非整数期的责任准备金:

$$\text{当 } 0 < s < \frac{1}{2} \text{ 时, } {}_{k+s}V^{(2)} \approx (1-s) \cdot {}_kV^{(2)} + s \cdot {}_{k+1}V^{(2)} + \left(\frac{1}{2}-s\right)\pi_k^{(2)}$$

$$\text{当 } \frac{1}{2} < s < 1 \text{ 时, } {}_{k+s}V^{(2)} \approx (1-s) \cdot {}_kV^{(2)} + s \cdot {}_{k+1}V^{(2)} + (1-s)\pi_k^{(2)}$$

7.责任准备金的递推公式:

$$({}_tV + \pi_t)(1+i) = b_{t+1} \cdot q_{x+t} + p_{x+t} \cdot {}_{t+1}V = (b_{t+1} - {}_{t+1}V) \cdot q_{x+t} + {}_{t+1}V \quad (b_{t+1} - {}_{t+1}V) \text{ 为第 } t+1 \text{ 年的净风险保额}$$

$$l_{x+t}({}_tV + p_t)(1+i) = b_{t+1} \cdot d_{x+t} + l_{x+t+1} \cdot {}_{t+1}V$$

考虑费用:

$${}_h p_x \left\{ \left[{}_{h-1}V_x + u(h-1) \right] + (P_x + c) - e_{h-1} \right\} (1+i) - {}_{h-1} p_x \cdot q_{x+h-1} = {}_h p_x \left[{}_hV_x + u(h) \right], u(h) \text{ 为第 } h \text{ 年的目标盈余}$$

$${}_h p_x \left[u(h-1) + (c - e_{h-1}) \right] (1+i) = {}_h p_x \cdot u(h) = \sum_{j=1}^h (1+i)^{h-j+1} \cdot {}_{j-1} p_x (c - e_{j-1})$$

8.亏损按各保险年度分摊

$${}_k L = v^{j+1} \cdot b_{k+j+1} - \sum_{t=0}^j v^t \cdot \pi_{k+t} \quad \text{定义 } {}_k \Lambda_t \text{ 为分配在第 } k+t+1 \text{ 年初的损失, } t=0,1,2,\dots$$

$${}_k \Lambda_t = \begin{cases} 0 & \text{概率为 } {}_t q_{x+k} \\ v \cdot b_{x+k+1} - ({}_{k+t}V + \pi_{k+t}) & \text{概率为 } {}_t | q_{x+k} \\ v \cdot {}_{k+t+1}V - ({}_{k+t}V + \pi_{k+t}) & \text{概率为 } {}_{t+1} q_{x+k} \end{cases}$$

$${}_k L = {}_k V - \sum_{t=0}^{\infty} v^t \cdot {}_k \Lambda_t \quad E({}_k L) = {}_k V \quad \text{Var}({}_k L) = \sum_{t=0}^{\infty} v^{2t} \cdot \text{Var}({}_k \Lambda_t)$$

9.修正准备金

①初年度纯保费为 α , 往后 $j-1$ 年为 β , j 年之后的纯保费仍为原来的均衡纯保费 P 。

$$\alpha + \beta a_{x:j-1|} + P {}_j \ddot{a}_{x:h-j|} = P \ddot{a}_{x:h|} \quad \alpha + \beta a_{x:j-1|} = P \ddot{a}_{x:j|}$$

$$\beta = P + \frac{\beta - \alpha}{\ddot{a}_{x:j|}} = P + \frac{P - \alpha}{a_{x:j-1|}}$$

②一年定期修正制 (FPT)

$$\alpha = A_{x:1|}^1 \quad A_{x:1|}^1 + \beta {}_1 \ddot{a}_{x:h-1|} = P \ddot{a}_{x:h|}$$

③保单分类修正制 (CRVM)

$$\text{高保费保单: } \beta^{\text{Com}} = P + \frac{{}_{19}P_{x+1} - A_{x:1|}^1}{\ddot{a}_{x:h|}}$$

第六章 多元生命函数

	联合生存状态	最后生存状态
表示形式	(xy)	(\overline{xy})
存在条件	x 和 y 必须都活着	x 和 y 中有一个活着状态就存在
分布函数	${}_tq_{xy} = 1 - {}_tp_x \cdot {}_tp_y$ ${}_tp_{xy} = {}_tp_x \cdot {}_tp_y$	${}_tq_{\overline{xy}} = {}_tq_x \cdot {}_tq_y = 1 - {}_tp_x - {}_tp_y + {}_tp_x \cdot {}_tp_y$ ${}_tp_{\overline{xy}} = {}_tp_x + {}_tp_y - {}_tp_x \cdot {}_tp_y$
密度函数	${}_tp_x \cdot {}_tp_y (u_{x+t} + u_{y+t})$	${}_tp_x \cdot u_{x+t} + {}_tp_y \cdot u_{y+t} - {}_tp_x \cdot {}_tp_y \cdot (u_{x+t} + u_{y+t})$
死力	$u_{x+t} + u_{y+t}$ $u_{x+t} + u_{y+t} + u^z$, u^z 为相互影响的部分	$\frac{{}_tp_x \cdot u_{x+t} + {}_tp_y \cdot u_{y+t} - {}_tp_x \cdot {}_tp_y \cdot (u_{x+t} + u_{y+t})}{{}_tp_x + {}_tp_y - {}_tp_{xy}}$
未来期望余命	${}^\circ e_{xy} = \int_0^\infty {}_tp_{xy} dt$ $e_{xy} = \sum_{k=0}^\infty {}_kp_{xy}$	${}^\circ e_{\overline{xy}} = \int_0^\infty {}_tp_{\overline{xy}} dt = {}^\circ e_x + {}^\circ e_y - {}^\circ e_{xy}$ $e_{\overline{xy}} = e_x + e_y - e_{xy}$
	$\text{Var}[T(xy)] = 2 \int_0^\infty {}_tp_{xy} dt - \left({}^\circ e_{xy}\right)^2$	$\text{Var}[T(\overline{xy})] = 2 \int_0^\infty {}_tp_{\overline{xy}} dt - \left({}^\circ e_{\overline{xy}}\right)^2$
	$\text{Cov}[T(xy), T(\overline{xy})] = {}^\circ e_x \cdot {}^\circ e_y - {}^\circ e_{xy} \cdot {}^\circ e_{\overline{xy}}$	
状态在 t+1 年消失的概率	${}_t q_{xy} = {}_tp_{xy} \cdot (q_{x+t} + q_{y+t} - q_{x+t} \cdot q_{y+t})$ $= {}_tp_x \cdot {}_tp_y \cdot (1 - p_{x+t} \cdot p_{y+t})$	${}_t q_{\overline{xy}} = {}_tq_x \cdot {}_tq_y \cdot q_{y+t} + {}_tq_y \cdot {}_tq_x \cdot q_{x+t} + {}_tp_x \cdot {}_tp_y \cdot q_{x+t} \cdot q_{y+t}$
	${}_t q_{\overline{xy}} + {}_t q_{xy} = {}_tp_x \cdot q_{x+t} + {}_tp_y \cdot q_{y+t}$	
	$E[v^{T(xy)}] = A_{xy} = \sum_{t=0}^\infty v^{t+1} \cdot {}_t q_{xy}$ $E[v^{T(\overline{xy})}] = \bar{A}_{xy} = \int_0^\infty v^t \cdot {}_tp_{xy} \cdot \mu_{xy} dt$	$A_{\overline{xy}} = A_x + A_y - A_{xy}$ $\bar{A}_{\overline{xy}} = \bar{A}_x + \bar{A}_y - \bar{A}_{xy}$
	$\ddot{a}_{xy} = \sum_{t=0}^\infty v^t \cdot {}_tp_{xy} = \frac{1 - A_{xy}}{d}$ $\bar{a}_{xy} = \int_0^\infty v^t \cdot {}_tp_{xy} dt = \frac{1 - \bar{A}_{xy}}{\delta}$	$\ddot{a}_{\overline{xy}} = \ddot{a}_x + \ddot{a}_y - \ddot{a}_{xy}$ $\bar{a}_{\overline{xy}} = \bar{a}_x + \bar{a}_y - \bar{a}_{xy}$

	$\text{Cov}\left[v^{T(xy)}, v^{T(\overline{xy})}\right] = \overline{A}_x \cdot \overline{A}_y - \overline{A}_{xy} \cdot \overline{A}_{\overline{xy}}$
--	---

● 特殊假设下的估值

ComPertz假设: $\mu_{w+t} = \mu_{xy}(t) \Rightarrow BC^{w+t} = BC^{x+t} + BC^{y+t} \Rightarrow C^w = C^x + C^y$

$$C^{x+t} = C^x + C^{x+n} \Rightarrow t = \frac{\log(1 + C^n)}{\log C}$$

Makeham假设: $\mu_{ww} = \mu_{xy}(t) \Rightarrow 2C^w = C^x + C^y$

$$2C^{x+t} = C^x + C^{x+n} \Rightarrow t = \frac{\log(1 + C^n) - \log 2}{\log C}$$

● UDD假设下的联合生命函数

UDD假设下, ${}_t p_x \cdot \mu_{x+t} = q_x \Rightarrow {}_t p_{xy} \cdot \mu_{xy} = {}_t p_x \cdot {}_t p_y (u_{x+t} + u_{y+t}) = {}_t p_x \cdot q_y + {}_t p_y \cdot q_x = (1-t \cdot q_x)q_y + (1-t \cdot q_y)q_x$

在T(xy)的UDD假设下: $\overline{A}_{xy} = \frac{i}{\delta} A_{xy}, \overline{a}_{xy} = \frac{1 - \overline{A}_{xy}}{\delta} \approx \frac{1 - \frac{i}{\delta} A_{xy}}{\delta}$

在T(x)和T(y)的UDD假设下: $A_{xy}^{(m)} \approx \frac{i}{i^{(m)}} A_{xy}$ 在T(xy)的UDD假设下: $A_{xy}^{(m)} = \frac{i}{i^{(m)}} A_{xy}$

● 考虑死亡顺序的生存模型

$$P\{x \text{ 在 } y \text{ 之前并且在 } n \text{ 年内死亡}\} = {}_n q_{xy}^1 = \int_0^n {}_t p_{xy} \cdot \mu_{x+t} dt$$

$$P\{x \text{ 在 } y \text{ 之后并且在 } n \text{ 年内死亡}\} = {}_n q_{xy}^2 = {}_n q_x - {}_n q_{xy}^1 = \int_0^n {}_t p_x \cdot \mu_{x+t} \cdot (1 - {}_t p_y) dt$$

$$A_{xy}^1 = \int_0^\infty v^t \cdot {}_t p_{xy} \cdot \mu_{x+t} dt$$

多元风险模型

T(x)为(x)的未来寿命随机变量, 其密度函数为 $g(t) = \sum_{j=1}^m f(t, j) = {}_t p_x^{(\tau)} \cdot \mu_{x+t}^{(\tau)}$

J(x)为(x)的死亡原因, $P\{J=j\} = h(j) = \int_0^\infty f(t, j) dt = {}_\infty q_x^{(j)}$

$$f(t, j) = {}_t p_x^{(\tau)} \cdot \mu_{x+t}^{(j)} \quad \mu_{x+t}^{(\tau)} = \sum_j \mu_{x+t}^{(j)} \quad \mu_{x+t}^{(j)} = \frac{\partial {}_t q_x^{(j)}}{\partial {}_t p_x^{(\tau)}} = - \frac{\partial {}_t p_x^{(j)}}{\partial {}_t p_x^{(\tau)}} \quad {}_t p_x^{(j)} = \exp\left(-\int_0^t \mu_{x+s}^{(j)} ds\right)$$

$${}_t p_x^{(\tau)} = 1 - {}_t q_x^{(\tau)} = 1 - \sum_j {}_t p_x^{(j)} = \prod_j {}_t p_x^{(j)} \quad {}_t q_x^{(j)} = \int_0^t {}_s p_x^{(\tau)} \cdot \mu_{x+s}^{(j)} ds \leq {}_t q_x^{(j)} = 1 - {}_t p_x^{(j)} = \int_0^t {}_s p_x^{(j)} \cdot \mu_{x+s}^{(j)} ds$$

$$\text{常值死力假设: } \frac{\mu_x^{(j)}}{\mu_x^{(\tau)}} = \frac{q_x^{(j)}}{q_x^{(\tau)}} \Rightarrow q_x^{(j)} = \frac{\log p_x'^{(j)}}{\log p_x^{(\tau)}} \cdot q_x^{(\tau)} \quad p_x'^{(j)} = \left(p_x^{(\tau)}\right)^{\frac{q_x^{(j)}}{q_x^{(\tau)}}}$$

$$\text{均匀分布假设: } {}_t p_x^{(\tau)} \cdot \mu_{x+t}^{(j)} = q_x^{(j)}, {}_t p_x^{(\tau)} \cdot \mu_{x+t}^{(\tau)} = q_x^{(\tau)}, {}_t p_x^{(\tau)} = t \cdot q_x^{(\tau)}$$

$$q_x'^{(j)} = 1 - \left[1 - q_x^{(\tau)}\right]^{\frac{q_x^{(j)}}{q_x^{(\tau)}}}, q_x^{(j)} = \frac{\log p_x'^{(j)}}{\log p_x^{(\tau)}} \cdot q_x^{(\tau)}$$

生存模型及其性质

1. $T(x)$ 为个体(x)的未来寿命随机变量或个体(x)生存至死亡的时间随机变量, $T(x)$ 的分布函数

为: $P[T(x) \leq t] = {}_tq_x$; $T(x)$ 的概率密度函数为: ${}_tp_x \cdot \mu_{x+t}$

$$\int_0^{\infty} {}_tp_x \cdot \mu_{x+t} dt = 1 \quad \int_n^{n+m} {}_tp_x \cdot \mu_{x+t} dt = {}_n|m q_x$$

$$\int_0^r {}_tp_x \cdot \mu_{x+t} dt = {}_rq_x \quad \int_r^{\infty} {}_tp_x \cdot \mu_{x+t} dt = {}_rp_x$$

2. 记 $K(x)$ 为(x)的未来寿命的整数随机变量, 则:

$$P\{K(x)=k\} = P[k < T(x) \leq k+1] = {}_k|q_x$$

$$3. \mu_x = -\frac{\frac{d}{dx}S(x)}{S(x)} = -\frac{\frac{d}{dx}l_x}{l_x}, \quad {}_np_x = e^{-\int_x^{x+n} \mu_y dy}, \quad S(x) = e^{-\int_0^x \mu_y dy}$$

$$4. E(T) = \int_0^{\infty} t \cdot {}_tp_x \cdot \mu_{x+t} dt = \int_0^{\infty} {}_tp_x dt = {}^{\circ}e_x = \frac{T_x}{l_x}, {}^{\circ}e_x \text{ 为 } x \text{ 岁的人的完全平均余命。}$$

$$\text{Var}(T) = 2 \int_0^{\infty} t \cdot {}_tp_x dt - \left({}^{\circ}e_x\right)^2 = \frac{2 \cdot Y_x}{l_x} - \left(\frac{T_x}{l_x}\right)^2$$

$$5. E[K] = \sum_{t=0}^{\omega-x-2} t \cdot {}_t|q_x = \sum_{t=0}^{\omega-x-2} {}_{t+1}p_x = e_x = \frac{T_x^*}{l_x}, \quad e_x \text{ 为 } x \text{ 岁的人未来寿命随机变量的期望取整}$$

余命。

$$\text{Var}[K] = \sum_{t=0}^{\omega-x-2} (2t+1) \cdot {}_{t+1}p_x - (e_x)^2$$

6. $\alpha(x)$ 为在 x 岁和 $x+1$ 岁之间死亡的人的平均生存时间

$$\alpha(x) = \frac{L_x - l_{x+1}}{d_x} = \frac{\int_0^1 t \cdot l_{x+t} \mu_{x+t} dt}{\int_0^1 l_{x+t} \mu_{x+t} dt}$$

l_x 个现年 x 岁的人, 在 x 和 $x+1$ 岁之间总存活的年数为:

$$L_x = \int_0^1 l_{x+t} dt \quad {}_nL_x = \int_0^n l_{x+t} dt$$

暴露就是 $L_x = l_{x+1} + \int_0^1 s \cdot l_{x+s} \cdot \mu_{x+s} ds$

l_x 个现年 x 岁的人未来总的存活年数为:

$$T_x = \int_0^{\infty} l_{x+t} dt = \sum_{y=x}^{\infty} L_y, \quad T_x^* = \sum_{y=x+1}^{\infty} l_y, \quad Y_x = \int_x^{\infty} T_y dy$$

$$7. \text{在区间 } (x, x+1) \text{ 上的中心死亡率 } {}_n m_x = \frac{\int_0^n S(x+s) \mu_{x+s} ds}{\int_0^n S(x+s) ds} = \frac{\int_0^n l_{x+s} \mu_{x+s} ds}{\int_0^n l_{x+s} ds} = \frac{{}_n d_x}{{}_n L_x}$$

$$f_x = \frac{L_x - l_{x+1}}{d_x}$$

$$m_x = \frac{d_x}{L_x} = \frac{d_x}{l_x - (1-f_x) \cdot d_x} = \frac{q_x}{1 - (1-f_x) \cdot q_x}$$

$$q_x = \frac{d_x}{l_x} = \frac{d_x}{L_x + (1-f_x) \cdot d_x} = \frac{m_x}{1 + (1-f_x) \cdot m_x}$$

$${}_n f_x = \frac{{}_n L_x - n \cdot l_{x+n}}{{}_n \cdot {}_n d_x}$$

$${}_n m_x = \frac{{}_n d_x}{{}_n L_x} = \frac{{}_n d_x}{n \cdot l_x - n \cdot (1 - {}_n f_x) \cdot {}_n d_x} = \frac{{}_n q_x}{n(1 - (1 - {}_n f_x) \cdot {}_n q_x)}$$

$${}_n q_x = \frac{{}_n d_x}{l_x} = \frac{{}_n d_x}{\frac{1}{n}({}_n L_x + n \cdot (1 - {}_n f_x) \cdot {}_n d_x)} = \frac{{}_n m_x}{\frac{1}{n}(1 + n(1 - {}_n f_x) \cdot {}_n m_x)}$$

8. 死力的若干解析形式

① De-Moivre 形式:

$$\mu_x = \frac{1}{\omega - x}, 0 \leq x \leq \omega, \quad S(x) = \frac{\omega - x}{\omega}, \quad T(x) \text{ 的密度函数 } {}_t p_x \cdot \mu_x = \frac{1}{\omega - x}$$

② Compertz 形式:

$$\mu_x = BC^x, B > 0, C \geq 1 \quad S(x) = e^{-\frac{B}{\log C}(C^x - 1)}, \text{ 当 } C=1 \text{ 时 } \mu_x = B, \text{ 即常值死力假设}$$

③ Makeham 形式:

$$\mu_x = A + BC^x, B > 0, C \geq 1 \quad S(x) = e^{-Ax - \frac{B}{\log C}(C^x - 1)}, \text{ 当 } A=0 \text{ 时 Makeham} = \text{Gompertz}$$

④ Weibull 形式:

$$\mu_x = k \cdot x^n, k > 0, n > 0 \quad S(x) = e^{-\frac{k \cdot x^{n+1}}{n+1}}$$

9.关于尾龄的若干假设

函数	死亡均匀分布假设（线性）	常值死力假设（指数）	Balducci 假设（双曲线）
l_{x+t}	$l_x - t \cdot d_x = (1-t)l_x + t \cdot l_{x+1}$	$l_x (p_x)^t = l_x e^{-\mu \cdot t} = (l_x)^{1-t} (l_{x+1})^t$	$\left(t \cdot \frac{1}{l_{x+1}} + (1-t) \frac{1}{l_x} \right)^{-1}$
${}_t p_x$	$1 - t \cdot q_x$	$(p_x)^t = e^{-\mu \cdot t}$	$\frac{p_x}{p_x + t(1-p_x)} = \frac{q_x}{1-(1-t)q_x}$
${}_t q_x$	$t \cdot q_x$	$1 - (1-q_x)^t$	$\frac{t \cdot q_x}{1-(1-t)q_x}$
${}_{1-t} p_{x+t}$	$\frac{p_x}{1-tq_x}$	$(p_x)^{1-t} = e^{-\mu \cdot (1-t)}$	$p_x + t(1-p_x) = 1 - (1-t) \cdot q_x$
${}_{1-t} q_{x+t}$	$\frac{(1-t)q_x}{1-tq_x}$	$1 - (1-q_x)^{1-t}$	$(1-t) \cdot q_x$
μ_{x+t}	$\frac{q_x}{1-t \cdot q_x}$	$\mu = -\ln p_x$	$\frac{q_x}{1-(1-t) \cdot q_x}$
${}_t p_x \cdot \mu_{x+t}$	q_x	$\mu \cdot e^{-\mu t}$	$\frac{p_x \cdot q_x}{[1-(1-t) \cdot q_x]^2}$
L_x	$l_x - \frac{1}{2} d_x = l_{x+1} + \frac{1}{2} d_x$	$\frac{d_x}{\mu}$	$-l_{x+1} \left(\frac{\ln p_x}{q_x} \right)$
m_x	$\frac{q_x}{1 - \frac{1}{2} \cdot q_x}$	μ	$\frac{(q_x)^2}{-p_x \cdot \ln p_x}$

10.随机变量的变换

设连续型随机变量 X 的概率密度函数 $f(x)$ ，当 $a < x < b$ 时， $f_x(x) > 0$ ， $y=g(x)$ 是严格单调的函数，则随机变量 X 的函数 $Y=g(X)$ 的概率密度函数为：

$$f_Y(y) = \begin{cases} f_x(h(y)) \cdot |h'(y)|, & c < y < d \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

