单元测试一 行列式

一、选择题

1、设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} 2a_{11} & a_{13} & a_{11}+a_{12} \\ 2a_{21} & a_{23} & a_{21}+a_{22} \\ 2a_{31} & a_{33} & a_{31}+a_{32} \end{bmatrix}$,

且 $|A|=m$，则 $|B|=$

（A）m.　　（B）$-8m$.　　（C）$2m$.　　（D）$-2m$.

2、设 n 阶矩阵 $A=[\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n]$，$B=[\alpha_n, \alpha_1, \cdots, \alpha_{n-1}]$，若行列式 $|A|=1$，则 $|A-B|=$

（A）0.　　（B）2.

（C）$1+(-1)^{n+1}$.　　（D）$1+(-1)^{n}$.

3、下列 n 阶行列式中，取值必为 -1 的是

（A）$\begin{vmatrix} & & & & 1 \\ & & & 1 & \\ & & \iddots & & \\ & 1 & & & \\ 1 & & & & \end{vmatrix}$.　　（B）$\begin{vmatrix} 1 & 1 & & & \\ & 1 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & 1 \\ 1 & & & & 1 \end{vmatrix}$.

（C）$\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{vmatrix}$.　　（D）$\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}$.

4、设 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2$，均为四维列向量，$A=[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1]$，$B=[\alpha_3, \alpha_1, \alpha_2, \beta_2]$，且 $|A|=1$，$|B|=2$，则 $|A+B|=$

（A）9.　　（B）6.　　（C）3.　　（D）1.

5、已知 $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \gamma$ 都是 3 维列向量，且行列式

$$|\alpha_1 \ \beta_1 \ \gamma|=|\alpha_1 \ \beta_2 \ \gamma|=|\alpha_2 \ \beta_1 \ \gamma|=|\alpha_2 \ \beta_2 \ \gamma|=3,$$

那么 $|-2\gamma \ \ a_1+a_2 \ \ \beta_1+2\beta_2|=$

（A）-18.　　（B）-36.　　（C）64.　　（D）-96.

二、填空题

1、$\begin{vmatrix} 1 & a & 0 & 0 \\ -1 & 2-a & a & 0 \\ 0 & -2 & 3-a & a \\ 0 & 0 & -3 & 4-a \end{vmatrix}=$_____.

新东方在线www.koolearn.com

2、行列式 $D=\begin{vmatrix} 9 & 8 & 7 & 6 \\ 1 & 2^2 & 3^2 & 4^2 \\ 1 & 2^3 & 3^3 & 4^3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}=$_____.

3、设 $A=[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3]$是 3 阶矩阵，且｜$A$｜＝4．若 $B=[\alpha_1-3\alpha_2+2\alpha_3,\alpha_2-2\alpha_3,2\alpha_2+\alpha_3]$，则｜$B$｜＝_____.

4、设四阶方阵 $A=[\alpha,\gamma_2,\gamma_3,\gamma_4]$，$B=[\beta,\gamma_2,\gamma_3,\gamma_4]$，其中$\alpha,\beta,\gamma_2,\gamma_3,\gamma_4$均为四维列向量，且｜$A$｜＝4，｜$B$｜＝－1，则｜$A-3B$｜＝_____.

5、设四阶行列式$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 4 & 6 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \end{vmatrix}$，则 $A_{11}+2A_{21}+A_{31}+2A_{41}=$_____.

三、计算题与证明题

1、计算行列式 $D=\begin{vmatrix} 1 & b_1 & 0 & 0 \\ -1 & 1-b_1 & b_2 & 0 \\ 0 & -1 & 1-b_2 & b_3 \\ 0 & 0 & -1 & 1-b_3 \end{vmatrix}$的值.

2、计算行列式 $D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 2 & 2 & 3 & \cdots & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & n \end{vmatrix}$的值.

3、已知$\begin{vmatrix} \lambda-17 & 2 & -7 \\ 2 & \lambda-14 & 4 \\ 2 & 4 & \lambda-14 \end{vmatrix}=0$，求$\lambda$的值.

4、A 是 n 阶可逆矩阵，A 与 A^{-1}的元素都是整数，证明：|A|=±1.

