新东方在线 2013 基础阶段测试

线性代数部分

考试时间：150 分钟　　试卷分数：100 分

学员姓名_____　　反馈时间_____　　成绩_____

一、选择题（本题共 6 小题，每小题 4 分，满分 24 分，每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求，把所选项前的字母填在题后的括号内。）

1、设 A 是 $m\times n$ 矩阵，B 是 $n\times m$ 矩阵，则　　（　　）

(A) 当 $m>n$ 时，必有行列式 $|AB|\neq 0$　　(B) 当 $m>n$ 时，必有行列式 $|AB|=0$

(C) 当 $n>m$ 时，必有行列式 $|AB|\neq 0$　　(D) 当 $n>m$ 时，必有行列式 $|AB|=0$

2、方程 $f(x)=\begin{vmatrix} x-2 & x-1 & x-2 & x-3 \\ 2x-2 & 2x-1 & 2x-2 & 2x-3 \\ 3x-2 & 3x-2 & 3x-5 & 3x-5 \\ 4x & 4x-3 & 5x-7 & 4x-7 \end{vmatrix}=0$ 根的个数为　　（　　）

(A) 4　　(B) 3　　(C) 2　　(D) 1

3、设 A 为 3 阶矩阵,且 $|A|=-2$,则 $\left|(\frac{1}{12}A)^{-1}+(3A)^{*}\right|=$　　（　　）

(A) -3　　(B) 21　　(C) 54　　(D) 108

4、设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 是 n 维向量，下列命题中正确的是　　（　　）

(A) 若 α_s 不能用 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{s-1}$ 线性表出，则 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性无关

(B) 若 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性相关，α_s 不能由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{s-1}$ 线性表出，则 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{s-1}$ 线性相关

(C) 若 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 中，任意 $s-1$ 个向量都线性无关，则 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性无关

(D) 零向量不能用 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性表出

5、已知 A，B 均是三阶矩阵，将 A 中的第 3 行的-2 倍加至第 2 行得到矩阵 A_1，将 B 中第 2 列加至第 1 列得到矩阵 B_1，又知 $A_1B_1=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$，则 $AB=$　　（　　）

新东方在线www.koolearn.com

$(A)\ \begin{pmatrix}1&0&0\\-2&2&6\\0&0&3\end{pmatrix}$ $(B)\ \begin{pmatrix}1&0&0\\2&2&-6\\0&0&3\end{pmatrix}$ $(C)\ \begin{pmatrix}1&0&0\\-1&2&4\\0&0&3\end{pmatrix}$ $(D)\ \begin{pmatrix}1&0&0\\1&2&-4\\0&0&3\end{pmatrix}$

6、设 A 是 4×3 矩阵，$r(A)=1,\xi_1,\xi_2,\xi_3$ 是非齐次线性方程组 $Ax=b$ 的三个线性无关解，下列哪个是 $Ax=0$ 的基础解系? （　　）

$(A)\ \xi_1+\xi_2+\xi_3$ $(B)\ \xi_1+\xi_2-2\xi_3$ $(C)\ \xi_1+\xi_2,\xi_2+\xi_3$ $(D)\ \xi_2-\xi_1,\ \xi_3-\xi_1$

二、填空题（本小题共 4 小题，每小题 4 分，满分 16 分，把答案填在题中横线上）

7、已知 $D_3=\begin{vmatrix}1&2&3\\2&7&8\\2&2&2\end{vmatrix}$，元素 a_{ij} 的代数余子式记为 A_{ij}，则 $A_{21}+A_{22}+A_{23}=$_____.

8、已知 $\alpha=(1,2,3)$，$\beta=\left(1,\frac{1}{2},\frac{1}{3}\right)$，设 $A=\alpha^T\beta$，其中 α^T 是 α 的转置，则 $A^n=$_____.

9、设 A 是三阶实对称矩阵，满足 $A^3=2A^2+5A-6E$，保证 $kE+A$ 是正定阵，则 k 的取值范围是_____.

10、已知 $A=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&0&1\\0&1&a\end{bmatrix}$ 与 $B=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&b&0\\0&0&-1\end{bmatrix}$ 相似，则 $r(A+E)=$_____.

三、解答题（本题共 6 小题，满分 60 分，解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。）

11、（本小题满分 8 分）

计算 n 阶行列式 $D=\begin{vmatrix}a&b&b&\cdots&b\\b&a&b&\cdots&b\\b&b&a&\cdots&b\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\b&b&b&\cdots&a\end{vmatrix}$.

12、（本小题满分 9 分）

设矩阵 A 满足 $A^2+A-4E=0$，其中 E 为单位矩阵，证明 $(A+2E)$ 可逆，并求 $(A+2E)^{-1}$.

13、（本小题满分 10 分）

设 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，证明 $\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_1$ 线性无关.

新东方在线www.koolearn.com

14、（本小题满分 11 分）

设 $A=\begin{bmatrix}\lambda & 1 & 1\\ 0 & \lambda-1 & 0\\ 1 & 1 & \lambda\end{bmatrix}$，$b=\begin{bmatrix}a\\1\\1\end{bmatrix}$．已知线性方程组 $Ax=b$ 存在 2 个不同的解，

（Ⅰ）求 λ,a；

（Ⅱ）求方程组 $Ax=b$ 的通解.

15、（本小题满分 11 分）

若 $A=\begin{bmatrix}1 & -1 & 1\\ x & 4 & y\\ -3 & -3 & 5\end{bmatrix}$ 有三个线性无关的特征向量，$\lambda=2$ 是二重特征值，求 P 使 $P^{-1}AP=\wedge$.

16、（本小题满分 11 分）

设二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=ax_1^2+ax_2^2+(a-1)x_3^2+2x_1x_3-2x_2x_3,$$

（Ⅰ）求二次型 f 的矩阵的所有特征值；

（Ⅱ）若二次型 f 的规范形为 $y_1^2+y_2^2$，求 a 的值.

新东方在线www.koolearn.com