其中， $x=h(y)$ 是 $y=g(x)$ 的反函数， $c=\min(g(a),g(b))$, $d=\max(g(a),g(b))$ 。

$$\begin{aligned} F_Y(Y \leq y) &= P(g(X) \leq y) \\ &= P(X \geq h(y)) \\ &= 1 - P(X < h(y)) = S(h(y)) \end{aligned}$$

$$\lambda_Y(y) = \frac{f_Y(y)}{S_Y(y)} = \frac{F'_Y(y)}{1 - S_X(h(y))}$$

关于 $E(g(X))$ 的期望和方差的近似:

$$E(g(X)) \approx g(E(X)) + \frac{1}{2} \cdot g''(E(X)) \cdot \text{Var}(X)$$

$$\text{Var}(g(X)) \approx [g'(E(X))]^2 \cdot \text{Var}(X)$$

对于二元或多元函数, 有类似公式。

$$X = g(X_1, X_2), E(X_1) = m_1, E(X_2) = m_2$$

$$E(X) = E(g(X_1, X_2)) \approx g(m_1, m_2)$$

$$\text{Var}(X) = \text{Var}(g(X_1, X_2))$$

$$\approx [g'_1(m_1, m_2)]^2 \cdot \text{Var}(X_1) + [g'_2(m_1, m_2)]^2 \cdot \text{Var}(X_2) + 2 \cdot g'_1(m_1, m_2) \cdot g'_2(m_1, m_2) \cdot \text{Cov}(X_1, X_2)$$

11. 经验生存分布

$$\hat{S}(t) = \begin{cases} 1 & t < t_1 \\ \frac{n-i}{n} & t_i \leq t < t_{i+1} \\ 0 & t \geq t_n \end{cases}$$

$$\hat{S}(t) = \frac{\text{时间}t\text{时的生存人数}}{n} = \frac{N_t}{n}$$

生存模型的估计

1.当样本数很大时的生存模型估计

随机变量 $D_0, D_1, D_2, \dots, D_{k-1}$ 服从联合多项分布，具体如下：

$$P(d_0, d_1, \dots, d_{k-1}) = \frac{n!}{d_0! d_1! \dots d_{k-1}!} \prod_{t=0}^{k-1} \left({}_tq_0 \right)^{d_t}$$

$$E(D_t) = n \cdot {}_tq_0 \quad \text{Var}(D_t) = n \cdot {}_tq_0 \cdot (1 - {}_tq_0)$$

$$\text{Cov}(D_m, D_n) = -n \cdot {}_mq_0 \cdot {}_nq_0$$

$$\text{Cov}(\hat{S}(t), \hat{S}(r)) = -\frac{1}{n} (1 - S(r))(1 - S(t))$$

$$\text{Cov}\left({}_t\hat{q}_0, {}_r\hat{q}_0\right) = -\frac{1}{n} \cdot {}_tq_0 \cdot {}_r q_0$$

$$E(D_t | N_t = n_t) = n_t \cdot q_t \quad \text{Var}(D_t | N_t = n_t) = n_t \cdot q_t \cdot p_t$$

$$\text{Var}(\hat{m}_t) = \left(\frac{1}{E(\hat{p}_t)} \right)^2 \cdot \text{Var}(\hat{p}_t)$$

$$N_{t+1} = N_t - D_t$$

被估计的函数	估计量	条件的或非条件的	有偏或无偏	方差
${}_tq_0$	$\frac{D_t}{n}$	非条件的	无偏	$\frac{{}_tq_0 \cdot (1 - {}_tq_0)}{n}$ （精确值）
$S(t)$	$\frac{N_t}{n}$	非条件的	无偏	$\frac{S(t) \cdot F(t)}{n}$ （精确值）
p_t	$\frac{N_{t+1}}{n}$	以 n_t 为条件	无偏	$\frac{p_t q_t}{n_t}$ （精确值）
q_t	$\frac{D_t}{n_t}$	以 n_t 为条件	无偏	$\frac{p_t q_t}{n_t}$ （精确值）
$\lambda(t^*)$	$-\ln\left(\frac{N_{t+1}}{n_t}\right)$	以 n_t 为条件	有偏	$\frac{q_t}{p_t \cdot n_t}$ （估计量）
密 度 函 数 $f(t^*)$	${}_t\hat{q}_0 = \frac{D_t}{n}$	非条件的	无偏 （在估计范围内）	$\frac{{}_tq_0 \cdot (1 - {}_tq_0)}{n}$

				(精确值在估计范围内)
--	--	--	--	-------------

2.单风险情况下表格生存模型的矩估计

	假设	估计量	性质	方差
一般情况下	$s_i - r_i \mathbf{q}_{x+r_i} \approx (s_i - r_i) \mathbf{q}_x$	$\hat{\mathbf{q}}_x = \frac{d_x}{\sum_{i=1}^{n_x} (s_i - r_i)}$	无偏	$\frac{\sum_{i=1}^{n_x} s_i - r_i \mathbf{q}_{x+r_i} (1 - s_i - r_i \mathbf{q}_{x+r_i})}{\left[\sum_{i=1}^{n_x} (s_i - r_i) \right]^2} \approx \frac{p_x \cdot \mathbf{q}_x}{\sum_{i=1}^{n_x} (s_i - r_i)}$
特例 A		$\hat{\mathbf{q}}_x = \frac{d_x}{n_x}$	无偏	$\frac{p_x \cdot \mathbf{q}_x}{n_x}$
特例 B	$1 - r_i \mathbf{q}_{x+r_i} \approx (1 - r_i) \mathbf{q}_x$	$\hat{\mathbf{q}}_x = \frac{d_x}{\sum_{i=1}^{n_x} (1 - r_i)}$	无偏	$\frac{\sum_{i=1}^{n_x} 1 - r_i \mathbf{q}_{x+r_i} (1 - 1 - r_i \mathbf{q}_{x+r_i})}{\left[\sum_{i=1}^{n_x} (1 - r_i) \right]^2} \approx \frac{p_x \cdot \mathbf{q}_x}{\sum_{i=1}^{n_x} (1 - r_i)}$
特例 C	线性假设 $s_i \mathbf{q}_x \approx s_i \cdot \mathbf{q}_x$	$\hat{\mathbf{q}}_x = \frac{d_x}{\sum_{i=1}^{n_x} s_i}$	无偏	$\frac{\sum_{i=1}^{n_x} s_i \mathbf{q}_x (1 - s_i \mathbf{q}_x)}{\left(\sum_{i=1}^{n_x} s_i \right)^2} \approx \frac{p_x \cdot \mathbf{q}_x}{\sum_{i=1}^{n_x} s_i}$
分组特例 B	$1 - r \mathbf{q}_{x+r} = (1 - r) \cdot \mathbf{q}_x$ b_x 为 n_x 的子集, 且有 $r_i = 0$ 。 $k_x = n_x - b_x$, 该部分对象有 $0 < r_i < 1$, r_i 的平均值为 r	$\hat{\mathbf{q}}_x = \frac{d_x}{b_x + (1 - r)k_x}$	无偏	$\frac{p_x \cdot \mathbf{q}_x}{b_x + (1 - r)k_x}$
分组特例 C	$s \mathbf{q}_x = s \cdot \mathbf{q}_x$ c_x 表示 n_x 中在 $s_i < 1$ 退出的观察对象, s_i 的平均值为 s	$\hat{\mathbf{q}}_x = \frac{d_x}{n_x - (1 - s)c_x}$	无偏	$\frac{p_x \cdot \mathbf{q}_x}{n_x - (1 - s)c_x}$

	假设	估计量	性质
特例 C 另一种估计	$a = \frac{d'_x}{d_x^c}$, a 作为一个输入参数由其他数据引出或依靠假设。对 a 的假设起到了分布假设的作用	$\hat{q}_x = \frac{b - \sqrt{b^2 - 4a \cdot n_x \cdot d_x}}{2a \cdot n_x}$, 其中 $b = n_x - (1-a)e_x + a \cdot d_x$ e_x 是样本中实际终止者数目, d'_x 是 c_x 中观察到的死亡数, d_x^c 是 c_x 中全部的死亡数, c_x 为 n_x 中在计划 $x+s$ 年龄退出数目	极大似然估计

3. 双风险情况下表格生存模型的矩估计

均匀分布建设下特例 A	$\hat{q}_x'^d = \frac{b - \sqrt{b^2 - 2n_x \cdot d_x}}{n_x}$, 其中 $b = n_x - \frac{1}{2}w_x + \frac{1}{2}d_x$
常数死力假设下特例 A	$\hat{q}_x'^d = 1 - \left(\frac{n_x - d_x - w_x}{n_x} \right)^{\frac{d_x}{d_x + w_x}} = 1 - e^{-\hat{\mu}^{(d)}}, \hat{\mu}^{(d)} = -\ln \left(\frac{n_x - d_x - w_x}{n_x} \right)^{\frac{d_x}{d_x + w_x}}$
Hoem 法	$\hat{q}_x'^d = \frac{d_x}{\text{Hoem 暴露数}}$ 如果死亡在 t_i 之前发生, 暴露数为 $(s_i - r_i)$; 如果第 i 个观察对象生存到 $x+s_i$, 暴露数为 $(s_i - r_i)$; 如果在 $x+t_i$ 退出, 暴露数为 $(t_i - r_i)$
精算法	$\hat{q}_x'^d = \frac{d_x}{\text{精算法下的暴露数}} = \frac{d_x}{(1-r)n_x - (1-s)e_x - (1-t)w_x}$ 如果存活的第 i 个观察对象在 $x+s_i$ 处退出, 暴露数为 $(s_i - r_i)$; 如果存活的第 i 个观察对象在 $x+t_i$ 处退出, $t_i \leq s_i$, 暴露数为 $(t_i - r_i)$; 如果死亡的观察对象为 $s_i \leq 1$, 暴露数为 $(1-r_i)$

$\hat{S}(x) = \hat{p}_0 \cdot \hat{p}_1 \cdots \hat{p}_{x-1}$, n'_i 为计算 \hat{q}_i 的暴露数。

$E(\hat{S}(x) | \{n'_i\}) = p_0 \cdot p_1 \cdots p_{x-1} = S(x)$,

$\text{Var}(\hat{S}(x) | \{n'_i\}) = S^2(x) \left[\prod_{i=0}^{x-1} \left(\frac{q_i}{p_i \cdot n'_i} + 1 \right) - 1 \right] \approx S^2(x) \sum_{i=0}^{x-1} \frac{q_i}{p_i \cdot n'_i}$, 此近似等式为 Greenwood 公式, 其低估了方差的真实值

4.单风险情况下表格生存模型的极大似然估计

类别		假设	似然函数	估计量
部分数据 特例 A			$L(q_x n_x, d_x) = C_{n_x}^{d_x} \cdot (q_x)^{d_x} \cdot (1 - q_x)^{n_x - d_x}$ $L = q^d \cdot (1 - q)^{n-d}$	$\hat{q}_x = \frac{d_x}{n_x}$
完全数据 特例 A	线性		$L = (1 - q_x)^{n_x - d_x} \cdot \prod_{i=1}^{d_x} p_x \cdot \mu_{x+s_i}$	$\hat{q}_x = \frac{d_x}{n_x}$
	指数		$L = (p_x)^{n_x - d_x} \cdot \prod_{i=1}^{d_x} (p_x)^{s_i} \cdot \mu$	$\hat{\mu} = \frac{d_x}{(n_x - d_x) + \sum_{i=1}^{d_x} s_i}, \hat{q}_x = 1 - e^{-\hat{\mu}}$
完全数据 (一般)	指数		$L = \mu^{d_x} \prod_{i=1}^{n_x} e^{-(t_i - r_i)\mu}$	$\hat{\mu} = \frac{d_x}{\sum_{i=1}^{n_x} (t_i - r_i)} = \frac{d_x}{\text{样本的精确暴露数}}$
完全数据	特例 A	均匀分布	$L = (q_x)^{d_x} \cdot \prod_{i=1}^{n_x} (1 - r_i \cdot q_x)^{-1} \cdot \prod_{\phi \& \varepsilon} (1 - t_i \cdot q_x)$	$\hat{q}_x = \frac{d_x}{n_x}$
	特例 B	均匀分布	$\frac{\partial \ln L}{\partial q_x} = \frac{d_x}{q_x} + \sum_{i=1}^{n_x} \frac{r_i}{1 - r_i \cdot q_x} - \sum_{\phi \& \varepsilon} \frac{t_i}{1 - t_i \cdot q_x} = 0$	$\hat{q}_x = \frac{b - \sqrt{b^2 - 4r(n_x - k_x)d_x}}{2r(n_x - k_x)}, b = n_x - rk_x + rd_x$ <p>k_x 表示在特例B情况下, 在 $x + r_i$ 时进入观察的对象个数, 假设所有的 $r_i = r$</p>
	特例 C	均匀分布	<p>$\phi \& \varepsilon$ 表示生存者和生存的终止者的集合, 或非死亡的观察对象的集合</p>	$\hat{q}_x = \frac{b - \sqrt{b^2 - 4s \cdot n_x \cdot d_x}}{2s \cdot n_x}, b = n_x - (1 - s)e_x + s \cdot d_x,$ <p>假设所有的预计退出者的年龄都为 $x + s_i$, 对于 e_x 个观察退出对象, 有 $t_i = s$, 对于 $n_x - e_x - d_x$ 个生存者有 $t_i = 1$</p>

部分数据 特例 C	均匀分布	$L=(q_x)^d \cdot (1-q_x)^{n-e-d} \cdot (1-s q_x)^e$	$\hat{q}_x = \frac{b - \sqrt{b^2 - 4s \cdot n_x \cdot d_x}}{2s \cdot n_x}, b = n_x - (1-s)e_x + s \cdot d_x,$ 假设所有的预计退出者的年龄都为 $x+s_i$, 对于 e_x 个观察退出对象, 有 $t_i = s$, 对于 $n_x - e_x - d_x$ 个生存者有 $t_i = 1$
	指数	$L = (1-p_x)^d \cdot (p_x)^{n-e-d} \cdot (p_x)^{s \cdot e}$	$\hat{q}_x = \frac{d_x}{n_x - (1-s)e_x}$

5.双风险情况下表格生存模型的极大似然估计

类别	假设	似然函数	估计量
完全数据	指数	一般形式: $L = \prod_{i=1}^{n_x} p_{x+r_i}^{\tau_i} \cdot \prod_D \mu_{x+t_i}^{(d)} \cdot \prod_W \mu_{x+t_i}^{(w)}$ $= \prod_{i=1}^{n_x} p_{x+r_i}'^{(d)} \cdot \prod_{i=1}^{n_x} p_{x+r_i}'^{(w)} \cdot \left(\mu_{x+t_i}^{(d)}\right)^{\delta_i} \cdot \left(\mu_{x+t_i}^{(w)}\right)^{\theta_i}$	$\hat{\mu}^{(d)} = \frac{d_x}{\sum_{i=1}^{n_x} (t_i - r_i)}$
	均匀分布	假设死亡与退出相互独立: $L = \prod_{i=1}^{n_x} p_{x+r_i}'^{(d)} \cdot \left(\mu_{x+t_i}^{(d)}\right)^{\delta_i}$	极大化 $\frac{d_x}{q_x} + \sum_{i=1}^{n_x} \frac{r_i}{1-r_i \cdot q_x} - \sum_D \frac{t_i}{1-t_i \cdot q_x} = 0$ \bar{D} 表示没有死亡的观察对象。在特例A时, 所有 $r_i = 0$, 对所有的终止者有 $t_i = 1$, 对所有的退出者有 $t_i = t$, 此时上式可化为二次方程。
部分数据 特例 A	指数	$L = \left(q_x^{(d)}\right)^{d_x} \cdot \left(q_x^{(w)}\right)^{w_x} \cdot \left(1 - q_x^{(d)} - q_x^{(w)}\right)^{n - d_x - w_x}$	$\hat{\mu}^{(d)} = -\ln \left(\frac{n_x - d_x - w_x}{n_x} \right)^{\frac{d_x}{d_x + w_x}}, \hat{q}_x'^{(d)} = 1 - e^{-\mu^{(d)}}$
	均匀分布		$\hat{q}_x'^{(d)} = \frac{b - \sqrt{b^2 - 2n_x d_x}}{n_x}, b = n_x - \frac{1}{2}w_x + \frac{1}{2}d_x$

6.乘积估计量

在 $(x, x+1]$ 区间上按加入者和退出者为分界点，将 $(x, x+1]$ 分成 m 个小区间，每个小区间都符合特例 A，第 i 个区间 $\hat{q}_i = \frac{d_i}{n_i}, \hat{q}_x = 1 - \prod_{i=1}^m (1 - \hat{q}_i) = 1 - \prod_{i=1}^m \frac{n_i - d_i}{n_i}$ 。如果死亡和进入、结束发生于同一时间，将与加入或结束同时发生的死亡事件认定是发生在子区间的终点。

区间划分也可以死亡的相邻时间来划分，设 r_j 为死亡发生前样本中的样本容量，第 j 个

子区间的死亡概率为 $\hat{q}_j = \frac{1}{r_j}$ ， $\hat{q}_x = 1 - \prod_{j=1}^m (1 - \hat{q}_j) = 1 - \prod_{j=1}^m \frac{r_j - 1}{r_j}$ 。如果死亡与进入或结束

发生在同一年龄，将死亡视为发生在进入或结束之前。死亡者属于风险集合，同一时间的进入者不属于该风险集合，而同一时间的结束者仍然在该风险集合内。

乘积估计量是无偏的和一致的。

$$\text{Var}(\hat{p}_x | \{n_i\}) = (p_x)^2 \cdot \left[\prod_{i=1}^m \left(\frac{q_i}{p_i \cdot n_i} + 1 \right) - 1 \right]$$

与之对应的Greenwood公式为： $\text{Var}(\hat{q}_x | \{n_i\}) = \text{Var}(\hat{p}_x | \{n_i\}) \approx (p_x)^2 \cdot \sum_{i=1}^m \frac{q_i}{p_i \cdot n_i}$

7.Nelson-Aalen 估计量

$$\hat{\Lambda}(t) = -\sum_{j=1}^m \ln \left(1 - \frac{d_j}{r_j} \right) \approx \sum_{j=1}^m \frac{d_j}{r_j}, S(t) = e^{-\Lambda(t)} = e^{-\sum_{j=1}^m \frac{d_j}{r_j}}, t_m \leq t \leq t_{m+1}$$

特殊情况下，在每一个死亡点上只有一个死亡事件，此时 $r_j = n - j + 1$

$$\hat{\Lambda}(t) = \sum_{j=1}^m \frac{1}{r_j} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n-1} + \cdots + \frac{1}{n-m+1}, t_m \leq t \leq t_{m+1}$$

参数生存模型的估计

1. 不分组情况下完整数据下的单变量模型

- ① 矩估计法与分位数法
- ② 极大似然估计法
- ③ 最小二乘估计

$$SS = \sum_{i=1}^n \left[S(t_i) - \hat{S}(t_i) \right]^2 \quad \text{或} \quad SS = \sum_{i=1}^n \left\{ S(t_i) - \frac{1}{2} \left[\hat{S}(t_i) + \hat{S}(t_{i-1}) \right] \right\}^2$$

使其偏差平方和最小的参数就是所求。

2. 分组情况下完整数据下的单变量模型

$$\textcircled{1} \quad L_i = \prod_{i=0}^{k-1} [S(i) - S(i+1)]^{d_i}$$

- ② $S(i)$ 是含有未知参数的生存模型，求似然函数 L 的最大值求得未知参数的估计
- 最小二乘估计

$$SS = \prod_{i=0}^{k-1} \left\{ n[S(i) - S(i+1)] - d_i \right\}^2$$

$$SS = \prod_{i=0}^{k-1} \left[\lambda\left(i + \frac{1}{2}\right) - \lambda\left(i + \frac{1}{2}\right) \right]^2$$

3. 不完整数据下单变量模型的极大似然估计

- 似然函数：
$$L = S(r)^{n-d} \prod_{i=1}^d f(t_i),$$

r 为停止观察时间， n 为 $t=0$ 时的样本， d 为观察到的死亡次数。

- $$L = \prod_D \frac{S(t_i) \lambda(t_i)}{S(r_i)} \cdot \prod_D \frac{S(t_i)}{S(r_i)} = \prod_{i=1}^n \frac{S(t_i) [\lambda(t_i)]^{\delta_i}}{S(r_i)}$$

- 在考虑随机离开的情况下，并假定随机离开与死亡相互独立，则有似然函数：

$$\begin{aligned} L &= \prod_D \prod_{t_i-r_i} p_{r_i}^{\tau_i} \cdot \mu_{t_i}^d \cdot \prod_W \prod_{t_i-r_i} p_{r_i}^{\tau_i} \cdot \mu_{t_i}^w \cdot \prod_{\xi} \prod_{t_i-r_i} p_{r_i}^{\tau_i} \\ &= \prod_{i=1}^n \prod_{t_i-r_i} p_{r_i}^{\tau_i} \cdot \prod_D \mu_{t_i}^d \cdot \prod_W \mu_{t_i}^w \\ &= \prod_{i=1}^n \frac{S_d(t_i) S_w(t_i) [\lambda_d(t_i)]^{\delta_i} [\lambda_w(t_i)]^{\gamma_i}}{S_d(r_i) S_w(r_i)} \end{aligned}$$