5、设 A 是 n 阶矩阵，证明存在非 0 的 n 阶矩阵 B 使 AB=0 的充分必要条件是|A|=0.

单元测试二 矩阵

一、选择题

1、设矩阵 $\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$，矩阵 B 满足 $AB+B+A+2E=0$，则｜$B+E$｜＝

（A）－6.　　（B）6.　　（C）$-\dfrac{1}{12}$.　　（D）$\dfrac{1}{12}$.

2、已知 $A=\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 5 \end{bmatrix}$，矩阵 B 满足 $A^*B+2A^{-1}=B$，其中 A^*是 A 的伴随矩阵，

则 $|B|=$

（A）$\frac{2}{15}$.　　（B）$\frac{2}{9}$.　　（C）$\frac{1}{30}$.　　（D）$\frac{1}{12}$.

3、设 A 为三阶方阵，A^*为 A 的伴随矩阵，$|A|=\frac{1}{3}$，则$|4A-(3A^*)^{-1}|=$

（A）$\frac{1}{3}$.　　（B）3.　　（C）6.　　（D）9.

4、设 $A=\begin{bmatrix}0&0&5&2\\0&0&2&1\\1&3&0&0\\1&2&0&0\end{bmatrix}$，则 $A^{-1}=$

（A）$\begin{bmatrix}0&0&1&-2\\0&0&-2&5\\2&-3&0&0\\-1&1&0&0\end{bmatrix}$.　　（B）$\begin{bmatrix}0&0&-2&3\\0&0&1&-1\\1&-2&0&0\\-2&5&0&0\end{bmatrix}$.

（C）$\begin{bmatrix}0&0&1&-3\\0&0&-1&2\\1&-2&0&0\\-2&5&0&0\end{bmatrix}$.　　（D）$\begin{bmatrix}0&0&-1&3\\0&0&1&-2\\-1&2&0&0\\2&-5&0&0\end{bmatrix}$.

5、设 A、B 均为 n 阶可逆矩阵，且 $(A+B)^2=E$，则 $(E+BA^{-1})^{-1}=$

（A）$(A+B)B$.　　（B）$E+AB^{-1}$.

（C）$A(A+B)$.　　（D）$(A+B)A$.

二、填空题

1、若 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&2&0\\3&4&0\\0&0&5\end{bmatrix}$，则矩阵 A 的伴随矩阵 $A^*=$_____.

2、已知$\alpha_1=(1,0,0)^T$，$\alpha_2=(1,2,-1)^T$，$\alpha_3=(-1,1,0)^T$且 $A\alpha_1=(2,1)^T$，$A\alpha_2=(-1,1)^T$，$A\alpha_3=(3,-4)^T$，则 $A=$_____.

3、设 A，B 均为三阶矩阵，E 是三阶单位矩阵，已知 $AB=2A+3B$，$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}9&0&-6\\0&15&0\\0&0&21\end{bmatrix}$，则 $(B-2E)^{-1}=$_____.

4、设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&0&0\\6&1&0\\3&6&1\end{bmatrix}$, $B=(E-A)(E+2A)^{-1}$，则 $(B-E)^{-1}=$_____.

新东方在线www.koolearn.com

5、已知 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2&0&1\\0&3&0\\2&0&2\end{bmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&0\end{bmatrix}$, 若 X 满足 $AX+2B=BA+2X$，那么 $X^2=$_____.

三、计算题与证明题

1、设 $A^{-1}=\begin{bmatrix}1&1&1\\1&2&1\\1&1&3\end{bmatrix}$，求 $(A^*)^{-1}$.

2、设 $A=\begin{bmatrix}1&1&0&0\\1&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&1&1\end{bmatrix}$，求 A^n.

3、若 A 是对称矩阵，B 是反对称矩阵，则 AB 是反对称矩阵的充要条件是 AB=BA.

4、设 A 是 n 阶矩阵，$A^m=0$，证明 $E-A$ 可逆.

单元测试三 向量组的线性关系与秩

一、选择题

1、设向量组 α，β，γ 线性无关，α，β，δ 线性相关，则

（A）α 必可由 β，γ，δ 线性表示.

（B）β 必不可由 α，γ，δ 线性表示.

（C）δ 必可由 α，β，γ 线性表示.

（D）δ 必不可由 α，β，γ 线性表示.