4. 不完整数据下单变量模型的最小二乘估计

① 对于 Gompertz 模型, $\mu_x = B \cdot C^x$, 经变换为: $\ln \mu_x = \ln B + x \cdot \ln C = \alpha + \beta \cdot x$

$$SS = \sum_{x=a}^b w_x \left[\alpha + \beta \left(x + \frac{1}{2} \right) - \ln \mu_{x+\frac{1}{2}} \right]^2, \text{ 其中 } w_x \text{ 表示权重, } \mu_{x+\frac{1}{2}} \text{ 由样本数据计算得来。}$$

② 对于 Weibull 模型, $\mu_x = k \cdot x^n$, 经变换为: $\ln \mu_x = \ln k + n \cdot \ln x = \alpha + \beta \cdot \ln x$

$$SS = \sum_{x=a}^b w_x \left[\alpha + \beta \ln \left(x + \frac{1}{2} \right) - \ln \mu_{x+\frac{1}{2}} \right]^2$$

5. 参数模型的假设检验

① 分组死亡时间

$$\text{检验统计量 } \chi^2 = \sum_{i=1}^{k-1} \frac{(\hat{E}_i - d_i)^2}{\hat{E}_i},$$

其中 $\hat{E}_i = n \cdot [\hat{S}(i) - \hat{S}(i+1)]$, $\chi^2 \sim \chi^2(k-1-r)$, r 为未知参数的个数。

② 精确死亡时间

● Kolmogorov-Smirnov (K-S) 统计量: $D_n = \max_t |\hat{S}(t) - \dot{S}(t)|$, $Y = \sqrt{n} \cdot D_n$

$$\text{当 } n \rightarrow \infty, \Pr(Y > y) = 2 \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^{j+1} e^{-2j^2 y^2}$$

● 检验统计量:

$$\begin{aligned} A^2 &= \int_0^{+\infty} \frac{n}{S(t)F(t)} \cdot [\dot{S}(t) - \hat{S}(t)]^2 \cdot f(t) dt \\ &= -n - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (2i-1) \left\{ \ln [\hat{F}(t_i) \cdot \hat{S}(t_{n-i+1})] \right\} \end{aligned}$$

6. 一般多变量模型

$$\text{似然函数: } L = \prod_{i=1}^n [\lambda(t_i, z_i)]^{\delta_i} \frac{S(t_i, z_i)}{S(r_i, z_i)}$$

① 和模型

时刻 t 由第 j 个伴随变量引起的额外危险率 $\lambda(t, z_j) = h_j(t) \cdot g_j(z_j)$, 总危险率是基本危

险率与额外危险率的和: $\lambda(t, z) = \lambda(t) + \sum_{j=1}^s h_j(t) \cdot g_j(z_j)$ 。

令 $g_j(z_j) = z_j$, $h_j(t) = a_j$, 则 $\begin{cases} \lambda(t, z_j) = a_j \cdot z_j \\ a(t, z_j) = \lambda(t) + \sum_{j=0}^s a_j \cdot z_j \end{cases}$ 。若基本危险率 $\lambda(t)$ 为常数

a_0 , $z_0 = 1$, 则 $\lambda(t, z) = \sum_{j=0}^s a_j \cdot z_j = a' \cdot Z$, 其中 $a' \cdot z_i$ 为常数。此模型又称为线性指数模型, 由似然函数:

$$L = \prod_{i=1}^n \left[(a' z_i)^{\delta_i} \cdot e^{-a' z_i (t_i - r_i)} \right]$$

$$\ln L = \sum_{i=1}^n \delta_i \cdot \ln(a' z_i) - \sum_{i=1}^n (t_i - r_i)(a' z_i)$$

$$\text{令 } \frac{\partial \ln L}{\partial a_j} = 0, \text{ 得 } \sum_{i=1}^n \frac{\delta_i \cdot z_{ji}}{a' z_i} - \sum_{i=1}^n (t_i - r_i) z_{ji} = 0$$

大样本数据情况下年龄的处理及暴露数的计算

1. 分组法

◆ 日历年龄分组法: CA (日历年龄) = CYE (事件发生日历年) - CYB (出生的日历年)

◆ 上次生日年龄分组法: CA = 上次生日年 - $CYB + 1/2$

2. 保险年龄

保险年龄 IA = 最接近生日的实际年龄/刚过去的实际生日年龄

VYB (评估出生年) = CYI (保单签订日历年) - IA

CIA (代替了日历保险年) = CYW (离开发生的日历年) - VYB

CD (离开者用日历年限分组) = $CYW - CYI$

3. 会计年龄

计划周年日又称为计划评估日期, 习惯上称为 T 日期

会计年龄 FY = 最接近 T 日期的生日时的实际年龄/上次生日时的实际年龄/实际日历年龄

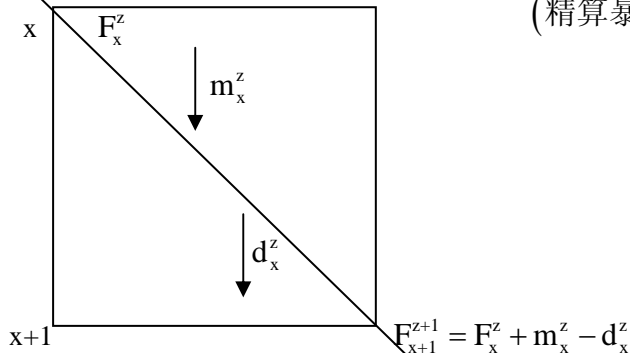
FYB (出生会计年) = Z (考察事件发生年) - FA

4. 表格估值法

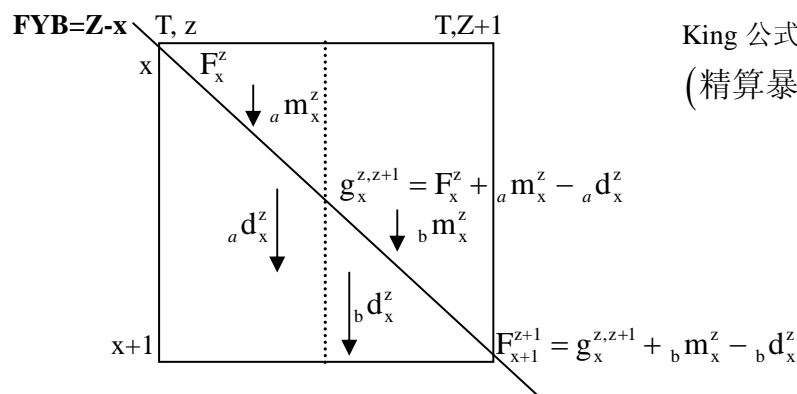
表格估值法仅用于计算精算暴露数, 从而只能得出 q_x 的精算估计, 而不能进行其它类型的矩估计。

★ 会计年龄的表格估值法

$FYB = Z - x$ T, Z $T, Z+1$



$$\begin{aligned} (\text{精算暴露数})_x &= F_x^Z + \frac{1}{2} m_x^Z \\ &= \frac{1}{2} (F_x^Z + F_{x+1}^{Z+1} + d_x^Z) \\ &= \bar{F}_x^Z + \frac{1}{2} d_x^Z \end{aligned}$$



King 公式:

$$\begin{aligned} (\text{精算暴露数})_x &= F_x^z + {}_a m_x^z \\ &= g_x^{z,z+1} + {}_a d_x^z \end{aligned}$$

如果观察期限是 n 个会计年度，则 $[x, x+1]$ 上的精算暴露数为：

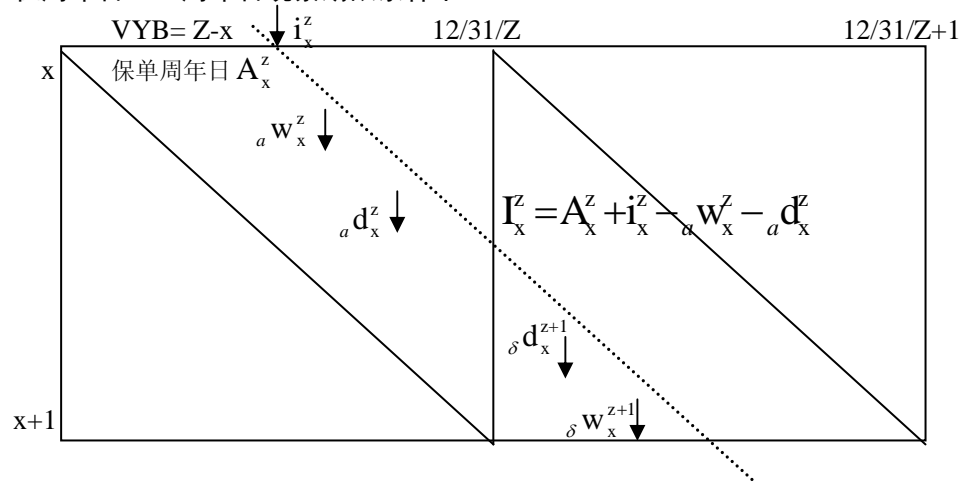
$$\begin{aligned} (\text{精算暴露数})_x &= \sum_{u=z}^{u=z+n-1} \left(\bar{F}_x^u + \frac{1}{2} d_x^u \right) \\ \hat{q}_x &= \frac{\sum_{u=z}^{u=z+n-1} d_x^u}{\sum_{u=z}^{u=z+n-1} \left(\bar{F}_x^u + \frac{1}{2} d_x^u \right)} \end{aligned}$$

对应的 King 公式为：

$$\begin{aligned} (\text{精算暴露数})_x &= \sum_{u=z}^{u=z+n-1} (g_x^{u,u+1} + {}_a d_x^u) \\ \hat{q}_x &= \frac{\sum_{u=z}^{u=z+n-1} ({}_a d_x^u + {}_b d_x^u)}{\sum_{u=z}^{u=z+n-1} (g_x^{u,u+1} + {}_a d_x^u)} \end{aligned}$$

* 保险年龄的表格估值法

在周年日——周年日观察期限条件下



由 Z 的周年日到 Z 年 12 月 31 日称为 α 期，由 Z 年 12 月 31 日到 $Z+1$ 年的周年日称为 δ 期。

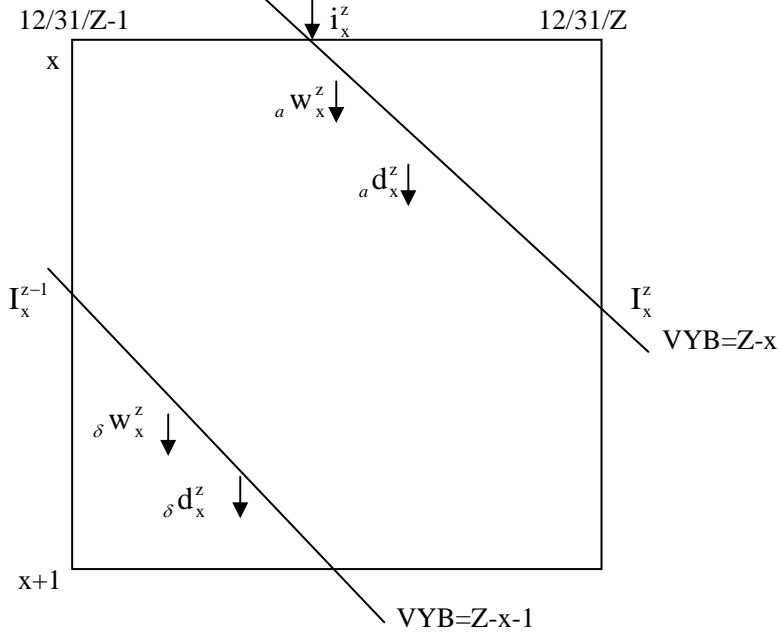
$$(\text{精算暴露数})_x = A_x^z + i_x^z - {}_a w_x^z = I_x^z + {}_a d_x^z$$

观察期为 Z 的周年日到 Z+n 的周年日，对离开者运用日历年龄分组假设，有：

$$(\text{精算暴露数})_x = \sum_{u=x}^{z+n-1} (I_x^u + {}_a d_x^u)$$

$$\hat{q}_x = \frac{\sum_{u=x}^{z+n-1} ({}_a d_x^u + {}_\delta d_x^{u+1})}{\sum_{u=x}^{z+n-1} (I_x^u + {}_a d_x^u)}$$

在日期——日期日观察期限条件下



$$\begin{aligned} (\text{精算暴露数})_x &= A_x^z + i_x^z - {}_a w_x^z - \frac{1}{2} I_x^z + \frac{1}{2} I_x^{z-1} \\ &= \frac{1}{2} (I_x^{z-1} + I_x^z) + {}_a d_x^z \\ &\approx \frac{1}{2} (I_x^{z-1} + I_x^z) + \frac{1}{2} d_x^z \end{aligned}$$

观察期为 Z-1 年 12 月 31 日到 Z+n-1 年 12 月 31 日，对离开者运用日历年龄分组假设，有：

$$\begin{aligned} (\text{精算暴露数})_x &= \sum_{u=x}^{z+n-1} \left[\frac{1}{2} (I_x^{u-1} + I_x^u) + {}_a d_x^u \right] \\ \hat{q}_x &= \frac{\sum_{u=x}^{z+n-1} ({}_a d_x^u + {}_\delta d_x^u)}{\sum_{u=x}^{z+n-1} \left[\frac{1}{2} (I_x^{u-1} + I_x^u) + {}_a d_x^u \right]} \end{aligned}$$

人口数学

1.误差来源和校正

✧ 重复和遗漏

$$\text{终止误差} = \frac{C(t) - P(t)}{C(t)}$$

$C(t)$: 实际人口普查数; $P(t)$: 预期人口普查数

✧ 年龄误报

在年龄段人口分布为线性假设下, 若没有数字偏好或年龄误报, 则有:

$$\frac{{}^b P_i}{\sum_{i=0}^9 {}^b P_i} = \frac{1}{10}$$

$$\text{其中 } {}^b P_i = \frac{i}{10} P_{20+i} + P_{30+i} + \cdots + \frac{10-i}{10} P_{70+i}$$

✧ 抽样误差

总体规模为 N , 抽样比例为 $n:1$, N/n 为整数。调查中有 Y 人回答是肯定的, 那么总体中

有 $X=nY$ 人具有该特征, 且估计 X 的标准误差: $SE_x = \sqrt{(n-1)X\left(1-\frac{X}{N}\right)}$

✧ 总误差比率与净误差比率

$$\text{净误差比率} = \frac{(a+b) - (a+c)}{n} = \frac{b-c}{n}$$

$$\text{总误差比率} = \frac{b+c}{n}$$

所报数目 \ 正确数目	在	不在
应在	a	b
不在	c	d

2.死亡和生育测度

$$\blacksquare \text{粗死亡率 } d_c^z = \frac{D^z}{P(z)} = \frac{\text{日历年 } z \text{ 的死亡人数}}{\text{年平均人口}}$$

$$\blacksquare \text{粗出生率 } b_c^z = \frac{B^z}{P(z)} = \frac{\text{日历年 } z \text{ 成活的新生儿数目}}{\text{年平均人口}}$$

$$\blacksquare \text{人口自然增长率 } r_c^z = b_c^z - d_c^z$$

$$\blacksquare \text{特定年龄死亡率 } {}_z m_x = \frac{{}_n D_x^z}{{}_n P_x^z} = \frac{x \text{ 到 } x+n \text{ 岁之间死亡人数}}{x \text{ 到 } x+n \text{ 岁年中人口数}}$$

■ 婴儿死亡率 $\frac{D_0^z}{B^z}$

调整婴儿死亡率 $\frac{D_0^z(1-\rho_0^z)}{B^z} + \frac{D_0^z \cdot \rho_0^z}{B^{z-1}}$, ρ_0^z 表示 z 年死亡婴儿中 $z-1$ 年出生的比例

■ 直接调节死亡率

$$ADR_D = \frac{\sum_x {}_n P_x^s \cdot {}_n m_x^j}{\sum_x {}_n P_x^s}$$

${}_n P_x^s$ 表示年龄 x 到 $x+n$ 的标准人口数量, ${}_n m_x^j$ 是 j 地区特定年龄死亡率

■ 间接调整死亡率

$$ADR_I = \frac{D^j}{\sum_x {}_n P_x^j \cdot {}_n m_x^s} \cdot \frac{D^s}{P^s}$$

$$SMR = \frac{D^j}{\sum_x {}_n P_x^j \cdot {}_n m_x^s} \text{ 为标准人口死亡比率, } \frac{D^s}{P^s} \text{ 为标准人口粗死亡率}$$

■ 特定年龄生育率: $f_x^z = \frac{B^z}{F_x(z)}$, $F_x(z)$ 是日历年 z 年龄为 x 周岁的年中女性人口

■ $x \sim x+n$ 岁女性人口生育率: ${}_n f_x^z = \frac{B^z}{{}_n F_x(z)}$

■ 日历年 z 的总和生育率: $TFR^z = \sum_{x=\alpha}^{\beta} f_x^z$, α 和 β 分别为最小和最晚生育年龄

■ 特定年龄一性别生育率:

日历年 z , x 岁到 $x+n$ 岁的女性生育女婴的比例为 ${}_n f_x^{f,z} = \frac{B^{f,z}}{{}_n F_x(z)}$

日历年 z , x 岁到 $x+n$ 岁的女性生育男婴的比例为 ${}_n f_x^{m,z} = \frac{B^{m,z}}{{}_n F_x(z)}$

■ 粗再生产率 $GRR = \sum_{x=\alpha}^{\beta} f_x^{f,z} = n \cdot \sum_{x=\alpha}^{\beta} {}_n f_x^{f,z}$

■ 净再生产率 $NRR^z = \sum_{x=\alpha}^{\beta} f_x^{f,z} \cdot {}_x p_0^f = n \cdot \sum_{x=\alpha}^{\beta} {}_n f_x^{f,z} \cdot {}_x p_0^f$

3.静态人口模型

- 模型假设：年出生人口是常数 l_0 ，出生时间均匀分布，死力不随时间改变，适用于同一张生命表。

- 模型特征：

①任何时刻，年龄在 x 岁与 $x+1$ 岁之间的人数为 L_x

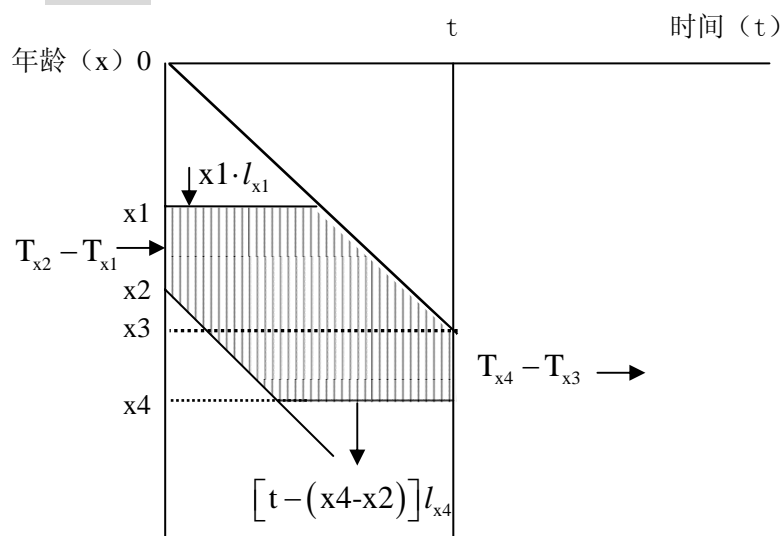
②任何时刻 x 岁以上人口总数为 $T_x = L_x + L_{x+1} + \cdots L_{\infty}$

③任何时刻总人口数量 $P(t) = T_0 = \int_0^{\omega} l_0 \cdot S(x) dx$

④静态人口每年死亡人数 $D = l_0 = \int_0^1 \int_0^{\omega} l_y \mu_y dy dt$

⑤所以人口总剩余寿命 $\int_0^{\infty} T_y dy = Y_0$

- Lexis 图



阴影区表示的总人数为：

$$x1 \cdot l_{x1} + (T_{x2} - T_{x1}) - \left\{ [t - (x4 - x2)] l_{x4} + (T_{x4} - T_{x3}) \right\}$$

结论：

- ❖ 每年有 l_x 人满 x 岁，其总寿命为 $x \cdot l_x + T_x$
- ❖ 任何时刻 x 岁及以上人口 T_x 人，其总寿命为 $x \cdot T_x + 2Y_x$
- ❖ 任何时刻 x 岁及以上人口 T_x 人，总活过寿命为 $x \cdot T_x + Y_x$

4.稳定人口模型

- 模型假设：

出生人口受生育函数限制，出生率以增长力 r_1 连续变化，即 $B(t+n) = B(t) \cdot e^{n \cdot r_1}$ ，

$B(t)$ 表示时刻 t 的出生力，如 $\int_0^1 B(t) dt$ 表示某年出生婴儿数；死亡假设服从同一张生命表。

● 性质

$$[1] \quad P(t+n) = P(t) \cdot e^{n \cdot r_i}, \quad \text{其中 } P(t) = \int_0^\infty B(t) \cdot e^{-x \cdot r_i} \cdot S(x) dx$$

r_i 不仅是出生率的增长速度, 而且是人口本身增长的测度, 所以其又称人口内在增长率。

[2] 任何年龄区间人口所占总人口比例不随时间变化而变化。

[3] 女性生育函数 Φ_x^f 的特征方程为 $\int_\alpha^\beta e^{-r_i \cdot x} \cdot S(x) \cdot \Phi_x^f dx = 1$, α 和 β 为育龄的上下限。

$$[4] \quad d_i = b_i - r_i$$

$$b_i = \frac{B(t)}{P(t)} = \frac{B(t)}{\int_0^\infty B(t) \cdot e^{-r_i x} \cdot S(x) dx} = \frac{1}{\int_0^\infty e^{-r_i x} \cdot S(x) dx}$$

$$d_i = \frac{D(t)}{P(t)} = \frac{\int_0^\infty B(t) \cdot e^{-r_i x} \cdot S(x) \cdot \mu_x dx}{\int_0^\infty B(t) \cdot e^{-r_i x} \cdot S(x) dx} = b_i \int_0^\infty e^{-r_i x} \cdot S(x) dx$$

[5] 曾经活着的人口在时刻 t 仍然活着的人的比例为 $\frac{r_i}{b_i}$

✪ r_i 的近似求解

$$[1] \quad r_i \approx \frac{\ln(NRR)}{T} \Leftrightarrow e^{r_i \cdot T} \approx NRR$$

$$\text{Coale 近似: } r_i \approx \frac{\ln(NRR)}{T - 0.7 \ln(NRR)}$$

$$\text{平均世代间隔 } T = \frac{\sum_{x=\alpha}^\beta \left(x + \frac{1}{2}\right) \cdot L_x \cdot f_x^f}{\sum_{x=\alpha}^\beta L_x \cdot f_x^f}$$

$$[2] \quad \text{死亡均匀分布假设下: } r_i = \frac{1}{y-x} \ln \left[\frac{C_x(z) L_y}{C_y(z) L_x} \right]$$

$$[3] \quad r_i = \frac{\frac{Q_1}{Q_0} - \bar{X}}{\sigma^2}, \quad \text{其中 } Q_i = \int_0^\infty (x)^i S(x) dx, \quad \sigma^2 = \frac{Q_2}{Q_0} - \left(\frac{Q_1}{Q_0}\right)^2,$$

$$\text{平均已达年龄 } \bar{X} = \frac{\int_0^\infty x \cdot e^{-r_i x} \cdot S(x) dx}{\int_0^\infty e^{-r_i x} \cdot S(x) dx}$$

5.拟稳定人口模型

r_1^b 表示出生增长率, r_1^p 表示人口内在增长率, 有:

$$\begin{cases} B(t+n) = B(t)e^{nr_1^b} \\ P(t+n) = P(t)e^{nr_1^p} \end{cases}$$

若死亡随时间得到改善, 则 $r_1^p > r_1^b$; 若死亡随时间恶化, 则 $r_1^p < r_1^b$

$$\begin{aligned} B(t+n) &= B(t)e^{nr_1^b} \\ \mu_\mu(t+a) &= \mu_\mu(a) - k \cdot t \end{aligned}$$

在均匀分布假设下: $r_1^b = r_1 - k \left(x + \frac{1}{2} \right)$

6.人口数据估计

★线形插值

$$P(t) = \frac{t_2 - t}{t_2 - t_1} P(t_1) + \frac{t - t_1}{t_2 - t_1} P(t_2)$$

★几何模型

$$P(t) = P(0)e^{r_1 t} \Rightarrow r_1 = \frac{1}{n} \ln \left[\frac{P(n)}{P(0)} \right]$$

$$P(t) = P(0)(1 + r_1)^t \Rightarrow r_1 = \left[\frac{P(n)}{P(0)} \right]^{\frac{1}{n}} - 1$$

★logistic 模型

$$t \text{ 时刻人口增长力 } r_t = \frac{\frac{\partial P(t)}{\partial t}}{P(t)},$$

$$\text{设 } \lim_{t \rightarrow \infty} P(t) = a, P(t) = \frac{a}{1 + \left(\frac{a}{P(0)} - 1 \right) \cdot e^{-kt}} = \frac{1}{A + B \cdot e^{-kt}}, \text{ 其中 } A = \frac{1}{a}, B = \frac{1}{P(0)} - \frac{1}{a}$$

$$\textcircled{1} P(t) = \frac{1}{2A} = \frac{a}{2} \text{ 是拐点, 此时 } t = -\frac{\ln(A/B)}{k}$$

$$\textcircled{2} \text{ 若等时间间隔 } t_1, t_2, t_3 \text{ 有普查数 } C_1, C_2, C_3, \text{ 则 } a = \frac{\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_3} - \frac{2}{C_2}}{\frac{1}{C_1 C_3} - \frac{1}{(C_2)^2}}$$

7. Leslie 矩阵

$$M = \begin{bmatrix} 0 & \frac{{}_5L_0}{l_0} \left(0 + \frac{1}{2} \cdot \frac{{}_5L_{10}}{{}_5L_0} \cdot {}_5f_{10}^f \right) & \frac{{}_5L_0}{l_0} \left(\frac{1}{2} {}_5f_{10}^f + \frac{1}{2} \cdot \frac{{}_5L_{15}}{{}_5L_{10}} \cdot {}_5f_{15}^f \right) & \cdots \\ \frac{{}_5L_5}{{}_5L_0} & 0 & \vdots & \cdots \\ 0 & \frac{{}_5L_{10}}{{}_5L_5} & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & \frac{{}_5L_{15}}{{}_5L_{10}} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots \end{bmatrix}$$

Leslie 矩阵第一行的元素在育龄上下限以外均为“0”。次对角线上元素 $\frac{{}_5L_{x+5}}{{}_5L_x}$ 在超过生命

表极限年龄时均为“0”。

性质：

- ⊛ Leslie 矩阵 M 的 M^i ，可以规划 $n \cdot i$ 年后的人口，其中 n 是年龄组间距。
- ⊛ 将 Leslie 矩阵恒定，可用于规划远期人口，人口增长趋于恒定，具有稳定人口的性质，
增长率 $\lambda = e^{n \cdot r}$ ， $M \cdot k = \lambda \cdot k$
- ⊛ Leslie 矩阵 M 的特征多项式从第二项到最后一项（常数项）系数之绝对值的和是净再生产率（NRR）。

特征多项式 $|M - \lambda \cdot I| = 0$

8.应用

❖ $m_x = \frac{D_x}{P_x}$ ， ${}_n m_x = \frac{{}_n D_x}{{}_n P_x}$ ，分母是年中人口或平均人口，所以又称中心死亡率。

❖ 在死亡均匀假设下： $q_x = \frac{m_x}{1 + 2m_x}$ ， ${}_n q_x = \frac{n \cdot {}_n m_x}{1 + \frac{n}{2} \cdot {}_n m_x}$

❖ 养老负担（PB）为 65 岁以上人口与 20 到 65 岁人口比率。

在稳定人口模型下 $PB = \frac{\int_{65}^{\infty} e^{-r_x \cdot x} S(x) dx}{\int_{20}^{65} e^{-r_x \cdot x} S(x) dx}$

修匀数学

1.有限差分

❖ 向前差分算子

$$\Delta_h f(x) = f(x+h) - f(x)$$

$$\Delta f(x) = f(x+1) - f(x)$$

有限差分的一个重要性质是 Δ 算子作用到多项式函数上将减少其一次次数。如果 $f(x)$ 是

n 次多项式，则 $\Delta^n f(x)$ 将是零次多项式。

$$\Delta[f(x) + g(x)] = \Delta f(x) + \Delta g(x)$$

$$\Delta[c \times f(x)] = c \times \Delta f(x)$$

❖ 中心差分算子

$$\delta_h f(x) = f\left(x + \frac{1}{2}h\right) - f\left(x - \frac{1}{2}h\right)$$

$$\delta^{2m} u_x = \Delta^{2m} u_{x-m}$$

2.检验

★ 光滑性检验

$$S = \sum_i (\Delta^n v_i)^2$$

★ 拟合的数值度量

$$F_1 = \sum_x w_x (v_x - u_x)$$

$$F_2 = \sum_x w_x (v_x - u_x)^2$$

$$F_3 = \sum_x x \cdot w_x (v_x - u_x)$$

★ 拟合的符号测试

$d_x = v_x - u_x$ 改变符号的次数是否频繁。总序列 $\{d_x\}$ 符号改变的次数随机变量服从

$B(n, 0.5)$ ，如果拟合效果好，符号改变次数接近 $n/2$ 。

3.表格数据修匀

① 移动加权平均修匀 (M-W-A)

$$v_x = \sum_{r=-n}^n a_r \cdot u_{x+r}, \text{ 假设 } a_r = a_{-r}, \quad r=1, 2, \dots, n$$

$$\text{模型具有再生性: } t_x = \sum_{r=-n}^n a_r \cdot t_{x+r}$$

t_x 为 x 的多项式的次数	再生性条件
1	$\sum_{r=-n}^n a_r = 1$
2	$\sum_{r=-n}^n a_r = 1, \sum_{r=-n}^n r^2 \cdot a_r = 0$
3	$\sum_{r=-n}^n a_r = 1, \sum_{r=-n}^n r^2 \cdot a_r = 0$
4	$\sum_{r=-n}^n a_r = 1, \sum_{r=-n}^n r^2 \cdot a_r = 0, \sum_{r=-n}^n r^4 \cdot a_r = 0$

$$U_x = t_x + E_x, \quad V_x = G(t_x) + E'_x = \sum_{r=-n}^n a_r t_{x+r} + \sum_{r=-n}^n a_r E_{x+r}$$

$$E(V_x) = t_x, \quad \text{Var}(V_x) = \sum_{r=-n}^n (a_r)^2 \text{Var}(E_{x+r}) = \sigma^2 \sum_{r=-n}^n (a_r)^2$$

在假设 $\{U_x\}$ 相互独立且方差相等的情况下，在 t_x 具有三次多项式时，使 R_z^2 最小可求出 a_r

$$R_z^2 = \frac{1}{C_{2z}^z} \sum_{r=-n-z}^n (\Delta^z a_r)^2 = \frac{\text{Var}(\Delta^z V_x)}{\text{Var}(\Delta^z U_x)}$$

②Whittaker 修匀

$$M = F + h \cdot S$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{x=1}^n w_x (v_x - u_x)^2 + h \sum_{x=1}^{n-z} (\Delta^z v_x)^2 \\ &= (v - u)' \cdot w \cdot (v - u) + h v' k'_z k_z v \end{aligned}$$

其中 $v = (v_1, v_2, \dots, v_n)$, $u = (u_1, u_2, \dots, u_n)$,

$$w = \begin{pmatrix} w_1 & & & \\ & w_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & w_n \end{pmatrix},$$

k_z 矩阵是 $(n-z)$ 行， n 列。

$$(1-x)^z = 1 - C_z^1 \cdot x + C_z^2 \cdot x^2 + \dots + (-1)^k C_z^k \cdot x^k + \dots + (-1)^z x^z$$

当 z 为偶数时， k_z 的第一行中的前 $z+1$ 个元素是上式的前 $z+1$ 个系数，后面的元素均

为 0；第二行元素是第一行元素右移一个，以此类推。

若 z 为奇数， k_z 的第一行元素为上式系数的相反数，其余与 z 为偶数时相同。

$$\begin{aligned}\frac{\partial M}{\partial v} &= 2w(v-u) + 2hk'_z k_z v = 0 \\ \Rightarrow (w + hk'_z k_z) v &= w \cdot u\end{aligned}$$

对于一般的 Whittaker 修匀表达式

$$\begin{aligned}M &= \sum_{x=1}^n w_x (v_x - u_x)^2 + \sum_{j=1}^z h_j \sum_{x=1}^{n-j} (\Delta^j v_x)^2 \\ &= (v-u)' \cdot w \cdot (v-u) + v' \left(\sum_{j=1}^z h_j k'_j k_j \right) v \\ \frac{\partial M}{\partial v} &= 2w(v-u) + 2hk'_z k_z v = 0 \\ \Rightarrow \left(w + \sum_{j=1}^z h_j k'_j k_j \right) v &= w \cdot u\end{aligned}$$

◆ 若 $t_x = A + BC^x$ ，令 $r = C - 1$ ，则光滑算子 $S = \sum_{x=1}^{n-2} (\Delta^2 v_x - r \Delta v_x)^2$ ，因为

$$\Delta^2 t_x = B(C-1)^2 C^x = r \Delta t_x$$

◆ Schuette 形式

$$M = \sum_{x=1}^n w_x |v_x - u_x| + h \sum_{x=1}^{n-z} |\Delta^z v_x|$$

这一公式的特征是：

(1) 至少对 z 个 x 值产生 $v_x = u_x$

(2) 如果恰巧对 z 个 x 值有 $v_x = u_x$ ，那么对所有 x ， $v_x = a_0 + a_1 x \cdots a_{z-1} \cdot x^{z-1}$

③ Bayesian 修匀

✧ Kimeldorf-Jone 方法

$$\begin{aligned}v &= u + (I + AB^{-1})^{-1} (m - u) \\ &= m + (I + BA^{-1})^{-1} (u - m)\end{aligned}$$

其中： A 是先验概率 $f_T(t)$ 的协方差矩阵， B 是 $f_{U|T}(u|t)$ 的协方差矩阵， m 是 $f_T(t)$ 的

均值向量， u 是 $f_{U|T}(u|t)$ 的均值向量。

✧ Dirichlet 修匀

d_i 为第 i 个区间上的死亡人数，开始群体人数为 d ，共有 n 个区间， $\sum_{i=1}^n d_i = d$ 。

$$v_i = \frac{a_i + d_i}{\sum_{i=1}^n a_i + d} = \frac{a_i}{a} \frac{a}{a+d} + \frac{d_i}{d} \frac{d}{a+d}$$

$\frac{d_i}{d}$ 是 t_i 的估计，它仅仅基于观察值， $\frac{a_i}{a} = m_i$ 是 t_i 的先验估计。

4. 参数修匀

★ Compertz 模型

$$\mu_x = BC^x \Rightarrow \ln \mu_x = \ln B + x \cdot \ln C$$

$$p_x = g^{c^x(c-1)} \Rightarrow \log p_x = (c-1)(\log g)c^x \Rightarrow \frac{\log p_{x+1}}{\log p_x} = c$$

★ Weibull 模型

$$\mu_x = kx^n \Rightarrow \ln \mu_x = \ln k + n \ln x$$

$$p_x = \exp\left\{-\frac{k}{n+1}[(x+1)^{n+1} - x^{n+1}]\right\} \Rightarrow \ln p_x = -\frac{k}{n+1}\Delta x^{n+1} \Rightarrow \Delta^n \ln p_x = -k \cdot n!$$

★ Makeham 模型

$$\mu_x = A + BC^x \Rightarrow \ln(\mu_x - A) = \ln B + x \cdot \ln C$$

$$p_x = F \cdot e^{D \cdot C^x} \Rightarrow \ln[\ln(p_x - \ln F)] = \ln D + x \cdot \ln C$$

★ 配置法

假设 μ_x 是 p_x 的初始估计值，对于 Makeham 形式的 $p_x = s \cdot g^{c^x(c-1)}$ ，选取三个等间隔的自变量 $x, x+r, x+2r$ ，有：

$$\frac{\Delta^r \ln \mu_{x+r}}{\Delta^r \ln \mu_x} = c^r, \text{ 由此式确定 } c;$$

$$\Delta^r \ln \mu_x = (c-1)(c^r - 1) \ln(g \cdot c^x), \text{ 由此式确定 } g;$$

$$\ln \mu_x = \ln s + (c-1)(\ln g)c^x, \text{ 由此式确定 } s.$$

5.分段参数修匀

①最小二乘三次样条

初始估计值 μ_x , $x=a, a+1, \dots, b$ 。先验的 $t_x = c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3$ 。

$$SS = \sum_{x=a}^b w_x (\mu_x - c_0 - c_1x - c_2x^2 - c_3x^3)^2$$

令 $\frac{\partial SS}{\partial c_i} = 0$, 可求得 c_i

②两弧三次样条

t_x 是 $[a, b]$ 上的分段三次多项式

$$t_x = \begin{cases} p_0(x) & a \leq x \leq k \\ p_1(x) & k < x \leq b \end{cases}$$

$$SS = \sum_{x=a}^k w_x (\mu_x - p_0(x))^2 + \sum_{x=k+1}^b w_x (\mu_x - p_1(x))^2$$

$$\begin{cases} p_0(k) = p_1(k) \\ p'_0(k) = p'_1(k) \\ p''_0(k) = p''_1(k) \end{cases} \text{由此可令} \begin{cases} p_0(x) = c_1 + c_2x + c_3x^2 + c_4x^3 & a \leq x \leq k \\ p_1(x) = c_1 + c_2x + c_3x^2 + c_4x^3 + c_5(x-k)^3 & k < x \leq b \end{cases}$$

6.光滑连接修匀

$$\diamond v_{x+s} = F(s)u_{x+1} + F(1-s)u_x \quad (0 \leq s \leq 1)$$

$$F(s) = A(s) + B(s)\delta^2 + C(s)\delta^4 + \dots$$

\diamond 匹配 (相邻弧纵坐标相等)

$$v_{x-1+s|s=1} = v_{x+s|s=0} \Rightarrow A(0) = B(0) = C(0) = \dots = 0$$

相切 (纵坐标和一阶导数相等)

$$v'_{x-1+s|s=1} = v'_{x+s|s=0} \Rightarrow 2F'(1) = F'(0)(2 + \delta^2)$$

密切 (纵坐标和一阶导数、二阶导数相等)

$$v''_{x-1+s|s=1} = v''_{x+s|s=0}$$

$$\Rightarrow F''(0)(u_{x+1} - u_{x-1}) = 0$$

$$A''(0) = B''(0) = \dots = 0$$

\diamond 再生性

$$v_x = u_x = v_{x+s|s=0} = A(1) \cdot u_x + B(1) \cdot \delta^2 u_x + C(1) \cdot \delta^4 u_x + \dots$$

$$\Rightarrow A(1) = 1, B(1) = C(1) = \dots = 0$$

- ❖ 基本表达式的精确度是指再生多项式的次数。精确度为 z 的充要条件是下表的前 $z+1$ 个等式成立。

z	条件
0	$A(s) + A(1-s) = 1$
1	$A(s) = s$
2	$B(s) + B(1-s) = \frac{1}{2}s(s-1)$
3	$B(s) = \frac{1}{6}s(s^2-1)$
4	$C(s) + C(1-s) = \frac{1}{24}s(s^2-1)(s-2)$
5	$C(s) = \frac{1}{120}s(s^2-1)(s^2-4)$

◆ 四点修匀公式

$$F(s) = A(s) + B(s)\delta^2$$

$$\left. \begin{array}{l} A(s) = s \\ B(0) = 0 \\ 2F'(1) = F'(0)(2 + \delta^2) \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} B'(0) = 0 \\ B'(1) = \frac{1}{2} \end{array} \right.$$

若 $B(1)=L$ ，则 $B(s) = \left(3L - \frac{1}{2}\right)s^2 + \left(\frac{1}{2} - 2L\right)s^3$ ， $L = \frac{1}{6}$ ， $B(s) = \frac{1}{6}s^3$ 唯一密切公式。

◆ 六点修匀公式

$$F(s) = A(s) + B(s)\delta^2 + C(s)\delta^4$$

$$A(s) = s, \quad B(s) = \frac{1}{6}s(s^2-1), \quad C(0) = 0, C'(0) = 0, C''(0) = 0, C'(1) = -\frac{1}{12}$$

若 $C(1)=m$ ，则 $C(s) = \left(4m + \frac{1}{12}\right)s^3 - \left(3m + \frac{1}{12}\right)s^4$

7.二维修匀

有 $m \times n$ 个初始估计 u_{ij} ， $i=1,2,\dots,m$ $j=1,2,\dots,n$ 。 m 是选择年龄数， $n-1$ 是选择期限。对应

每一个 i ，有 $n-1$ 个死亡率，再加上一个终极死亡率。拟合度量为： $F = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n w_{ij} (v_{ij} - u_{ij})^2$ 。

$$\text{垂直光滑度量} \sum_{i=1}^{m-z} \left(\Delta_v^z v_{ij} \right)^2, \quad \text{整体度量} {}^v S = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^{m-z} \left(\Delta_v^z v_{ij} \right)^2$$

$$\text{水平光滑度量} \sum_{j=1}^{n-y} \left(\Delta_h^y v_{ij} \right)^2, \quad \text{整体度量} {}^h S = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{n-y} \left(\Delta_h^y v_{ij} \right)^2$$

$$\text{极小化 } \mathbf{M} = \mathbf{F} + \alpha \cdot {}^v\mathbf{S} + \beta \cdot {}^h\mathbf{S}$$

把 $m \times n$ 矩阵 (u_{ij}) 变换成 $mn \times 1$ 列。矩阵的第一行变成列向量中的前 n 个元素，第二行变成列向量中的第 $n+1$ 个元素直到第 $2n$ 个元素。

$m \times n$ 权重矩阵 (w_{ij}) 变成 $mn \times mn$ 对角阵，把这个矩阵的各行元素逐行放在对角线上。

$$n(m-z) \times mn \text{ 矩阵 } {}^v\mathbf{k}_z, \quad {}^v\mathbf{S} = \left({}^v\mathbf{k}_z \cdot \mathbf{v} \right)' \left({}^v\mathbf{k}_z \cdot \mathbf{v} \right)$$

$$m(n-y) \times mn \text{ 矩阵 } {}^h\mathbf{k}_y, \quad {}^h\mathbf{S} = \left({}^h\mathbf{k}_y \cdot \mathbf{v} \right)' \left({}^h\mathbf{k}_y \cdot \mathbf{v} \right)$$

$$\left(\mathbf{w} + \alpha {}^v\mathbf{k}'_z {}^v\mathbf{k}_z + \beta {}^h\mathbf{k}'_y {}^h\mathbf{k}_y \right) \mathbf{v} = \mathbf{w}\mathbf{u}$$