2、设向量组（Ⅰ）α_1，α_2，α_3，α_4 线性无关，则与向量组（Ⅰ）等价的向量组是

（A）$\alpha_1+\alpha_2$，$\alpha_2+\alpha_3$，$\alpha_3+\alpha_4$，$\alpha_4+\alpha_1$.

（B）$\alpha_1+\alpha_2$，$\alpha_2+\alpha_3$，$\alpha_3+\alpha_4$.

（C）$\alpha_1+\alpha_2$，$\alpha_2-\alpha_3$，$\alpha_3+\alpha_4$，$\alpha_4-\alpha_1$.

（D）α_1，$\alpha_1+\alpha_2$，$\alpha_2+\alpha_3$，$\alpha_3+\alpha_4$，$\alpha_4-\alpha_1$.

3、设向量组 α_1，α_2，α_3 线性无关，则下列向量组中线性无关的是

（A）$\alpha_1-\alpha_2$，$\alpha_2-\alpha_3$，$\alpha_3-\alpha_1$.

（B）$\alpha_1-\alpha_2$，$\alpha_2+\alpha_3$，$\alpha_3+\alpha_1$.

（C）$\alpha_1+\alpha_2$，$3\alpha_1-5\alpha_2$，$5\alpha_1+9\alpha_2$.

（D）$\alpha_1+\alpha_2$，$2\alpha_1+3\alpha_2+4\alpha_3$，$\alpha_1-\alpha_2-2\alpha_3$.

新东方在线www.koolearn.com

4、向量组α_1=（1，3，5，－1）^{T}，α_2=（2，－1，－3，4）^{T}，α_3=（6，4，4，6）^{T}，α_4=（7，7，9，1）^{T}，α_5=（3，2，2，3）^{T}的极大线性无关组是

（A）$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_5$. （B）$\alpha_1$，$\alpha_3$，$\alpha_5$. （C）$\alpha_2,\alpha_3$，$\alpha_4$. （D）$\alpha_3$，$\alpha_4,\alpha_5$.

5、设向量组Ⅰ：α_1，$\alpha_2,\cdots$，α_r可由向量组Ⅱ：$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$线性表示，则

（A）当 r<s 时，向量组（Ⅱ）必线性相关.

（B）当 r>s 时，向量组（Ⅱ）必线性相关.

（C）当 r<s 时，向量组（Ⅰ）必线性相关.

（D）当 r>s 时，向量组（Ⅰ）必线性相关.

二、填空题

1、向量组$\alpha_1=(1,0,1,2)^T$，$\alpha_2=(1,1,3,1)^T$，$\alpha_3=(2,-1,a+1,5)^T$线性相关，则 a=_____.

2、已知向量组α_1=（1，2，－1，1）^{T}，α_2=（2，0，t，0）^{T}，α_3=（0，－4，5，t）^{T}线性无关，则 t 的取值为_____.

3、已知α_1=（1，4，2）^{T}，α_2=（2，7，3）^{T}，α_3=（0，1，a）^{T}可以表示任意一个三维向量，则 a 的取值为_____.

4、设 4 阶矩阵 A 的秩为 2，则$r(A^*)=$_____.

5、与$\alpha_1=(1,-1,0,2)^T$，$\alpha_2=(2,3,1,1)^T$，$\alpha_3=(0,0,1,2)^T$都正交的单位向量是_____.

三、计算题与证明题

1、如果秩$r(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)=r(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s,\alpha_{s+1})$，证明$\alpha_{s+1}$可由$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性表出.

2、已知向量组$\beta_1=\begin{bmatrix}0\\1\\-1\end{bmatrix}$，$\beta_2=\begin{bmatrix}a\\2\\1\end{bmatrix}$，$\beta_3=\begin{bmatrix}b\\1\\0\end{bmatrix}$与$\alpha_1=\begin{bmatrix}1\\2\\-3\end{bmatrix}$，$\alpha_2=\begin{bmatrix}3\\0\\1\end{bmatrix}$，$\alpha_3=\begin{bmatrix}9\\6\\-7\end{bmatrix}$有相同的秩，且$\beta_3$可由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表出，求 a，b 的值.