第一章 人寿保险的主要类型

一、普通型人寿保险

定期寿险：以死亡为给付条件且期限固定。

优点：保费低廉

可以无现金价值，可续保性，可转换性

终身寿险：以死亡为给付条件且期限为终身。

优点：可得到永久保障，有退费权利，获得退保现金价值

分类：普通终身寿险、限期交费终身寿险、趸交终身保险

两全保险：以死亡或生存为给付条件的。储蓄性极强。

定期死亡险与生存险的结合，净保费由危险保费和储蓄保费组成。

年金保险：以生存为给付条件，按约定分期给付生存保险金，且给付间隔不超过一年。

◆ 交费方式：趸交年金、期交年金

◆ 给付开始日期：即期年金、延期年金

◆ 给付方式：

{	终身年金	{	确定给付年金（规定了最低保证年数）
	最低保证年金		退还年金（退还购买金额与领取金额的差额）
	定期生存年金		

◆ 被保险人数：

{	个人年金
	联合年金（均生存为给付条件）
	最后生存者年金（至少一个生存为给付条件，给付金额不变）
	联合及生存者年金（至少一个生存为给付条件，给付金额随被保险人减少调整）

二、新型人寿保险

（1）分红保险

➤ 分红保险、非分红保险以及分红保险产品与其附加的非分红保险产品必须分设帐户、独立核算。

采用固定费用率的，相应的附加保费收入和佣金、管理费用等不列入分红保险帐户；

采用固定死亡率方法的，相应的死亡保费收入和风险保额给付等不列入分红保险帐户

➤ 特点：

① 保单持有人享受经营成果。至少将当年可分配盈余的 70% 分配给客户

② 保单持有人承担一定风险

③ 定价精算假设比较保守

④ 保险给付、退保金中含有红利

➤ 保单红利

利源：利差益、死差益、费差益、失效收益、资产增值、预期利润、

残疾给付等与实际给付的差额

分配：满足公平性原则和可持续性原则

分配方式：现金红利、增额红利

（2）投资连结保险

❖ 定义：包含保险保障功能并至少在一个投资账户拥有一定资产价值的人寿保险产品。

❖ 投资风险完全由投保人承担，不得保证最低投资回报率

❖ 现金价值与投资账户资产相联，一般无最低保证

❖ 特点:

- 包含一项或多项保险责任;
- 至少连结到一个投资账户;
- 保险保障风险和费用风险由保险公司承担;
- 投资账户资产单独管理;
- 保单价值根据在每一投资账户占有的单位数及单位价值确定;
- 投资账户对应某张保单的资产产生的所有投资净收益划归该保单;
- 每年至少一次确定保险保障;
- 每月至少确定一次保单价值。

❖ 特征

④ 设置单独的投资账户，保费转换为投资单位

④ 死亡保险金额 { 给付保险金额和投资账户价值较大者（方法 A）
给付保险金额和投资账户价值之和（方法 B）/ 风险保额不变

④ 保险费

灵活的交费机制 { 固定保费基础上增加保险费假期
取消交费期间、频率、数额的概念，随时支付任意数额的保费

④ 费用收取上相当透明

可收取的费用：初始费用、买入卖出差价、风险保险费、保单管理费、资产管理费、手续费、退保费用

(3) 万能保险

➤ 万能保险是一种交费灵活、保额可调整、非约束性的寿险。

经营透明度高，因其现金价值与净风险保额分别计算

■ 主要特征:

① 死亡给付模式 { A 方式：均衡死亡给付额为净风险保额与现金价值之和
(死亡给付额固定，净风险保额每期调整)
B 方式：死亡给付额为均衡的净风险保额与现金价值之和

② 保费缴纳：对每次交费的最高和最低基本保费做出规定，随时交费。

第一次保费足以覆盖第一个月的费用和死亡成本。容易失效。

③ 结算利率：

{ 设立单独账户；
可以提供最低保证利率；
结算利率不得高于实际投资收益率，两者之差不高于 2%；
保险公司自行决定结算利率的频率

④ 费用收取：

初始费用、风险保险费、保单管理费、手续费、
退保费用（第一年不超过账户价值 10%，生效 5 年后降为零）

第二章 保单现金价值与红利

一、保单现金价值

- ◆ 现金价值，又称解约金、退保金、不丧失保单利益、不丧失价值或不丧失现金价值。指投保人退保或保险公司解除保险合同时由保险公司向投保人退还的那部分金额。

$${}_kCV = {}_kV - {}_kSC$$

现金价值 准备金 解约费用

- ◆ 现金价值小于责任准备金的原因：

前期发生较多费用，在毛保费中重新调整造成的

- 财务风险，退保造成财务稳定性下降
- 死亡率风险，退保金太高造成低风险人解约
- 效益风险，退保造成利润丧失
- 退保成本

- ◆ 简单操作原则

退保人获得的现金价值应使得用单重损失模型建立的收益、保费与准备金结构在二重损失模型中仍保持适宜。现金价值的数额不应引起同类保单的其他保单持有人的定价——保险责任结构的改变，否则对稳定经营造成冲击。

- ◆ 现金价值的计算

① 调整保费法

$$\begin{aligned} {}_kCV &= A(k) - P^\alpha \ddot{a}(k) \\ &= {}_kV - (P^\alpha - P) \ddot{a}(k) \end{aligned}$$

整个交费期每年分摊的均衡费用E，第一年额外费用补偿E₁

$$G\ddot{a} = (P^\alpha + E) \ddot{a} = A + E_1 + E\ddot{a}$$

$$\Rightarrow P^\alpha = \frac{A + E_1}{\ddot{a}}$$

1941 年 NAIC 规则：

$$E_1 = 0.4 \min(P^\alpha, 0.04) + 0.25 \min(P^\alpha, P_x^\alpha 0.04) + 0.02$$

$$P_x^\alpha = \begin{cases} \frac{A_x + 0.02}{\ddot{a}_x - 0.65} & P_x^\alpha < 0.04 \\ \frac{A_x + 0.046}{\ddot{a}_x} & P_x^\alpha \geq 0.04 \end{cases}$$

1980 年 NAIC 规则：

$$E_1 = 1.25 \min(P, 0.04) + 0.01 \quad P: \text{净保费}$$

② 准备金比例法

$${}_kCV = f_k \times {}_kV \quad f \text{ 在第一年较低，在一段时间就内提高至 } 100\%, \quad f \text{ 的确定比较主观}$$

优点 {

- 简单，易于管理
- 不受公司定价假设影响
- 对客户较为公平
- 及时反映定价时市场利率的变化

③均衡净保费法

$${}_k CV = f_k \times [PV(Bebenefit) - PV(NLP)]$$

f 在第一年较低，在一段时间就内提高至 100%， f 的确定比较主观。

贴现利率与准备金评估利率挂钩，如增加 1%。采用更保守的利率，更大程度上保护了保险公司

④修正净保费

$${}_k CV = [PV(Bebenefit) - PV(NLP)] - EA \frac{\ddot{a}_{x+k:n-k}}{\ddot{a}_{x:n-1}}$$

EA 是死亡保险金额的一定比例。可看作调整保费法的简化形式。

⑤资产份额法

$${}_{k+1} AS \cdot p_{x+k}^r = [{}_k AS + G(1 - c_k) - e_k](1 + i) - q_{x+k}^d - q_{x+k}^w \cdot {}_k CV$$

以资产份额作为现金价值的基础存在一定的困难：

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{计算复杂；} \\ \text{资产份额在保单初期可能为负，而现金价值不能为负；} \\ \text{完全从利润角度考虑，不易确定计算基础，因而不能用于监管目的。} \end{array} \right.$$

二、保单选择权

(1) 缴清保险

用现金价值作趸交保费购买与原保险**保险责任、期限不变，保额减少**的保险

$$b_k = \frac{{}_k CV}{A(k)}$$

若 ${}_k CV = {}_k V$ ， b_k 记为 ${}_k W(A(k))$

(2) 展期保险

用现金价值作趸交保费购买**保险金额不变，保险期限缩短或不变**的保险。

$${}_k CV = \bar{A}_{x+k:s}^1 \quad s \leq n - k$$

若有剩余，则以现金形式返还或购买与原保险期限相同的生存保险

$$\text{保额为：} \frac{{}_k CV - \bar{A}_{x+k:s}^1}{A_{x+k:n-k}^1}$$

若保额为 b 的保单在解约时欠有额度为 L 的保单贷款：

$$b \cdot {}_k CV - L = (b - L) \bar{A}_{x+k:s}^1$$

(3) 自动垫交保费

保费拖欠发生的时间为 k ，对于单位保额的完全连续保单，保费贷款期的最长时间 t ：

$$G \cdot \bar{s}_{\overline{t}|i} = {}_{k+t} CV$$

$$\text{在实务中 } t \text{ 取整值，} \begin{cases} G \cdot \bar{s}_{\overline{t}|i} \leq {}_{k+t} CV \\ G \cdot \bar{s}_{\overline{t+1}|i} > {}_{k+t+1} CV \end{cases}, \text{ 剩余 } {}_{k+t} CV - G \cdot \bar{s}_{\overline{t}|i} \text{ 购买展期保险}$$

三、资产份额公式

$$\begin{aligned}
 \diamond \quad {}_{k+1}AS \cdot p_{x+k}^{\tau} &= [{}_kAS + G(1 - c_k) - e_k](1 + i) - q_{x+k}^{(1)} - q_{x+k}^{(2)} \cdot {}_{k+1}CV \\
 \Rightarrow {}_{k+1}AS &= [{}_kAS + G(1 - c_k) - e_k](1 + i) - q_{x+k}^{(1)} (1 - {}_{k+1}AS) - q_{x+k}^{(2)} ({}_{k+1}CV - {}_{k+1}AS) \\
 \diamond \quad {}_kAS &= {}_kV + u(k) \\
 {}_{k+1}V \cdot p_{x+k}^{\tau} &= [{}_kV + P](1 + i) - q_{x+k}^{(1)} - q_{x+k}^{(2)} \cdot {}_{k+1}CV \\
 \diamond \quad u(k) \cdot {}_k p_x^{\tau} &= [u(k-1) + G(1 - c_{k-1}) - e_{k-1} - P] \cdot (1 + i) \cdot {}_{k-1} p_x^{\tau} \\
 u(k) \cdot {}_k p_x^{\tau} &= \sum_{j=1}^k (1 + i)^{k-j+1} \cdot {}_{j-1} p_x^{\tau} (G(1 - c_{j-1}) - e_{j-1} - P)
 \end{aligned}$$

四、保单红利计算

①经验调整法

$$\begin{aligned}
 {}_{k+1}F + {}_{k+1}D &= {}_{k+1}\hat{F} \\
 {}_{k+1}\hat{F} &= [{}_kF + G(1 - \hat{c}_k) - \hat{e}_k] \left(1 + \hat{i}_{k+1} \right) - \hat{q}_{x+k}^{(1)} (1 - {}_{k+1}F - {}_{k+1}D) - \hat{q}_{x+k}^{(2)} ({}_{k+1}CV - {}_{k+1}F - {}_{k+1}D) \\
 {}_{k+1}F &= [{}_kF + G(1 - c_k) - e_k](1 + i) - q_{x+k}^{(1)} (1 - {}_{k+1}F) - q_{x+k}^{(2)} ({}_{k+1}CV - {}_{k+1}F) \\
 {}_{k+1}D &= ({}_kF + G)(\hat{i}_{k+1} - i) && \text{利差} \\
 &+ \left[(Gc_k + e_k)(1 + i) - (G\hat{c}_k + \hat{e}_k)(1 + \hat{i}_{k+1}) \right] && \text{费差} \\
 &+ (1 - {}_{k+1}F)(q_{x+k}^{(1)} - \hat{q}_{x+k}^{(1)}) && \text{死差} \\
 &+ ({}_{k+1}CV - {}_{k+1}F)(q_{x+k}^{(2)} - \hat{q}_{x+k}^{(2)}) && \text{退保差} \\
 &+ {}_{k+1}D(\hat{q}_{x+k}^{(1)} + \hat{q}_{x+k}^{(2)}) && \text{红利仅支付给生存者, 死亡与退保均无红利} \\
 &/ + {}_{k+1}D \cdot \hat{q}_{x+k}^{(1)} && \text{红利支付给不死亡者} \\
 &/ + {}_{k+1}D \cdot \hat{q}_{x+k}^{(2)} && \text{红利支付给不退保者}
 \end{aligned}$$

②三元素法

$$\begin{aligned}
 D_k &= I_k + M_k + E_k \\
 &= (\overset{\text{实际}}{i'_k} - \overset{\text{预定}}{i_k})(\overset{\text{净保费}}{{}_{k-1}V_x} + \overset{\text{保额}}{{}_kP_x}) + (q_{x+k-1} - q'_{x+k-1})(R - {}_kV_x) + ({}_kG_x - {}_kP_x - {}_ke_x)(1 + i'_k)
 \end{aligned}$$

③经验保费法

设 \hat{G} 是根据实际死亡与费用假定确定的经验保费

$$\hat{G} = v \cdot {}_{k+1}F - {}_kF + \hat{g} + v \cdot \hat{q}_{x+k}^{(1)} \cdot (1 - {}_{k+1}F), \quad \text{其中 } \hat{g} = G\hat{c}_k + \hat{e}_k$$

设 ${}_{k+1}CV = {}_{k+1}F, k=0, 1, 2, \dots$

$$\left. \begin{aligned} {}_{k+1}F &= ({}_kF + \hat{G} - \hat{g})(1+i) - \hat{q}_{x+k}^{(1)}(1 - {}_{k+1}F) \\ \text{红利也向死亡或退保者支付, 则} \\ {}_{k+1}\hat{F} &= {}_{k+1}F + {}_{k+1}D = ({}_kF + G - \hat{g})(1 + \hat{i}_{k+1}) - \hat{q}_{x+k}^{(1)}(1 - {}_{k+1}F) \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$${}_{k+1}D = (G - \hat{G})(1 + \hat{i}_{k+1}) + ({}_kF + \hat{G} - \hat{g})(\hat{i}_{k+1} - i)$$

五、红利分配的原则

- (1) 做到**公平合理**
- (2) 保持一定的**余地**，在条件变化时分红方法仍应公平合理
- (3) 考虑保费**计算基础**和**评估基础**
- (4) 比较容易**实现**和**理解**
- (5) 保证在市场发生波动时还能保持稳定的分红

六、红利分配方法

- ◆ 百分比例法
- ◆ 三元素分红法
 - 优点 { 对保户公平
分红标准可使用数年，十分方便
 - 缺点 { 未考虑其他盈余来源
计算太复杂缺点
保户不易了解
- ◆ 经验保费分红法
 - 优点 { 红利逐年递增，符合投保人心理；
对分红与不分红保单的净成本的平衡提供了直接明显的核对
- ◆ 资产份额法
- ◆ 增额保险金分红法
 - 优点 { 简单，易于了解
弥补因通胀造成的保险金贬值
 - 缺点 { 较不公平
结算处理麻烦
- ◆ 责任准备金分红法
 - 公平性有欠理想；易受利率波动，分红额不稳定
- ◆ 终了红利 保单终止时支付
- ◆ 延期分红 一定期间后保单仍有效时才能获得红利
- ◆ 展延分红 一定时期后才开始分红

七、红利选择权

- ◎ 现金红利
- ◎ 复利红利分配法
 - 根据保额的一定比例提高保额 { 单利分配法 按原保额每年增加一定百分比
复利红利分配法
- ◎ 满期红利 保单满期或发生赔款时
- ◎ 购买缴清保险
- ◎ 购买一年定期寿险

第三章 特殊年金与保险

一、特殊年金

(1) 最低保证年金 保证支付期为 n 年

$$Z = \begin{cases} \bar{a}_{\overline{n}|} & t \leq n \\ \bar{a}_{\overline{t}|} & t > n \end{cases}$$

$$E(Z) = \bar{a}_{\overline{n}|} + \bar{a}_x - \bar{a}_{x:\overline{n}|}$$

(2) 分期退还年金 保证可领会已缴毛保费

$$G(1-r) = \bar{a}_{\overline{G}|} + {}_G E_x \bar{a}_{x+G}$$

(3) 现金退还年金

死亡时已领取年金总额小于毛保费，退还差额。计算已领取年金总额时不计息。

$$Z = \begin{cases} \bar{a}_{\overline{t}|} + (G - T)v^T & T \leq G \\ \bar{a}_{\overline{t}|} & T > G \end{cases}$$

$$E(Z) = \bar{a}_x + G\bar{A}_{x:\overline{G}|}^1 - \bar{IA}_{x:\overline{G}|}^1$$

若按毛保费的 r 倍收取附加保费，则：

$$G(1-r) = \bar{a}_x + G\bar{A}_{x:\overline{G}|}^1 - \bar{IA}_{x:\overline{G}|}^1$$

二、家庭收入保险

n 年内被保险人死亡时开始提供年金给付直到 n 年的保险。

$$Z = \begin{cases} v^t \bar{a}_{\overline{n-t}|} & t \leq n \\ 0 & t > n \end{cases}$$

$$E(Z) = \bar{a}_{\overline{n}|} - \bar{a}_{x:\overline{n}|}$$

对年付 m 次，从死亡所在 $1/m$ 年末开始支付，则 $E(Z) = a_{\overline{n}|}^{(m)} - a_{x:\overline{n}|}^{(m)}$

对年付 m 次，从死亡时立即支付，则 $E(Z) = \frac{\delta}{d^{(m)}} (\bar{a}_{\overline{n}|} - \bar{a}_{x:\overline{n}|})$

三、退休收入保单

满期给付额 $1+k$ ， a 是责任准备金为 1 的时间

$$\text{保险给付额 } b_t = \begin{cases} 1 & t \leq a \\ {}_t \bar{V} & a < t \leq n \end{cases}$$

$$\frac{\bar{s}_{\overline{n-a}|}}{\bar{a}_{x:\overline{a}|}} = k, \text{ 保费 } \bar{P} = \frac{k}{\bar{s}_{\overline{n-a}|}} - \delta = \frac{1}{\bar{a}_{x:\overline{a}|}} - \delta, \quad {}_t \bar{V} = \begin{cases} \frac{\bar{P}\bar{a}_{x:t|} - \bar{A}_{x:t|}^1}{{}_a E_x} & t < a \\ (1+k)v^{n-t} - \bar{P}\bar{a}_{\overline{n-t}|} & a \leq t \leq n \end{cases}$$

四、变额保险产品

(1) 变额年金

积累期内死亡给付等于基金份额，退保给付为死亡保额减解约费用，退休时用积累基金购买缴清年金

$$\left. \begin{aligned} (b_k \cdot \ddot{a}_{x+k} - b_k)(1+i'_{k+1}) &= b_{k+1} \cdot p_{x+k} \cdot \ddot{a}_{x+k+1} \\ (\ddot{a}_{x+k} - 1)(1+i) &= p_{x+k} \cdot \ddot{a}_{x+k+1} \end{aligned} \right\} \text{相除得 } b_{k+1} = b_k \cdot \frac{1+i'_{k+1}(\text{实际投资收益率})}{1+i(\text{假定投资收益率})}$$

(2) 完全变额人寿保险

给付额随投资结果的变化而改变，保费同比例改变

$$\left. \begin{aligned} [b_k \cdot {}_kV(\bar{A}_x) + b_k \cdot P(\bar{A}_x) - b_k \bar{A}_{x+k:\overline{1}|}^1](1+i'_{k+1}) &= p_{x+k} \cdot b_{k+1} \cdot {}_{k+1}V(\bar{A}_x) \\ [{}_kV(\bar{A}_x) + P(\bar{A}_x) - \bar{A}_{x+k:\overline{1}|}^1](1+i_{k+1}) &= p_{x+k} \cdot {}_{k+1}V(\bar{A}_x) \end{aligned} \right\} \text{相除得 } b_{k+1} = b_k \cdot \frac{1+i'_{k+1}}{1+i}$$

(3) 固定保费的变额人寿保险

$$\left. \begin{aligned} [b_k \cdot {}_kV(\bar{A}_x) + P(\bar{A}_x) - b_k \bar{A}_{x+k:\overline{1}|}^1](1+i'_{k+1}) &= p_{x+k} \cdot b_{k+1} \cdot {}_{k+1}V(\bar{A}_x) \\ [{}_kV(\bar{A}_x) + P(\bar{A}_x) - \bar{A}_{x+k:\overline{1}|}^1](1+i_{k+1}) &= p_{x+k} \cdot {}_{k+1}V(\bar{A}_x) \end{aligned} \right\} \text{相除得}$$

$$b_{k+1} = b_k \cdot \left[\frac{{}_kV(\bar{A}_x) + \frac{P(\bar{A}_x)}{b_k} - \bar{A}_{x+k:\overline{1}|}^1}{{}_kV(\bar{A}_x) + P(\bar{A}_x) - \bar{A}_{x+k:\overline{1}|}^1} \right] \cdot \frac{1+i'_{k+1}}{1+i}$$

(4) 交清保险增额

保费仍固定，给付的改变以缴清保险的方式出现。

$$\left[(b_k - 1) \cdot \bar{A}_{x+k} + {}_kV(\bar{A}_x) + P(\bar{A}_x) - b_k \bar{A}_{x+k:\overline{1}|}^1 \right] (1+i'_{k+1}) = p_{x+k} \cdot \left[(b_{k+1} - 1) \cdot \bar{A}_{x+k+1} + {}_{k+1}V(\bar{A}_x) \right]$$

$$\frac{1+i'_{k+1}}{1+i} = \frac{(b_{k+1} - 1) \cdot \bar{A}_{x+k+1} + {}_{k+1}V(\bar{A}_x)}{(b_k - 1) \cdot \bar{A}_{x+k+1} + {}_{k+1}V(\bar{A}_x)}$$

$$\text{保额递推关系: } b_{k+1} - \frac{P(\bar{A}_x)}{P(\bar{A}_{x+k+1})} = \left[b_k - \frac{P(\bar{A}_x)}{P(\bar{A}_{x+k+1})} \right] \cdot \frac{1+i'_{k+1}}{1+i}$$