3、已知线性方程组

$$\begin{cases}a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3+a_4x_4=a_5,\\b_1x_1+b_2x_2+b_3x_3+b_4x_4=b_5,\\c_1x_1+c_2x_2+c_3x_3+c_4x_4=c_5,\\d_1x_1+d_2x_2+d_3x_3+d_4x_4=d_5\end{cases}$$

的通解是$(2,1,0,3)^T+k(1,-1,2,0)^T$，如今$\alpha_i=(a_i,b_i,c_i,d_i)^T,i=1,2,\cdots,5.$

试问：（Ⅰ）α_1能否由$\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$线性表出？

（Ⅱ）α_4能否由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表出？并说明理由.

单元测试四 线性方程组

一、选择题

1、某五元齐次线性方程组经高斯消元系数矩阵化为$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 & -4 \\ & & 1 & 5 & -2 \\ & & & 2 & 0 \end{bmatrix}$

自由变量若取为

（1）x_4，x_5　　（2）x_3, x_5　　（3）x_1, x_5　　（4）x_2，x_3

那么，正确的共有

（A）1 个.　　（B）2 个.　　（C）3 个.　　（D）4 个.

2、要使$\xi_1=\begin{bmatrix}1\\0\\2\end{bmatrix}$，$\xi_2=\begin{bmatrix}0\\1\\-1\end{bmatrix}$都是线性方程组$Ax=0$的解，只要系数矩阵$A$为

（A）$\begin{bmatrix}-2 & 1 & 1\\ 4 & -2 & -2\end{bmatrix}$.　　（B）$\begin{bmatrix}2 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix}$.

（C）$\begin{bmatrix}-1 & 0 & 2\\ 1 & 0 & -2\end{bmatrix}$.　　（D）$\begin{bmatrix}0 & 1 & -1\\ 4 & -2 & -2\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix}$.

3、已知α_1，α_2是非齐次线性方程组$Ax=b$的两个不同的解，那么

$$\alpha_1-\alpha_2,\quad 3\alpha_1-2\alpha_2,\quad \frac{1}{3}(\alpha_1+2\alpha_2),\quad \frac{1}{2}(\alpha_1+\alpha_2)$$

中，仍是线性方程组$Ax=b$特解的共有

（A）4 个.　　（B）3 个.　　（C）2 个.　　（D）1 个.

4、已知$\eta_1,\eta_2,\eta_3,\eta_4$是齐次方程组$Ax=0$的基础解系，则此方程组的基础解系还可以是

（A）$\eta_1+\eta_2,\eta_2+\eta_3,\eta_3+\eta_4,\eta_4+\eta_1$.

（B）$\eta_1,\eta_2,\eta_3+\eta_4,\eta_3-\eta_4$.

（C）$\eta_1,\eta_2,\eta_3,\eta_4$是一个等价向量组.

（D）$\eta_1,\eta_2,\eta_3,\eta_4$是一个等秩向量组.

5、设A是$m\times n$矩阵，A^T是A的转置，若η_1，η_2，…，η_t是齐次方程组$A^Tx=0$的基础解系，则秩$r(A)=$

（A）t.　　（B）$n-t$.　　（C）$m-t$.　　（D）$n-m$.

二、填空题

1、设A是五阶矩阵，A^*是A的伴随矩阵，若η_1，η_2是齐次线性方程组$Ax=0$的两个坐标不成比例的解，那么秩$r(A^*)=$_____.

2、已知方程组$\begin{cases}2x_1+\lambda x_2-x_3=b_1,\\ \lambda x_1-x_2+x_3=b_2,\\ 4x_1+5x_2-5x_3=b_3\end{cases}$ 总有解，则λ应满足_____.

3、已知齐次线性方程组$\begin{cases} ax_1-3x_2+3x_3=0 \\ x_1+(a+2)x_2+3x_3=0. \\ 2x_1+x_2-x_3=0 \end{cases}$有无穷多解，则 a=_____.

4、设 A 为三阶非零矩阵，$B=\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 4 & t & 3 \\ -3 & -1 & 1 \end{bmatrix}$，且 $AB=0$，则 $Ax=0$ 的通解是_____.