五、可变计划产品

保额少许增加不需可保性证明的产品。运行过程中改变了原来的给付或缴费计划。

$$\text{准备金 } {}_kV = \frac{{}_0V + P\ddot{a}_{x:k|} - bA_{x:k|}^1}{{}_kE_x},$$

$$\text{平衡原理 } {}_0V + P\ddot{a}_{x:h|} = bA_{x:h|}^1$$

P 是初始纯保费， ${}_0V = -E$ ， E 是第一年超额费用补贴。对一年定期修正制，

$$\left. \begin{aligned} {}_1V &= 0 \\ {}_0V + P &= b \cdot v \cdot q_x \end{aligned} \right\} \Rightarrow E = P - b \cdot v \cdot q_x$$

保额变为 b' 或保费为 P' 时, 新的责任准备金

$${}_{k+g}V' = \frac{{}_kV' + P' \ddot{a}_{x+k:g} - b'A_{x+k:g}^1}{{}_gE_{x+k}}, \quad g \text{ 为改变计划的保单年度}$$

$$\text{根据平衡原理: } {}_kV' + P' \ddot{a}_{x+k:h} = b'A_{x+k:h}^1$$

基于 $k+1$ 年初的风险保额 r_k 的资产份额方程来改变保险计划:

$$\left({}_kF + G - E - r_k \bar{A}_{x+k:l}^1 \right) (1 + i'_{k+1}) = {}_{k+1}F$$

死亡时不仅获得年初资产份额, 还有按利息调整的风险保额。

- 对风险保额的选择可使总保额的变化不致过大
- 保单持有人对毛保费 G 和风险保额 r_k 选取灵活性较大
- i'_{k+1} 通常至少等于某个最低利率的投资收益率, 风险成本一般不超过 $r_k \bar{A}_{x+k:l}^1$
- $\bar{A}_{x+k:l}^1$ 的计算采用预定的利率及计算法定准备金时使用的死亡表
- E 可按毛保费的百分比、每份保单、每千元保额收取, 作为解约费用按第一年保费收取

六、个人寿险中的残疾给付

① 残疾收入给付

$$12b \sum_{k=0}^{y-x-1} v^k \cdot {}_k p_x^{(\tau)} \cdot q_{x+k}^{(1)} \cdot v^{\frac{1}{2}} \cdot v^{\frac{m}{12}} \cdot {}_{\frac{m}{12}} p_{\left[x+k+\frac{1}{2}\right]}^{(1)} \cdot \ddot{a}_{\left[x+k+\frac{1}{2}\right]+\frac{m}{12}; u-x-k-\frac{1}{2}-\frac{m}{12}}^{(12)(1)}$$

② 保费免交给付

$$P \sum_{k=0}^{y-x-1} v^{k+\frac{1}{2}} \cdot {}_k p_x \cdot \frac{1}{2} p_{x+k} \cdot q_{x+k}^{(1)} \cdot v^{\frac{m}{12}} \left(\bar{a}_{\left[x+k+\frac{1}{2}\right]+\frac{m}{12}}^1 + \frac{m}{12} \right)$$

第四章 寿险定价概述

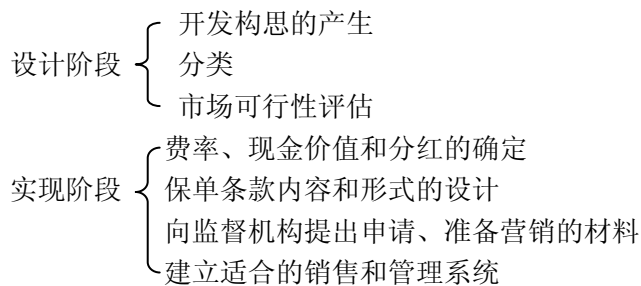
一、定价原则

- ▲ 充足性原则 足以弥补所有的给付和费用
- ▲ 合理性原则
- ▲ 公平性原则 承担的责任与交纳的保费对等
- ▲ 可行性原则 考虑缴费能力和行销可行性
- ▲ 稳定性原则
- ▲ 弹性原则

二、险种开发过程

(1) 开发的险种体现**公司的特点、企业文化和长期战略规划**。产品的开发、设计满足**营销人员、公司股东和社会大众的需要**

(2) 险种开发过程包括设计与实现。



从构思到实现的过程中应分阶段进行检查：

- ① 与战略规划相适应
- ② 市场可行性检查 { 外部市场（已存在的、潜在的）
内部销售系统（已存在的、潜在的）
- ③ 设计分类：营销、财务、管理、投资
- ④ 设计优化：计算费率、现金价值、保单形式、管理系统、再保险安排
- ⑤ 产品实现：确定最终保单形式、销售资料管理、提出申请、最终定价
- ⑥ 检查结果：观众接受程度、销售结果、是否符合假设

(3) 险种开发反映社会、经济、法律和竞争环境的变化

(4) 一般定价过程：

确定定价计划；建立精算假设；决定产品及价格；对产品进行运营和管理。这是一个反复的过程。

三、寿险定价方法

1、净保费加成法

优点：只进行有限运算

- | | |
|------|---------------------|
| 缺点 { | 与利润联系不紧密，没表明年度利润的变化 |
| | 在给付复杂的情况下，计算复杂 |
| | 不适用于新型险种 |
| | 不能以此确定一些问题 |

2、资产份额法

- | | |
|------|---------------------------|
| 优点 { | 各年度的保费、给付额、利率都可不同，保险人自由度大 |
| | 保费直接与利润挂钩，有利于管理 |
| | 可用于利润测试，增加保费适应性 |
| | 具有模式化特点 |
| | 符合新型险种的需要 |

缺点 { 对投资问题与保费及利润目标的关系不能直接反映
不能反映投资信息情况
不能给出合理的投资决策结构

3、宏观定价法

$$\begin{aligned} \text{❖ 总利润} &= P \times Q - ME \times Q - NME \\ &= P \times f(P) - ME \times f(P) - NME \end{aligned}$$

求 P 使总利润最大, 则 $f'(P) + f'(P) \times P - f'(P) \times ME = 0$

❖ **改进之处** { 将总利润作为判断产品及其价格优劣的标准
给出一系列价格, 每一价格的多种销售方案, 计算每一价格/销售组的利润
只考虑边际费用, 决策过程不同

❖ 一般过程

- ① 确定产品特点
- ② 确定至少四种价格体系
- ③ 与市场上类似产品进行性能、用途比较
- ④ 确定每单位的边际费用
- ⑤ 确定不同的佣金制度体系
- ⑥ 预测业务进展情况
- ⑦ 确定与每单位产品无关的边际费用
- ⑧ 建立利润预测模型, 确定最小利润目标
- ⑨ 召开业务部门、精算部门和管理者的会议, 进行决策, 决定价格与佣金

❖ 优点: 最大程度上使价格达到最优, 保证公司安全运行, 解决精算部门与业务部门的冲突

四、定价的各种假设

1、影响定价假设的因素

(1) 经济和社会环境

(2) 公司特点

利润目标、保费增长目标和股东权益对公司的重要性。公司管理的保守程度。公司类型。

(3) 市场特点

销售机构、销售队伍、营销培训、销售方法、目标市场、内部改进、广告定位、定价与承保思想

(4) 产品特点

保障内容、保险期限、缴费方式、投资风险分担方式、再保险、保单选择权

2、定价假设

(1) 死亡率

- ◆ 险种不同而不同
- ◆ 对同一险种也会有所不同
- ◆ 对标准生命表调整作为死亡率假设, 各年龄段和保单年度的调整系数不同
- ◆ 死亡率的改进十分重要
- ◆ 死亡率假设与保额有关
- ◆ 定期寿险对其变动较敏感

(2) 利率

- ◎ 基础是投资收益水平
- ◎ 不同产品的利率假设可以不同
- ◎ 在保险期间一般是均衡的
- ◎ 对价格影响较大

(3) 失效率

- 经济与社会环境的变化
- 保单年度增加，失效率降低
- 投保年龄低，失效率高
- 保额高，失效率低
- 保费支付频率高，失效率高
- 女性失效率低
- 保单特征

(4) 费用率假设

单位费用：每份保单、每千元保额、每张有效保单、每单位保费、保险费率的一定比例、管理费的一定比例、无现金价值的每张失效保单、每次退保、每次死亡给付、每千元死亡给付、每张到期保单

分类：①合同初始费：保单签发费用、承保费用、其他初始费用

②代理人佣金：佣金、其他报酬

③保单维持费：与保费相关、其他维持费用、保费收入税

④保单终止费：退保费用、无现金价值失效费用、死亡给付费用、到期费用

(5) 平均保额

第五章 资产份额定价法

一、定价过程

1、收集资料

①不同标准生命表②保单细节③基础保险金额④给付金额和时间⑤投保年龄和时间
⑥保单项目和保单到期日⑦代理公司状况⑧是否参与分红

2、设立精算假设

①生命表假设②退保率假设③利率假设④费用假设⑤佣金比例⑥红利假设

3、保单的各种给付

死亡给付、退保给付、生存给付和期满给付

4、给出现金流

总收入=毛保费-再保险成本+投资收入

总支出=管理费用+代理人佣金+死亡给付+退保给付+期满给付+生存给付+税

保单年度末基金 F1=初始时刻基金 F+总收入-总支出

(转入资产和股东分红之前)

保单年度末总盈余=保单年度末基金 F1-保单年度负债

转入资产=保单年度末总盈余-保单红利成本-股东红利成本

保单年度末基金 F2=保单年度负债+保单红利成本=保单年度末基金 F1-股东红利成本-转入资产

(转入资产和股东分红之后)

二、基本公式

$$\text{保费: } TP_{x,t} = NP_{x,t} + \frac{PE}{AZ_x}$$

$$\text{期初费用: } EB_{x,t} = \frac{EP_{x,t}}{AZ_x} + \frac{EDB_{x,t} \cdot DB_{x,t}}{1000} + EYP_{x,t} \cdot TP_{x,t}$$

$$\text{期末费用: } EE_{x,t} = \frac{ED_{x,t}}{AZ_x} \cdot q_{x,t}^d \cdot \frac{i_t}{\delta_t} + \frac{EW_{x,t}}{AZ_x} \cdot q_{x,t}^w + \frac{EDIV_{x,t}}{AZ_x} (1 - q_{x,t}^d)$$

$$\text{保单给付: } PB_{x,t} = DB_{x,t} \cdot q_{x,t}^d \cdot \frac{i_t}{\delta_t} + CV_{x,t} \cdot q_{x,t}^w + DIV_{x,t} (1 - q_{x,t}^d)$$

$$\begin{aligned} \text{资产份额: } AS_{x,t} &= \frac{(AS_{x,t-1} + TP_{x,t} - EB_{x,t})(1 + i_t) - PB_{x,t} - EE_{x,t}}{p_{x,t}} \\ &= \frac{(AS_{x,t-1} + TP_{x,t})(1 + i_t) - TBP_{x,t}}{p_{x,t}} \end{aligned}$$

$$\text{积累盈余: } SUR_{x,t} = AS_{x,t} - V_{x,t} = \sum_{s=1}^t \frac{s}{t} \frac{D_x}{D_x} PRO_{x,s}$$

$$\text{本期损益: } GAIN_{x,t} = SUR_{x,t} - \frac{SUR_{x,t-1}}{p_{x,t}}$$

$$\begin{aligned}\text{营运损益 (利润): } \text{PRO}_{x,t} &= \text{GAIN}_{x,t} - \text{SUR}_{x,t-1} \cdot \frac{i_t}{p_{x,t}} \\ &= \frac{(V_{x,t-1} + \text{TP}_{x,t})(1+i_t) - \text{TBP}_{x,t}}{p_{x,t}} - V_{x,t}\end{aligned}$$

三、利润指标

✧ 获利比率

$$\frac{\text{PVPRO}_x (\text{利润现值})}{\text{PVP}_x (\text{保费现值})} = \frac{\sum_{t=1}^n D_x \cdot \text{PRO}_{x,t}}{\sum_{t=1}^n D_x \cdot \text{TP}_{x,t}}$$

✧ 利润现值与风险成本现值之比

$$\frac{\text{PVPRO}_x (\text{利润现值})}{\text{PVRC}_x (\text{风险成本现值})} = \frac{\sum_{t=1}^n D_x \cdot \text{PRO}_{x,t}}{\sum_{t=1}^n D_x \cdot \text{RC}_{x,t}}$$

$$\text{其中 } \text{RC}_{x,t} = \alpha \cdot q_{x,t}^{(d)} \cdot (\text{DB}_{x,t} - V_{x,t}) + \beta \cdot V_{x,t}$$

✧ 利润现值与死亡保险给付现值之比

$$\frac{\text{PVPRO}_x}{\text{PVPER}_x} = \frac{\sum_{t=1}^n D_x \cdot \text{PRO}_{x,t}}{\sum_{t=1}^n D_x \cdot \frac{\text{DB}_{x,t}}{1000} \cdot \frac{i_t}{\delta_t}}$$

✧ $\text{PVPRO}_x = 0$ 的 ROI (投资回报率)

✧ 临界平衡年

$$\min(t | \text{SUR}_{x,t} > 0)$$

✧ 最终资产份额 $\text{AS}_{x,n}$ 与最终期末准备金 $V_{x,n}$ 的关系

四、保费的调整

❖ 净保费 $\text{NP}_{x,t}$ 增加一倍, 利润变化 $\text{PC}_{x,t} = \text{NP}_{x,t} \cdot (1 - \text{EYP}_{x,t}) \frac{1+i_t}{p_{x,t}}$

$$\text{增加的利润现值: } \text{PVPC}_x = \sum_{t=1}^n D_x \cdot \text{NP}_{x,t} \cdot (1 - \text{EYP}_{x,t})$$

$$\text{增加的保费现值: } \text{PVNPC}_x = \sum_{t=1}^n D_x \cdot \text{NP}_{x,t}$$

$$\text{增加的资产份额: } ASC_x = \sum_{t=1}^n \frac{D_x}{D_x} \cdot NP_{x,t} \cdot (1 - EYP_{x,t}) \frac{1+i_t}{p_{x,t}}$$

❖ 净保费 $NP_{x,t}$ 的变化比例 $PREMC_x$

$$\text{调整后净保费 } NP'_{x,t} = (1 + PREMC_{x,t}) \cdot NP_{x,t}$$

$$\text{修正利润现值: } PVPRO'_x = PVPRO_x + PREMC_x \cdot PVPC_x$$

$$= \sum_{t=1}^n D_x \cdot PRO_{x,t} + PREMC_x \left[\sum_{t=1}^n D_x \cdot NP_{x,t} \cdot (1 - EYP_{x,t}) \right]$$

$$\text{修正保费现值: } PVP'_x = PVP_x + PREMC_x \cdot PVNPC_x$$

$$= \sum_{t=1}^n D_x \cdot TP_{x,t} + PREMC_x \cdot \left[\sum_{t=1}^n D_x \cdot NP_{x,t} \right]$$

$$\text{修正资产份额: } AS'_{x,n} = AS_{x,n} + PREMC_x \cdot ASC_x$$

$$\text{❖ 修正利润现值与保费现值之比: } \frac{PVPRO'_x}{PVP'_x} = \frac{PVPRO_x + PREMC_x \cdot PVPC_x}{PVP_x + PREMC_x \cdot PVNPC_x}$$

$$\text{修正利润现值与风险成本现值之比: } \frac{PVPRO_x + PREMC_x \cdot PVPC_x}{PVRC_x}$$

$$\text{修正利润现值与死亡保险给付现值之比: } \frac{PVPRO_x + PREMC_x \cdot PVPC_x}{PVPER_x}$$

$$\text{修正投资回报率: } PVPRO'_x = PVPRO_x + PREMC_x \cdot PVPC_x = 0$$

$$\text{修正 } n \text{ 年资产份额与准备金之比: } \frac{AS_{x,n} + PREMC_x \cdot ASC_x}{V_{x,n}}$$

第六章 准备金评估

一、不同类型准备金的比较

	评估目的	保守程度
法定责任准备金	监管机构为确保偿付能力而确定的准备金最小数额	最保守、通常产生最高负债额
盈余准备金	体现盈余的真实性	中性或略微保守
税收准备金	确定税收	一般不允许过高

二、法定责任准备金的评估方法

法定责任准备金包括**法定未到期责任准备金**和**法定未决赔款准备金**

1. 均衡净保费法

不考虑保单失效和费用问题，计算基础为均衡的评估净保费，对任何一种保单和承保年龄，均衡净保费是毛保费的一个固定比例。

${}_kV$ = 未来应付责任的精算现值 - 未来应收净保费的现值

= 过去已收净保费到评估时的精算积累值 - 过去已付保险责任的精算终值

2. 修正净保费评估法

✘ 费用补贴 $EA = \beta_x^{\text{Mod}} - \alpha_x^{\text{Mod}}$

$$\alpha_x^{\text{Mod}} + \beta_x^{\text{Mod}} \cdot a_x = P_x \cdot \ddot{a}_x$$

$${}_tV_x^{\text{Mod}} = A_{x+t} - \beta_x^{\text{Mod}} \cdot \ddot{a}_{x+t}$$

$$= {}_tV_x^{\text{NL}} - EA \frac{\ddot{a}_{x+t}}{\ddot{a}_x}$$

$$= {}_tV_x^{\text{NL}} - (\beta_x^{\text{Mod}} - P_x) \cdot \ddot{a}_{x+t}$$

✘ 费用补贴 $EA = P_x^{\text{NL}} - \alpha_x^{\text{Mod}}$

$${}_tV_x^{\text{Mod}} = {}_tV_x^{\text{NL}} - EA \frac{\ddot{a}_{x+t}}{a_x}$$

✘ FPT 法

$$\alpha_x^{\text{Mod}} = A_{x:\overline{1}|}$$

$$\beta_x^{\text{Mod}} = \frac{A_{x+1}}{\ddot{a}_{x+1}} = P_{x+1}$$

$${}_tV_x^{\text{Mod}} = {}_tV_x^{\text{NL}} - (P_{x+1} - P_x) \cdot \ddot{a}_{x+t}$$

✱ CRVM 法

当 $\beta^{\text{FPT}} \leq {}_{19}P_{x+1}$ ，采用 FPT 法

当 $\beta^{\text{FPT}} > {}_{19}P_{x+1}$ ， $\beta_x^{\text{Mod}} - \alpha_x^{\text{Mod}} = EA = {}_{19}P_{x+1} - A_{x:\overline{1}}^1 = (\beta_x^{\text{Mod}} - P)\ddot{a}_{x:\overline{h}}$

$${}_tV_x^{\text{Mod}} = {}_tV_x^{\text{NL}} - \frac{EA}{\ddot{a}_{x:\overline{h}}}\cdot\ddot{a}_{x+t:\overline{h-t}}$$

✱ 对 CRVM 法的调整（将净保费由 CRVM 在某期间调整为均衡净保费）

$${}_1V_x^{\text{Mod}} = 0 = A_{x+1} - P^{\text{CRVM}}\cdot\ddot{a}_{x+1}$$

$$\Rightarrow A_{x+1} = P^G \cdot \ddot{a}_{x+1:k-1} + P^{\text{NL}} \cdot {}_{k-1}\ddot{a}_{x+1} = P_{x+1} \cdot \ddot{a}_{x+1}$$

P^G 为 2 到 k 年的调整净保费， $P^{\text{NL}} = \frac{A_x}{\ddot{a}_x}$

$${}_tV_x^{\text{Mod}} = A_{x+t} - P^G \cdot \ddot{a}_{x+t:k-t} - P^{\text{NL}} \cdot {}_{k-t}\ddot{a}_{x+t}$$

3. 保单保费评估法（PPM）

按照费用的明确分布并以毛保费为计算基础的评估方法。

4. 累积法

该法主要用于新型寿险产品的责任准备金评估，属于过去法。

以账户余额作为准备金基础的条件：

- ⎧ 对于万能产品，保证利率不能超过准备金允许的最大评估利率
- ⎧ 保证的未来保险成本须足以支持基于评估死亡率计算的未死亡成本
- ⎧ 未来实际收取费用须足以支持未来的维护费用

账户价值扣除一定的费用作为法定准备金的条件：

- ⎧ 收取退保费用
- ⎧ 保证利率低于最大评估利率
- ⎧ 有充足的承保费用

5. 加拿大资产负债方法（CALM）

主要原则 ⎧ 持续经营假设
⎧ 资产和负债的相互依赖性
⎧ 基于分组方法
⎧ 充足但不过多
⎧ 投保人的合理期望

步骤 ⎧ 建立最优估计假设
⎧ 除利率外的所有假设加入不利偏差准备（相互产生影响，有些假设依赖于利率假设）
⎧ 增加对利率的不利偏差准备（在不同假设利率环境下测试）
⎧ 由于保单持有人风险转移机制的存在而进行调整

三、准备金方法在实务中的应用

1. 平均与期中准备金

◆ 平均准备金 ${}_tMV_x = \frac{1}{2}({}_{t-1}V_x + {}_tV_x) + \frac{1}{2}P_x$

◆ 延期保费

假设年缴费次数为 m ，保单发行在年中是均匀分布的

$$\frac{m-1}{2m}P_x$$

◆ 期中准备金 $\frac{1}{2}({}_{t-1}V_x + {}_tV_x)$

◆ 在实务中，对于一般业务采用平均准备金因子方法，对于周交保费业务或长期的残疾保险则采用期中准备金因子的方法

2.

类型	净保费	期末准备金	平均准备金
离散	$P(A_x) = \frac{A_x}{\ddot{a}_x}$	${}_tV = A_{x+t} - P_x \cdot \ddot{a}_{x+t}$	$\frac{1}{2}({}_{t-1}V_x + {}_tV_x + P_x)$
全连续	$\bar{P}(\bar{A}_x) = \frac{\bar{A}_x}{\bar{a}_x}$	${}_t\bar{V}(\bar{A}_x) = \bar{A}_{x+t} - \bar{P}(\bar{A}_x) \cdot \bar{a}_{x+t}$	$\frac{1}{2}({}_{t-1}\bar{V}_x(\bar{A}_x) + {}_t\bar{V}_x(\bar{A}_x))$
贴现连续	$\bar{a}_{\overline{1} } \cdot \bar{P}(\bar{A}_x)$ 或 $\bar{P}(\bar{A}_x)$	${}_t\bar{V}(\bar{A}_x) = \bar{A}_{x+t} - \bar{P}(\bar{A}_x) \cdot \bar{a}_{x+t}$	$\frac{1}{2}({}_{t-1}\bar{V}_x(\bar{A}_x) + {}_t\bar{V}_x(\bar{A}_x) + \bar{a}_{\overline{1} } \cdot \bar{P}(\bar{A}_x))$
半连续	$P(\bar{A}_x) = \frac{\bar{A}_x}{\ddot{a}_x}$	${}_t\bar{V}(\bar{A}_x) = \bar{A}_{x+t} - P(\bar{A}_x) \cdot \ddot{a}_{x+t}$	$\frac{1}{2}({}_{t-1}\bar{V}_x(\bar{A}_x) + {}_t\bar{V}_x(\bar{A}_x) + P(\bar{A}_x))$

3. 基础准备金假设下的各种负债

类型	退还准备金	无折扣准备金	即付赔款准备金	延期保费		未到期保费	
				期中	平均	期中	平均
离散	有	有	有	无	有	有	无
全连续	无	无	无	无	—	有	—
贴现连续	无	无	无	—	有	—	无
半连续	有	有	无	无	有	有	无

四、利率敏感型寿险的评估

1. 可变动保费万能寿险

■ 早期关于退保现金价值及准备金价值的方法有：

- 现金价值采用过去法准备金计算公式
- 保单销售采取永久保障的方法，保单持有人可通过变动缴费水平来改变保险金给付水平
- 对于永久计划，第一年的费用和退保费用一般小于 CRVM 中的费用补贴
- 将其看成缴清保单，若有预先附加退保费用，且保证死亡率和利率与评估基础一致，那么现金价值为未来保证保险金给付的合适的准备金

■ 最小准备金（CRVM 法）

- （1）计算保证期满保费 GMP
- （2）计算保证期满基金 GMF
- （3）必须知道评估日实际基金数额
- （4） $r = \text{实际基金数额} / \text{GMF}$ ， r 不超过 1

(5) 从评估日起，在保证基础上利用实际基金和 **GMF** 较大者在 **GMP** 假设下随着保单年度的进展规划保单。

(6) 计算均衡保费准备金

$${}_tV^{NL} = r \cdot (PVFB_t - P^{NL} \cdot \ddot{a}_{x+t})$$

$PVFB_t$ 是未来保险金在评估利率、评估生命表基础上在 t 处的现值。

(7) 计算 **CRVM** 准备金

$$\begin{aligned} \text{公式: } & r \cdot (PVFB_t - P^{NL} \cdot \ddot{a}_{x+t}) - r \cdot EA^{CRVM} \cdot \frac{\ddot{a}_{x+t}}{\ddot{a}_x} \\ & = {}_tV^{NL} - r \cdot (P^{CRVM} - P^{NL}) \cdot \ddot{a}_{x+t} \end{aligned}$$

■ 选择最小准备金

当 **GMP** 小于评估净保费时，则求最小准备金。准备金是下面较大者：

- ① 用保单实际使用的死亡率基础、评估利率、根据准备金方法计算而得的准备金
- ② 使用实际准备金方法，但使用保费不足准备金的最低标准死亡率和利率，用 **GMP** 代替评估净保费计算而得的准备金

评估净保费 $VNP = P^{NL} + \frac{EA}{\ddot{a}} = P^{CRVM}$ ， EA 为初始延期费用

选择最小准备金的范围：

- ① 死亡率和利率的保证基础与评估基础很相似，则无附加费用保单使用 **AMR'S**
- ② 保险费率的保证成本低于评估死亡率，特别是保证利率等于评估利率且预先附加费水平较低
- ③ 保证利率高于评估利率，特别是保险费率保证成本等于评估死亡率，且费用水平较低
- ④ 导致产生较小数额 **GMP** 的任何保单计划

2. 固定保费的万能寿险的评估

◆ 法定准备金为下面较大者：

- ① 对于二级保证的保险计划采用传统方法计算 **CRVM** 准备金
- ② 实际的现金价值

◆ 该方法的特点：

- ┌ **GMP** 等于毛保费
- ├ 费用补贴和未摊回的比例由保单在承保时的保证计划决定
- └ r 一般等于 1

3. 非整数年的准备金

- ① 如何计算 r 。用评估日上一一年或下一一年计算的 r 比在评估日计算的 r 更精确
 - ② 如果 r 是按评估日计算，如何计算 **GMF**。采用与准备金方法相一致的选择是重要的。
 - ③ 是按照基本原理计算评估日的准备金因子，还是计算平均准备金、期中准备金或是插值准备金。
- 前者可避免使用延期净保费和未到期保费，后者更容易检验评估项目。

4. 保证到期保费方法 (**GMPM**)

$${}_tV^{GMPM} = \begin{cases} r \cdot {}_tV^{CRVM}, & r \leq 1 \\ {}_tV^{CRVM} + F_t - GMF_t, & r > 1 \end{cases}$$

${}_tV^{CRVM}$ 是传统的 **CRVM** 准备金，其基于永久的寿险计划，到期日是计划下尽可能晚的到期日。

F_t 是实际基金数额

5. 现金价值作为准备金的充足性

将现金价值作为可变动保费万能寿险保单的准备金，可能会造成延迟损失的结果。特别对于后期附加费用的产品，可能造成准备金不充分。

对于具有退保费用的万能寿险，当退保费用下降时，现金价值会将大于 CRVM 准备金，如果毛保费不能再支撑现金价值的增长时则造成续年损失。

6. 趸缴保费的延期年金的评估

$${}_tV = \max({}_kCV, k=t, t+1, t+2 \dots)$$

7. 年缴保费的延期年金

$${}_tV = \max({}_kCV - \ddot{a}_{x:k-t}, k=t, t+1, t+2 \dots)$$

8. 保费不足准备金

$$\begin{aligned} {}_tV_x^D &= (A_{x+t}^M - G \cdot \ddot{a}_{x+t}^M) - (A_{x+t} - P \cdot \ddot{a}_{x+t}) \\ &= (P^M - G) \cdot \ddot{a}_{x+t}^M - \left[(A_{x+t} - P \cdot \ddot{a}_{x+t}) - (A_{x+t}^M - P^M \cdot \ddot{a}_{x+t}^M) \right] \end{aligned}$$

其中 G 为毛保费， $G < P^M$

$A_{x+t}^M, \ddot{a}_{x+t}^M, P^M$ 是利用最低死亡率和利率计算而得；

$A_{x+t}, \ddot{a}_{x+t}, P$ 是利用计算准备金所使用的死亡率和利率为基础计算而得。

第七章 寿险公司内含价值

一、基本定义

1. 英国和加拿大的定义

内含价值实质上由两个因素构成：有效业务价值和调整净资产

调整净资产指评估当日的任何自有资本，即扣除偿付能力资本后的股东权益余额，再加上投资在未来实现的资本收益，减去未来收益的延期税金后的调整值。

有效业务价值主要指评估当日已有保单未来法定税后利润的风险贴现值，另外还包括未来能够释放的偿付资本金的风险贴现值。

2. 我国的定义

人身保险的内含价值由以下三部分组成：

- ① 分配给适用业务的自由盈余
- ② 要求资本扣除持有要求资本的成本之后的余额
- ③ 有效业务的现值

$$\begin{aligned} \text{内含价值} &= \text{自由盈余} + \text{要求资本} + \text{有效保单未来产生的股东现金流现值} - \text{持有要求资本的成本} \\ &= \text{调整净资产} + \text{有效业务价值} \end{aligned}$$

※ 内含价值代表的就是保险公司不再签发新保单情况下的公司股权价值

二、计算方法

(1) 英国和加拿大

$$EV = \text{调整净资产}(ANV) + \text{有效业务价值}(VBIF_t)$$

$$= \text{自由资本} + \sum_{z \geq t+1} \frac{H_z^{(t)} + \Delta RC_z \times (1+i)^{z-t}}{(1+r)^{z-t}}$$

t: 评估年; z: 有效保单的利润实现年份; ΔRC_z : 每期释放的偿付能力资本;

$H_z^{(t)}$: 所有t年末的有效业务在年度z的期望利润; r: 与有效业务相关的风险贴现率

i: 偿付能力资本的利率

(2) 欧洲和中国

$$EV = \text{自由盈余} + \text{偿付资本} + (\text{有效业务价值} - \text{偿付资本成本})$$

$$= \text{自由盈余} + \text{偿付资本} + \sum_{z \geq t+1} \frac{H_z^{(t)} - \Delta RC_z \times [(1+r)^{z-t} - (1+i)^{z-t}]}{(1+r)^{z-t}}$$

$$= \text{自由盈余} + RC - \sum_{z \geq t+1} \Delta RC_z + \sum_{z \geq t+1} \frac{H_z^{(t)} - \Delta RC_z \times (1+i)^{z-t}}{(1+r)^{z-t}}$$

$$= \text{自由盈余} + \sum_{z \geq t+1} \frac{H_z^{(t)} - \Delta RC_z \times (1+i)^{z-t}}{(1+r)^{z-t}}$$

三、由内含价值到市场价值

$$AV (\text{评估价值}) = EV (\text{内含价值}) + VNB (\text{未来新业务价值})$$

$$MV (\text{市场价值}) = AV + \text{其他影响公司价值的因素}$$

$$VNB_t = PV_0 \times a_t = \left[\sum_{z \geq t} \frac{G(s, t, z)}{(1+r)^{z-t}} \right] \times a_t$$

由内含价值到市场价值的步骤：

- ①获得公司公布的**内含价值**和**当年新业务价值**的数据；
- ②调整到适合的假设条件，重新评估内含价值和当年新业务价值；
- ③估计**未来业务乘数**并计算公司未来新业务价值，结合内含价值得到公司的**评估价值**；
- ④在评估价值的基础上加入公司其他价值，得到**市场价值**。

四、寿险公司内含价值计算的步骤：

建立模型，数据的搜集和整理，参数设定，根据模型预测未来现金流并完成贴现，净资产调整，敏感性分析。

一、建立模型

- 1.遵循的原则：要有一定的**理论依据**；要考虑到实际的**可操作性**；尽量恰当的反映保费收入、资产、理赔支付等保单**实际运行的特征**，反映当前及未来的保单实际运行时的**各种经济环境的特征**
- 2.首先模型的建立应依据不同的业务分类分别建立模型；然后对应于每一个同质保单组建立一个模型单元，对该模型单元根据这组保单的特征设定各种参数，模拟其实际运行状态，即可测定该组所有保单未来的现金流状态。

二、数据的搜集和整理

- 1.数据的要求：充足性、相关性、时效性
- 2.数据的来源：公司内部的历史经验数据；行业统计数据；国民统计数据和地区人口统计数据；再保险公司的相关数据
- 3.数据的检验：准确性和一致性

准确性检验的方法：协调性检验、对比检验、异常数据和随机抽查检验

4.数据的调整

内部历史数据的调整：集中在异常事件、随机波动、循环变化和趋势变化

非公司内部历史数据的调整：集中在人群同质性调整上

三、参数设定

- 1.需要设定的参数：**死亡率、投资收益率、退保率、费用率及佣金、风险贴现率**（**风险贴现率是计算过程中最敏感的参数**）
- 2.风险贴现利率的评估应考虑到
 - ①公司经营寿险业务的收益回报率要求
 - ②寿险公司业务的现金流的统计学意义上的风险，即围绕均值上下波动的风险。包括模型风险、参数风险和随机波动风险

❖ 风险贴现率是无风险利率加上一定的风险额度。

无风险利率根据 10 年期国债的收益率确定；

风险额度要反映未来可分配收入的风险情况，不低于 5% 不高于 10%。

指引要求分别根据 10% 和 15% 的风险贴现率计算内含价值。
- 3.参数设定遵循的原则
 - ①退保率与投资收益率应保持一致：退保率较高时，投资收益率较低。
 - ②负债评估的假设与资产评估的假设保持一致
 - ③与前期假设应保持一致
 - ④新业务的拓展与费用参数应保持一致

四、根据模型预测未来现金流并完成贴现

$$Profit_m = P_m - C_m - E_m - RP_m - SR_m - DR_m + I_m \quad m = 1, 2, \dots, N$$

P_m 保费收入； C_m 佣金； E_m 管理费用； RP_m 风险保费； SR_m 退保金；

DR_m 准备金提转差； I_m 投资收益

$$\text{有效业务价值 VBIF} = \sum_{x=1}^N Profit_x \times \frac{P_x}{(1+i)^x}$$

五、净资产调整

1. 法定资本金和盈余，即所有者权益的核算
 2. 法定负债的核算，包括法定责任准备金、投资风险准备金
 3. 法定报表中不包括的资产认定，即账外资产或折旧已提足、已摊销完毕的资产价值的调整合认定
- 有效业务价值加上调整净资产即得内含价值。

六、敏感性分析

测试各种因素的变化对寿险公司内含价值的影响

- a. 连续敏感性分析：只变化一个参数
- b. 瞬时敏感性分析：所有参数的值都发生变化

七、内含价值的具体应用

（一）内含价值是评估寿险公司价值的有效工具

上市保险公司将内含价值作为财务报告的补充信息进行发布，在寿险公司的并购和上市活动中，必须在内含价值的基础上客观地计算公司的价值。

（二）内含价值在寿险公司经营管理中的应用

1. 内含价值在寿险公司经营成果评估方面的应用

（1）内含价值增值的分析

- a. 通过内含价值增值的分析，公司决策层可以确定公司的现有业务、新增业务、投资收益以及假设变化对于价值的影响，从而做出经营管理决策。
- b. 通过内含价值增值的分析，可以了解影响内含价值的各个部分，从而有效评估公司在该期间的经营绩效以及对公司下一步加强管理打下良好的基础。
- c. 通过内含价值增值的分析，可以了解实际经验与预期情况的对比，有助于修订所使用的假设；评估部门可以向管理层提交每年的新业务价值，了解盈亏的独立原因，分析出那些不盈利的保单。
- d. 通过评估子公司创造内含价值的能力，在资源有限的情况下选择最能够增加公司价值的方法。
- e. 比较实际业务与预期的差别，使得定价和业务计划中所使用的假设更为有效合理。

（2）内含价值在寿险公司业务绩效评估体系中的应用

- a. 内含价值收益可以衡量经营期间收益情况

$$EVE_t = EVA_t + D_t - C_t = EV_t - EV_{t-1} + D_t - C_t$$

内含价值收益 内含价值增值

股东分红 资本金增加

- b. 内含价值回报率 $TRR_t = \frac{EVE_t}{EV_{t-1}}$ 更能反映公司经营的长期性特点，同时剔除了 EVE 指标受业务规模的影响。

（3）内含价值在寿险公司经营层薪酬规划方面的应用

为激励提供更好的指导，有效避免了会计指标短期化和过分稳健的影响。对员工的激励可以渗透到管

理层底部，有更广的激励范围。

2.内含价值在寿险公司战略决策方面的应用

(1) 寿险公司战略决策评估

- ◆ 业务层面的战略，协调好公司收益与消费者利益、股东短期利润与长远价值、市场竞争者关系
- ◆ 公司层面的战略规划，具有投资组合的性质，解决有限资源合理配置的问题

(2) 内含价值法的应用

- ◆ 在公司层面上，内含价值法为公司改制、并购重组等公司活动提供可靠的技术支持。
- ◆ 在业务层面上，利用内含价值法可以评估各种备选策略对公司价值的影响。通过比较最终实现战略选择；比较业务增长和费用率变动对有效业务价值的影响，从而决定选择何种策略。

(三) 内含价值的缺陷

- 1.内含价值评估法的计算过于复杂、深奥
- 2.对风险考虑的比较少
- 3.对于假设比较敏感
- 4.没有考虑寿险保单中嵌入期权的价值
- 5.计算中许多因素是相互关联的
- 6.计算和披露方法不统一

第八章 偿付能力监管

一、概述

1. 保险公司偿付能力是指其履行保险合同约定的赔偿或给付责任的能力。
2. 偿付能力额度指在任何一个指定日期，其资产和负债的差额。
实际具备的偿付能力（认可资产减认可负债）
监管机构要求具备的最低偿付能力
3. 偿付能力监管
正常层次监管/偿付能力额度监管，弱化第一层次监管，强化第二层次监管

二、欧盟偿付能力监管实践及进展

- ❖ 现行偿付能力监管体系的组成
 - 责任准备金的评估
 - 资产价值的评估与认可
 - 偿付能力额度的确定
- ❖ 现行监管体系的缺陷：对保险公司面临的风险考虑的不全面，对保险公司的个体风险不敏感
- ❖ 2002 年保险监管新准则强调：在任何时点都必须满足偿付能力要求
- ❖ 偿付能力额度监管的依据：**法定偿付能力额度/实际偿付能力额度**
- ❖ 法定偿付能力额度的评估方法

风险类型	对应偿付能力保证金
投资风险	责任准备金的 3%
死亡率波动风险	风险保额的一定比例，险种不同而不同
费用风险	责任准备金的 1%
管理风险	最低自由资本的绝对数值的要求

① 人寿保险和年金（不含与投资基金挂钩的险种）

法定偿付能力额度=A+B

A=（责任准备金的 4%）×准备金再保险比例

准备金再保险比例= $\frac{\text{责任准备金总和}-\text{分出再保险责任准备金}}{\text{责任准备金总和}(\text{再保比率} \geq 85\%)}$

B 的选择

- 保险期限小于 3 年的定期险 B=（风险保额的 0.1%）×保额再保比率
- 保险期限大于 3 年且小于 5 年的定期险 B=（风险保额的 0.15%）×保额再保比率
- 其他 B=（风险保额的 0.3%）×保额再保比率

② 附加险

法定偿付能力额度=（直接保费+分入再保险费-保费税收）×比率×再保险比率

1000 万欧元以下的比率为 18%，1000 万欧元以上的比率为 16%

再保险比率= $\frac{\text{总自留理赔额}}{\text{理赔总额}}$ （再保险比率 ≥ 50%）

③ 投资连接型保单和退休金保险

法定偿付能力额度=责任准备金的 1%（客户承担投资风险）+风险保额的 0.3%×再保险比率

- ✱ 偿付能力 I 项目仅对以往监管体系做**局部修改调整**，没有更多考虑保险业外部环境发生的巨大**变化**；只在**数值**上提高了法定偿付能力额度的要求。
- ✱ 偿付能力 II 项目的重点在于设计出一套全面**衡量**保险公司所面临**风险**的方法，促进保险公司自身**开发和完善内部风险管理体系**
- ✱ 毕马威的建议
 - ① 统一资产的评估方法与标准，统一非认可资产的标准和比例，引入 VaR 方法

②统一责任准备金评估模型和假设的披露规则

③在额度计算上，对保险公司的风险状况进行全面的界定

三、北美偿付能力监管实践及进展

◆ **RBC 的组成：**计算公式、RBC 报告、一套 RBC 标准、专门为保险监察官设计的后续措施程序

◆ **风险分类**

C1 资产风险：资产违约和贬值风险

考虑资产类型、组合质量、同类资产的分散程度和期限结构

C2 定价发行：定价过低或对死亡率和发病率的不合理估计

C3 利率风险：按保险责任准备金计算，风险因子取决于风险水平和公司的精算意见是否合格

C4 经营风险：按保费水平计算

◆ C2 与 C1、C3 相互独立，C1 与 C3 以及 C4 与其他三个变量完全相关

◆ 授权控制水平的 RBC = $\frac{\sqrt{(C1+C3)^2 + (C2)^2} + C4}{2}$ ，避免被接管或解散的资本水平

◆ 根据风险资本比率采取干预措施

$$\text{风险资本(RBC)比率} = \frac{\text{总调整后资本}}{\text{授权控制水平的RBC}}$$

总调整后资本=法定资本和盈余+资产评估准备金+自主投资准备金+保单分红责任的 50%

◆ 风险资本法的优点：

- 较全面的反映偿付能力风险；
- 细化风险因素；
- 对风险进行了量化；
- 预警性更强；
- 体现了保险监管与风险管理结合的监管发展思路
- 模型设计的灵活性

◆ 不足：

- 风险反映不够全面
- 没有考虑资产分散化程度对偿付能力风险的影响
- 导致为符合规定而不是基于经济理由的交易的发生

四、资产评估

■ 资产评估和认可的原则

认可资产的评估按市场价格进行；

认可程度以假设某一时点实际能变现资产的价值来设计

■ SAP 下的资产评估

认可资产：投资资产；其他认可资产；递延、应收和应计收入

非认可资产：市价低于账面价值的投资资产；低于投资等级的投资资产

五、偿付能力管理

1、资产方面的措施

- ※ 分配可投资现金流（不必因 RBC 改变投资方式）
- ※ 改善债券组合质量
- ※ 债券组合的分散
- ※ 减持商业抵押贷款

※ 减持股票

※ 避免资产集中的“惩罚”