5、已知非齐次线性方程组（Ⅰ）与（Ⅱ）同解，其中

（Ⅰ）$\begin{cases} x_1+x_2-2x_3=5 \\ x_2+x_3=2 \end{cases}$　　（Ⅱ）$\begin{cases} ax_1+4x_2+x_3=11 \\ 2x_1+5x_2-ax_3=16 \end{cases}$

则 a=_____.

三、计算题与证明题

1、求齐次方程组$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=0, \\ 3x_1+2x_2+ax_3-3x_4=0, \\ 5x_1+4x_2+3x_3-x_4=0 \end{cases}$的基础解系.

2、设 $A=\begin{bmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 0 & \lambda-1 & 0 \\ 1 & 1 & \lambda \end{bmatrix}$，$b=\begin{bmatrix} a \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. 已知线性方程组 $Ax=b$ 存在 2 个不同的解，

（Ⅰ）求 λ, a；

（Ⅱ）求方程组 $Ax=b$ 的通解.

3、设齐次方程组

$$\begin{cases} ax_1+bx_2+bx_3+\cdots+bx_n=0, \\ bx_1+ax_2+bx_3+\cdots+bx_n=0, \\ \qquad\qquad \cdots \\ bx_1+bx_2+bx_3+\cdots+ax_n=0, \end{cases}$$

其中 $a\neq 0, b\neq 0, n\geq 2$. 试讨论 a，b 为何值时，方程组仅有零解，有无穷多解？当有无穷多解时，求出其全部解，并用基础解系表示全部解.

4、证明：与基础解系等价的线性无关的向量组也是基础解系.

单元测试五 特征向量和特征值 相似和对角化

一、选择题

1、已知 A 是 4 阶矩阵，A^*是 A 的伴随矩阵，若 A^*的特征值是 1，－1，2，4，那么不可逆矩阵是

（A）$A-E$.　　（B）$2A-E$.

（C）$A+2E$.　　（D）$A-4E$.

2、已知α＝（1，－2，3）^{T}是矩阵 A＝$\begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ a & -2 & 2 \\ 3 & b & -1 \end{bmatrix}$的特征向量，则

（A）$a=-2$，$b=6$.　　（B）$a=2$，$b=-6$.

（C）$a=2$，$b=6$.　　（D）$a=-2$，$b=-6$.

3、设 A 是三阶矩阵，其特征值是 1，3，－2，相应的特征向量依次为 α_1，α_2，α_3，若 $P=(\alpha_1, 2\alpha_3, -\alpha_2)$，则 $P^{-1}AP=$

（A）$\begin{bmatrix} 1 & & \\ & -2 & \\ & & 3 \end{bmatrix}$.　　（B）$\begin{bmatrix} 1 & & \\ & -4 & \\ & & -3 \end{bmatrix}$.

（C）$\begin{bmatrix} 1 & & \\ & -2 & \\ & & -3 \end{bmatrix}$.　　（D）$\begin{bmatrix} 1 & & \\ & 3 & \\ & & -2 \end{bmatrix}$.

4、下列矩阵中，不能相似对角化的矩阵是

（A）$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & 5 \end{bmatrix}$.　　（B）$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ -1 & 5 & -1 \end{bmatrix}$.

（C）$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & -2 \\ -3 & 0 & 3 \end{bmatrix}$.　　（D）$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$.

5、设 A 是 n 阶非零矩阵，$A^m=0$，下列命题中不一定正确的是

（A）A 的特征值只有零.

（B）A 必不能对角化.

（C）$E+A+A^2+\cdots+A^{m-1}$ 必可逆.

（D）A 只有一个线性无关的特征向量.

二、填空题

1、已知 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix}$，$A^*$ 是 A 的伴随矩阵，那么 A^* 的特征值是_____.

2、设 A 是 3 阶矩阵，且各行元素之和都是 5，则 A 必有特征向量_____.

3、已知三阶矩阵 A 的特征值是 $\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4}$，又三阶矩阵 B 满足关系式 $A^{-1}BA=6A+BA$. 则矩阵 B 的特征值是_____.

4、已知矩阵 $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & -3 & a \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ 有两个线性无关的特征向量，则 $a=$_____.

5、已知 α 是 3 维列向量，α^T 是 α 的转置，若矩阵 $\alpha\alpha^T$ 相似于 $\begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$，则 $\alpha^T\alpha=$_____.