2、负债方面的措施

- ◆ 任何超过最小法定准备金要求的准备金数额都能被弱化
- ◆ 对于产品被归为低风险的保险人，通过调整 C3 成分给予部分激励
- ◆ 公式中的协方差通过在 C1+C3 和 C2 间进行平衡来降低 RBC
- ◆ 鼓励保单贷款

3、其他措施

缩减经营项目、再保险、发行股票、母公司注资、财务重组

六、我国偿付能力监管

1、法定最低偿付能力额度

①长期人身险业务（与欧盟标准相同）

②短期人身险业务（下述较大者）

最近会计年度自留保费减营业税及附加后 1 亿元以下部分的 18%和 1 亿元以上部分的 16%

最近三年平均综合赔款金额 7000 万以下部分的 26%和 7000 万以上部分的 23%

综合赔款金额=赔款支出+未决赔款准备金提转差+分保赔款支出-摊回分保赔款-追偿款收入

2、实际偿付能力额度：认可资产减认可负债

3、监管措施

①偿付能力充足率在 70%以上：要求该公司提出**整改方案**并限期达到最低偿付能力额度要求，逾期未达到的，可要求**增加资本金、责令办理再保险、限制业务范围、限制向股东分红、限制固定资产购置、限制经营费用规模、限制增设分支机构**等措施，直至达到要求。

②偿付能力充足率在 30%~70%：除采取前述措施，**责令拍卖不良资产、责令转让保险业务、限制高级管理人员的薪酬水平和在职消费水平、限制公司的商业性广告、责令停止开展新业务**及其他必要措施。

③偿付能力充足率小于 30%：除采取前两款措施外，还可根据《保险法》的规定对其进行**接管**。

4、12 项监管指标

长期险保费收入增长率、短期险自留保费增长率、实际偿付能力额度变化率、险种组合变化率、认可资产负债率、资产认可率、短期险两年赔付率、投资收益充足率、盈余缓解率、资产组合变化率、融资风险率、退保率。

若有 4 个或以上指标超正常范围，采取措施：

- ①要求保险公司提交报告说明原因，对偿付能力的影响和改进方案
- ②对保险公司进行全面检查以评估其实际偿付能力的状况和趋势
- ③根据评估结果，按照本规定的相关条款采取必要的监管措施

七、未来发展方向

1、美国的现金流测试

在某一确定评估日，在一系列利率预测的基本情景假设情况下，通过预测和比较资产与负债在未来某个时段内可能的现金流量时间和数量，分析财务状况、偿付能力水平、准备金水平产品设计的可行性。

情景假设只与利率风险有关、只考虑现有业务的现金流状况。只适用于长期产品和对经济条件变化非常敏感的业务。

2、加拿大的动态资本充足性测试

步骤：对未来环境的基本情景假设；

辨别对未来偿付能力产生不利影响的各种风险因素；

确定对未来偿付能力产生不利影响的假设情景；

预测和分析保险公司的资本充足率

形成报告

3、经济资本法

- 特点：

- 将各种风险考虑在内

- 将投保人行为和公司管理策略考虑在内

- 采用动态模拟来决定所需资本

- 计算原理

$$\text{经济资本 } EC_{\alpha} = \text{VaR}_{\alpha}(T) - E[L(T)]$$

$$\text{VaR}_{\alpha}(T) = \inf \left\{ x > 0 \mid P[L(T) \leq x] \geq \alpha \right\}$$

- 流程：

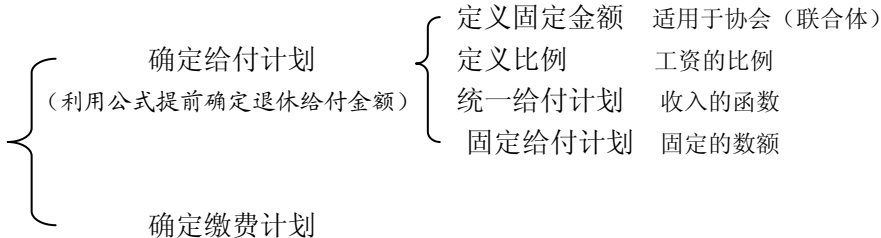
- 理解公司当前处境；设定风险限制；资本最优化；监控、调整、分析

第九章 养老金

一、养老金计划的基本概念

1. 多由雇主为雇员购买
- 单个雇主计划 比例最大
 - 复合雇主计划 雇主联合起来分摊费用
 - 多雇主计划 运用于协会，行业内调动不失去养老金

2. 养老金计划形态



(提前确定每年缴费的金额，有一定投资风险)

确定缴费计划强调终止给付，确定给付计划强调退休给付

3. 确定计划成本（缴费数额）应考虑的因素

- 替代率：刚退休时的退休给付与退休前收入的比率
- 年龄和计划设计的影响 **年轻者**参加确定缴费计划更有利，接近退休者避免参加确定缴费计划
- 预期通货膨胀
- 养老金给付
- 盈余的处理 部分用于减少缴费金额，部分进行指数调整

4. 养老金积累方式：现收现付制和完全基金制

5. 精算成本法分为：个体成本法、聚合成本法

二、精算成本因素

1. 负债评估的主要目的

- (1) 估计养老计划的长期成本或者计划可能发生的变化
- (2) 考察一系列规定的缴费金额可能提供的给付水平
- (3) 明确能够提供给定给付所必需的缴费金额
- (4) 确定经营养老金计划的单位适当的费用水平
- (5) 确定在国家税收政策下最大的缴费金额
- (6) 确定在国家法律约束下的最小的缴费金额
- (7) 公布计划的成本和负债
- (8) 确定雇主从复合雇主计划中退出的退出负债
- (9) 向参加者说明计划给付的基金状况

2. 养老金计划人口包括
- 在职参加者 仍为雇主服务
 - 终止授权参加者 已终止雇佣但保留未来给付的权利
 - 已退休参加者
 - 退休者或递减参加者 如丧失劳动能力给付的收益人

3. 影响精算负债的计划人口的特点：

参加者数额、性别比例、年龄分布、服务年限分布、以进入计划年龄为标准的人口分布、工资水平分布

4. 计划人口分为
- 稳定人口
 - 生长不足人口 年轻人和短服务期人占多数
 - 生长过剩人口 中老年和长服务期人占多数

■ 精算成本因素包括：

计划人口、评估假设、人口减少、人口增加、经济因素、已退休参加者的期末付年金、费用

5. 养老金计划评估中的假设有
- 人口假设 考虑计划人口可能的变动
 - 经济假设 考虑投资收益率、工资及其模式、通货膨胀水平

6. 人口减少方式：终止、死亡、丧失劳动能力、退休

7. 对新加入者的两个独立假设
- 总体在职劳动力规模的变动
 - 新加入者的年龄、性别和工资水平的分布假设

8. 经济因素
- 生活费用的提高
 - 工资增长 生活费用增长、超过生活费用增长部分的平均工资的增长、价值的增长
 - 利率

9. 估计养老金计划的总成本时要考虑的费用

开发费用、法定费用、精算费用、财务费用、一般管理费用、上缴的费用

三、给付分配的精算成本法

1. 展开获利方法：自动将全部获利和损失在正常成本中展开

2. 经验损失和获利的摊提时间：多雇主计划 15 年，其他计划 5 年；

确定最大免税扣除限额时，可在 10 年中摊提

3. 养老计划的出资人和管理者希望精算成本法具有的性质和特点：

- ✱ 希望此方法能产生相当于工资支付水平一个百分比的正常成本
- ✱ 希望此方法产生的精算负债至少等于所有在计划终止时支付的应计给付、授权和非授权的精算现值
- ✱ 希望此方法产生的精算负债不超过计划终止负债
- ✱ 希望此方法提供足够的灵活性以达到雇主或其他资助者的短期财政需要

4. 传统应计给付成本法的局限：

正常成本是逐年增加的；精算负债可能达不到计划终止负债

5. 给付分配方法——个体
- 积累计划给付——到达年龄——附加负债
 - 均衡货币给付——到达年龄——附加负债

- 个体
- 均衡货币
 - 到达年龄——无附加负债
 - 进入年龄——附加负债
 - 均衡百分比
 - 到达年龄——无附加负债
 - 进入年龄——附加负债

- 聚合
- 均衡货币——到达年龄
 - 含
 - 积累计划给付
 - 个体均衡货币
 - 不含附加负债
 - 均衡百分比——到达年龄
 - 含
 - 积累计划给付
 - 个体均衡百分比
 - 不含附加负债

■ 退休前一年工资 $S_{r-1} = (1+s)^{r-1-x} \cdot S_x$ ；

最后三年平均工资 $FAS = \frac{1}{3}(S_{r-3} + S_{r-2} + S_{r-1}) = \frac{1}{3} \cdot S_x \cdot (1+s)^{r-1-x} \cdot \ddot{a}_{3|s}$ ；

整个工作期间平均工资 $CAS = \frac{1}{r-e}(S_e + S_{e+1} + \cdots + S_x + \cdots + S_{r-1}) = \frac{1}{r-e} S_x \cdot (1+s)^{r-1-x} \cdot \ddot{a}_{r-e|s}$

✱ 考虑养老金获利

$$\begin{aligned}
 UAL_0 &= AL_0 - F_0 \\
 {}^{\text{exp}}UAL_1 &= (UAL_0 + NC_0)(1+i) - {}^iC \quad {}^{\text{act}}UAL_1 = AL_1 - F_1 \quad \text{其中 } {}^iC = \begin{cases} C & \text{在期末交费} \\ C(1+i) & \text{在期初交费} \end{cases} \\
 {}^{\text{tot}}G_1 &= {}^{\text{exp}}UAL_1 - {}^{\text{act}}UAL_1
 \end{aligned}$$

※ 附加负债的分摊 (SL 表示附加负债, SC 表示附加成本)

立即分摊 $SL = SC$

在一定期间分摊 $SL = SC \cdot \ddot{a}_{\overline{t}|}$

在正常退休前分摊 $SL = SC \frac{\sum \ddot{a}_{\overline{r-x}|}}{n}$, n 为参加者人数

无限期分摊 $SL = SC \cdot \frac{\sum \ddot{a}_{\overline{\infty}|}}{n} = \frac{SC}{d}$

◆ 养老金资产负债表

盈余 $= F + SC \cdot \ddot{a}_{\overline{m}|} - AL$ 或 赤字 $= AL - F - SC \cdot \ddot{a}_{\overline{m}|}$, m 为自作表日到分摊结束时间

方法	B_x	NC_x	AL_x	TNC	TAL
传 统 单 位 信 用 成 本 法 TUC	$B_x = P \times 12 \times (x - e)$ 最后工资百分比: $\beta_1 \cdot (1+s)^{r-1-x} \cdot (r-e)$ 最 后 三 年 平 均 工 资 百 分 比 : $\beta_2 \cdot FAS \cdot (r-e)$ 整 个 工 作 期 间 平 均 工 资 百 分 比 : $\beta_3 \cdot CAS \cdot (r-e)$	$\frac{B_x}{x-e} \cdot \frac{D_r^{(\tau)}}{D_x^{(\tau)}} \cdot \ddot{a}_r^{(12)}$	$B_x \cdot \frac{D_r^{(\tau)}}{D_x^{(\tau)}} \cdot \ddot{a}_r^{(12)}$	$\sum NC_x$	$\sum AL_x$
规 划 单 位 信 用 成 本 法 PUC	$\beta \cdot S_{r-1} \cdot (x-e) = \beta \cdot (1+s)^{r-1-x} \cdot (x-e)$	$\frac{B_x}{x-e} \cdot \frac{D_r^{(\tau)}}{D_x^{(\tau)}} \cdot \ddot{a}_r^{(12)}$	$B_x \cdot \frac{D_r^{(\tau)}}{D_x^{(\tau)}} \cdot \ddot{a}_r^{(12)}$	$\sum NC_x$	$\sum AL_x$
进 入 年 龄 正 常 成 本 法(均 衡 货 币 EAN)	同 UC	$NC \cdot \ddot{a}_{e:r-e}^{(\tau)} = B_r \cdot v^{r-e} \cdot {}_{r-e}p_e^{(\tau)} \cdot \ddot{a}_r^{(12)}$ 或 $NC \left(\frac{N_e^{(\tau)} - N_r^{(\tau)}}{D_e^{(\tau)}} \right) = B_r \cdot \frac{D_r^{(\tau)}}{D_e^{(\tau)}} \cdot \ddot{a}_r^{(12)}$	$B_r \cdot \frac{D_r^{(\tau)}}{D_x^{(\tau)}} \cdot \ddot{a}_r^{(12)} - NC \left(\frac{N_x^{(\tau)} - N_r^{(\tau)}}{D_x^{(\tau)}} \right)$ 过去法: $AL_0 = NC \left(\frac{N_e^{(\tau)} - N_x^{(\tau)}}{D_x^{(\tau)}} \right)$	$\sum NC$	$\sum pv_0 B - \sum pv_0 NC$
成 为 工 资 的 均 衡 百 分 比	同 UC	$NC_e = U_e \cdot S_e$ $NC_x = U_e \cdot S_x$	$AL_x = pv_x B - pv_x NC$ $= pv_x B - U_e \cdot S_x \cdot \ddot{a}_{x:r-x}^s$	$\sum NC_x$	$\sum pv_x B - \sum U_e \cdot S_x \cdot \ddot{a}_{x:r-x}^s$

方法	B_x	NC_x	AL_x	TNC	TAL
进入年龄正常成本法（均衡百分比）	同UC	$NC_x = US_x$ $= U \cdot S_e \cdot (1+s)^{x-e}$ $= NC_e \cdot (1+s)^{x-e}$ $NC_e \cdot \ddot{a}_{e:r-e}^s = U \cdot S_e \cdot \ddot{a}_{e:r-e}^s = B_r \cdot \frac{D_r^{(r)}}{D_e^{(r)}} \cdot \ddot{a}_r^{(12)}$	$B_r \cdot \frac{D_r^{(r)}}{D_x^{(r)}} \cdot \ddot{a}_r^{(12)} - U \cdot S_x \cdot \left(\frac{{}_sN_x - {}_sN_r}{{}_sD_x} \right)$	$\sum NC_x$	$\sum AL_x$
个体均衡保费法 ILP	同UC	$NC_a \cdot \left(\frac{N_a - N_r}{D_a} \right) = B_r \cdot \frac{D_r}{D_e} \cdot \ddot{a}_r^{(12)}$ $\Delta NC \cdot \left(\frac{N_a - N_r}{D_a} \right) = \Delta B_r \cdot \frac{D_r}{D_e} \cdot \ddot{a}_r^{(12)}$	$B_r \cdot \frac{D_r}{D_x} \cdot \ddot{a}_r^{(12)} - TNC \cdot \left(\frac{N_x - N_r}{D_x} \right)$ $\text{过去法 } NC \cdot \left(\frac{N_a - N_x}{D_x} \right)$	$\sum NC_x$	$\sum AL_x$
个体聚合成本法	同UC	$pvNC = pvB - F^p$ $\Rightarrow NC = \frac{pvB - F^p}{\ddot{a}_{x:r-x}}$	过去法 $NC \cdot \left(\frac{N_e - N_x}{D_x} \right)$	$\sum NC_x$	$\sum AL_x$
聚合成本法	同UC	$\frac{TNC}{n}$	过去法 $NC \cdot \left(\frac{N_e - N_x}{D_x} \right)$	$TNC \cdot \ddot{a} = \sum pvB - F$ $\Rightarrow TNC = U \cdot \sum S_x$ <p>当 $\sum S_x = n$, 变为均衡货币形式</p> $\ddot{a} = \frac{\sum \left(\frac{{}_sN_x - {}_sN_r}{{}_sD_x} \right) \cdot S_x}{\sum S_x}$	$\sum pv_0B - \sum pv_0NC$

个体聚合成本法中在职参加者的基金余额按以下方法求得：

① 总余额除以参加者人数 ② 总余额乘以规划给付现值的比例 ③ 总余额乘以应计给付现值的比例 ④ 总余额按 AL^{EAN} 或 AL^{ILP} 划分

方法	B_x	NC_x	AL_x	TNC	TAL
冻结初始 负 债 法 (进入年 龄) [FIL (EAN)]		$NC_t \cdot \ddot{a}_t^s = pv_t B - UAL_t - F_t$	$AL_t = pv_t B - NC_t \ddot{a}_t^s$ $= UAL_t + F_t$	$TNC_0 \cdot \frac{1}{n} \cdot \sum \frac{N_x - N_r}{D_x} = \sum pv_0 B - FIL - F_0$ $FIL = UAL_0 = \sum pv_0 B - \sum NC \cdot \ddot{a}_0^s = AL_0^{EAN}$	$\sum pvB - pvTNC$
冻结初始 负 债 法 (到达年 龄) [FIL (AAN)]		TNC/n	$AL_t = pv_t B - NC_t \ddot{a}_t^s$ $= UAL_t + F_t$	$TNC_0 \cdot \ddot{a}_0^s = \sum pv_0 B - FIL - F_0$ $FIL = UAL_0 = AL_0^{UC}$	
聚合进入 年龄成本 法		$NC_e \cdot \frac{pv_e S}{S_e} = pv_e B_r$ $\Rightarrow NC_e = \frac{pv_e B_r}{pv_e S} \cdot S_e = U_e \cdot S_e$ $NC_x = U_e \cdot S_x$	$pv_x B - pv_x NC$	$TNC_x = U_e \cdot \sum S_x = \frac{pv_e B_r}{pv_e S} \cdot \sum S_x$ $TNC_x = U \cdot \sum S_x = \frac{\sum pv_e B_r}{\sum pv_e S} \cdot \sum S_x$	$TAL_x = \sum pv_x B_r - U_e \cdot \sum S_x \cdot \frac{{}^s N_x - {}^s N_r}{{}^s D_x}$ $TAL_x = \sum pv_x B_r - U \cdot \sum S_x \cdot \frac{{}^s N_x - {}^s N_r}{{}^s D_x}$

冻结初始负债在 t 内以均衡货币的方式分摊 $SL = UAL_0 \cdot \ddot{a}_{\overline{t}|}$

①如果期初捐纳金等于正常成本加上附加成本，分摊规律： $UAL_1 = SC \cdot \ddot{a}_{\overline{1}|}$; $UAL_2 = SC \cdot \ddot{a}_{\overline{2}|}$; $\cdots UAL_t = SC \cdot \ddot{a}_{\overline{t}|} = 0$

②如果期初捐纳金大于正常成本和附加成本之和，则分摊期小于 t， $UAL_1 = (UAL_0 + NC_0)(1+i) - {}^i C$

$$F_t = F_{t-1} + C - BEN + {}^{\text{act}} I$$

在本方法下，时点 0 为年初，时点 1 为年末，则

$$AL_1 = pv_1 B - NC_1 \ddot{a}^s = UAL_1 + F_1;$$

$${}^{\text{exp}} F_1 = (F_0 + NC_0 + SC_0)(1+i) - {}^i BEN; {}^{\text{exp}} UAL_1 = (UAL_0 + NC_0)(1+i) - {}^i C = (UAL_0 - SC_0)(1+i)$$

$${}^{\text{exp}} AL_1 = {}^{\text{exp}} F_1 + {}^{\text{exp}} UAL_1$$

$${}^{\text{act}} UAL_1 = (UAL_0 + NC_0)(1+i) - {}^i C - G_1$$

$$G_1 = {}^{\text{exp}} UAL_1 - {}^{\text{act}} UAL_1$$

第十章 中国寿险业精算实践标准及实例

一、关于保费计算的精算规定

1. 寿险保单的预定利率不超过年复利 2.5%
2. 有关新生命表使用的政策的内容：
 - ✱ 在厘定保险费时，自行决定采用的预定死亡率
 - ✱ 保单现金价值计算用生命表采用定价生命表
 - ✱ 进行法定准备金评估必须采用新生命表
 - ✱ 新生命表使用政策于 2006 年 1 月 1 日起生效
3. 趸交保费方式的直接佣金比例不超过 4%

期交保费方式的直接佣金总额占保费总额的比例不超过 5%

二、保单年度末保单价值准备金

保单年度末保单价值准备金指为计算保单年度末保单最低现金价值，按照本条所述计算基础和计算方法算得的准备金数值。

（一）计算基础

1. 费用率和死亡率采用险种报备时厘定保险费所使用的预定附加费用率和预定死亡率；
2. 利息率采用险种报备时厘定保险费所使用的预定利息率加上 2%。
3. 对于保险期限小于 10 年的分红保险产品，利息率采用险种报备时厘定保险费所使用的预定利息率加 1%；对于保险期限等于或大于 10 年的分红保险产品，利息率采用险种报备时厘定保险费所使用的预定利息率加 2%。

（二）计算方法

1. 根据该保单的保险责任和各保单年度纯保费按上述计算基础计算。
2. 保单各保单年度纯保费为该保单年度的毛保费扣除险种报备时厘定保险费所采用的该保单年度的预定附加费用。

（三）保单年度末保单价值准备金不包括该保单在保单年度末的生存给付金额。

保单年度末保单最低现金价值是保险公司确定人寿保险保单现金价值最低标准，其计算公式为：

$$r \times \max(\text{保单年度末保单价值准备金}, 0)$$

系数 r 按下列公式计算：

$$r = k + \frac{t \times (1 - k)}{\min(20, n)} \quad t < \min(20, n)$$
$$r = 1 \quad t \geq \min(20, n)$$

其中： 1. n 为保单交费期间（趸交保费时， $n = 1$ ）。

2. t 为保单经过的保单年度， $t = 1, 2, \dots$ 。

3. 参数 k 按下表取值：

k 值		
	两全保险、年金保险	定期死亡保险、终身死亡保险
期交 个人 业务	90%	80%
期交 团体 业务	95%	85%
趸交 个人 业务	100%	100%
趸交 团体 业务	100%	100%