新东方在线www.koolearn.com

三、计算题与证明题

1、已知 $A=\begin{bmatrix}-4 & -10 & 0\\ 1 & 3 & 0\\ 3 & x & 1\end{bmatrix}$ 可对角化，求可逆矩阵 P 及对角矩阵 Λ，使 $P^{-1}AP=\Lambda$.

2、设矩阵 A 与 B 相似，且 $A=\begin{bmatrix}1 & -1 & 1\\ 2 & 4 & -2\\ -3 & -3 & a\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & b\end{bmatrix}$.求可逆矩阵 P，使 $P^{-1}AP=B$.

3、已知 $A\alpha_i=i\alpha_i(i=1,2,3)$，其中 $\alpha_1=(1,2,2)^T,\alpha_2=(2,-2,1)^T,\alpha_3=(-2,-1,2)^T$.求矩阵 A.

4、已知 $A^2=0$，$A\neq 0$，证明 A 不能相似对角化.

单元测试六 二次型

一、选择题

1、二次型 f（x_1，x_2，x_3）$=x_1^2+5x_2^2+x_3^2-4x_1x_2+2x_2x_3$ 的标准形可以是

（A）$y_1^2+4y_2^2$.　　（B）$y_1^2-6y_2^2-2y_3^2$.

（C）$y_1^2-y_2^2$.　　（D）$y_1^2+4y_2^2+y_3^2$.

2、下列矩阵中，正定矩阵是

（A）$\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 4 & 5\\ 3 & 5 & 6\end{bmatrix}$.　　（B）$\begin{bmatrix}1 & 2 & 0\\ 2 & 5 & 3\\ 0 & 3 & 8\end{bmatrix}$.

（C）$\begin{bmatrix}2 & 2 & -2\\ 2 & 5 & -4\\ -2 & -4 & 5\end{bmatrix}$.　　（D）$\begin{bmatrix}5 & 2 & 1\\ 2 & 1 & 3\\ 1 & 3 & 0\end{bmatrix}$.

3、设 $A=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}3 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$，则 A 与 B

（A）合同且相似.　　（B）合同但不相似.

（C）不合同但相似.　　（D）不合同也不相似.

4、二次型 x^TAx 正定的充要条件是

（A）负惯性指数为零.　　（B）存在可逆矩阵 P，使 $P^{-1}AP=E$.

（C）A 的特征值全大于零.　　（D）存在 n 阶矩阵，使 $A=C^TC$.

5、设 A，B 均是 n 阶实对称矩阵，若 A 与 B 合同，则

（A）A 与 B 有相同的特征值.　　（B）A 与 B 有相同的秩.

（C）A 与 B 有相同的特征向量.　　（D）A 与 B 有相同的行列式.

二、填空题

1、若二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = ax_1^2 + 4x_2^2 + ax_3^2 + 6x_1x_2 + 2x_2x_3$ 是正定的，则 a 的取值范围是_____.

2、设 $\alpha = (1, 0, 1)^T$，$A = \alpha\alpha^T$，若 $B = (kE + A)^*$ 是正定矩阵，则 k 的取值范围是_____.

3、二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 + (x_3 + x_1)^2$ 的正、负惯性指数分别为 $p =$_____，$q =$_____.

4、已知矩阵 $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ 与二次型 $x^T Bx = 3x_1^2 + ax_3^2$ 的矩阵 B 合同，则 a 的取值_____.

5、已知 $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} & & 1 \\ & 1 & \\ 1 & & \end{bmatrix}$ 和 $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & & \\ & 1 & \\ & & -2 \end{bmatrix}$ 合同，那么使 $C^TAC = B$ 的可逆矩阵 $C =$_____.

三、计算题与证明题

1、设 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$，$B = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$，则有 $A \simeq B$.

2、求正交变换化二次型 $2x_3^2 - 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_2x_3$ 为标准形，并写出所用正交变换.

3、二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = 5x_1^2 + 5x_2^2 + cx_3^2 - 2x_1x_2 - 6x_2x_3 + 6x_1x_3$ 的秩为 2，求 c 及此二次型的规范形，并写出相应的坐标变换.

4、已知 $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ 是正定矩阵，证明 $\Delta = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} > 0$

新东方在线www.koolearn.com