新东方在线 2013 基础阶段测试

线性代数部分答案

客观题答案快速查询

1	2	3	4	5	6
B	C	D	B	A	D

7、$\underline{0}$；　8、$\underline{3^{n-1}\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 2 & 1 & \frac{2}{3} \\ 3 & \frac{3}{2} & 1 \end{pmatrix}}$；　9、$\underline{k>2}$；　10、$\underline{2}$；

11、$[a+(n-1)b](a-b)^{n-1}$；　12、略，$(A+2E)^{-1}=\frac{1}{2}(A-E)$；

13、略；　14、（Ⅰ）$\lambda=-1$，$a=-2$；（Ⅱ）$(\frac{3}{2},-\frac{1}{2},0)^T+k(1,0,1)^T$，其中$k$是任意常数；

15、$P=\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$；16、（Ⅰ）$\lambda_1=a$，$\lambda_2=a+1$，$\lambda_3=a-2$；（Ⅱ）$a=2$.

详细答案

一、选择题

（1）设A是$m\times n$矩阵，B是$n\times m$矩阵，则　　　（　　）

(A) 当$m>n$时，必有行列式$|AB|\neq 0$　　(B) 当$m>n$时，必有行列式$|AB|=0$

(C) 当$n>m$时，必有行列式$|AB|\neq 0$　　(D) 当$n>m$时，必有行列式$|AB|=0$

【答案】(B)

【考点】行列式的基本性质；矩阵的秩；齐次线性方程组有非零解的充要条件

【解析】**方法 1:** 因为AB是m阶矩阵，$|AB|=0$的充分必要条件是秩$r(AB)<m$.由于$r(AB)\le r(B)\le \min(m,n)$，可见，当$m>n$时，必有$r(AB)\le n<m$.因此选$(B)$.

方法 2: 由于方程组$Bx=0$的解必是方程组$ABx=0$的解，而$Bx=0$是n个方程m个未知数的齐次线性方程组，因此当$m>n$时，$Bx=0$必有非零解，从而$ABx=0$有非零解，故$|AB|=0$.所以选(B).

（2）方程 $f(x)=\begin{vmatrix} x-2 & x-1 & x-2 & x-3 \\ 2x-2 & 2x-1 & 2x-2 & 2x-3 \\ 3x-2 & 3x-2 & 3x-5 & 3x-5 \\ 4x & 4x-3 & 5x-7 & 4x-7 \end{vmatrix}=0$ 根的个数为 （　　）

(A) 4　　(B) 3　　(C) 2　　(D) 1

【答案】(C)

【考点】行列式的性质

【解析】应用行列式性质整理得

$$\begin{vmatrix} x-2 & x-1 & x-2 & x-3 \\ 2x-2 & 2x-1 & 2x-2 & 2x-3 \\ 3x-2 & 3x-2 & 3x-5 & 3x-5 \\ 4x & 4x-3 & 5x-7 & 4x-7 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} x-2 & 1 & 0 & -1 \\ 2x-2 & 1 & 0 & -1 \\ 3x-2 & 0 & -3 & -3 \\ 4x & -3 & x-7 & -7 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} x-2 & 1 & 0 & 0 \\ 2x-2 & 1 & 0 & 0 \\ 3x-2 & 0 & -3 & -3 \\ 4x & -3 & x-7 & -10 \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} x-2 & 1 \\ 2x-2 & 1 \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} -3 & -3 \\ x-7 & -10 \end{vmatrix}=-3x(x+3)$$

$f(x)=0$ 即 $-3x(x+3)=0$，$x=0$ 或 $x=-3$.故 $f(x)=0$ 有两个根，选 (C).

（3）设 A 为 3 阶矩阵，且 $|A|=-2$,则 $\left|(\frac{1}{12}A)^{-1}+(3A)^{*}\right|=$ （　　）

(A) -3　　(B) 21　　(C) 54　　(D) 108

【答案】(D)

【考点】逆矩阵的性质；伴随矩阵；行列式的性质

【解析】由公式 $(kA)^{-1}=\frac{1}{k}A^{-1}$ 及 $A^{*}=|A|A^{-1}$ 有

$$(\frac{1}{12}A)^{-1}=12A^{-1}，(3A)^{*}=|3A|(3A)^{-1}=3^3|A|\cdot\frac{1}{3}A^{-1}=-18A^{-1}$$

故 $\left|(\frac{1}{12}A)^{-1}+(3A)^{*}\right|=\left|12A^{-1}-18A^{-1}\right|=\left|-6A^{-1}\right|=(-6)^3\left|A^{-1}\right|=(-6)^3\cdot(-\frac{1}{2})=108$.

（4）设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 是 n 维向量，下列命题中正确的是 （　　）

(A) 若 α_s 不能用 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{s-1}$ 线性表出，则 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性无关

(B) 若 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性相关，α_s 不能由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{s-1}$ 线性表出，则 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{s-1}$ 线性相关

(C) 若 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 中，任意 $s-1$ 个向量都线性无关，则 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性无关

(D) 零向量不能用$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性表出

【答案】(B)

【考点】向量组的线性相关与线性无关

【解析】(A)错。当α_s不能用$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{s-1}$线性表出时，并不保证每一个向量$\alpha_i$

$(i=1,2,\cdots,s-1)$都不能用其余的向量线性表出。例如，$\alpha_1=(1,0),\alpha_2=(2,0)$，$\alpha_3=(0,3)$虽$\alpha_3$不能用$\alpha_1,\alpha_2$线性表出，但$2\alpha_1-\alpha_2+0\alpha_3=0,\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$是线性相关的。

(C)错。如$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性无关，可知它的任何一个部分组均线性无关。但任一部分组线性无关并不能保证该向量组线性无关。例如$e_1=(1,0,\cdots,0)$，$e_2=(0,1,\cdots,0),\cdots,$

$e_n=(0,0,\cdots,1),\ \alpha=(1,1,\cdots,1)$，其中任意$n$个都是线性无关的，但这$n+1$个向量是线性相关的。

(D)错。在线性表出的定义中，对组合系数没有任何约束条件，因此，零向量可以用任何向量组线性表出，最多组合系数全取为 0，即$0=0\alpha_1+0\alpha_2+\cdots+0\alpha_s$。

关于(B)，由于$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性相关，故存在不全为 0 的$k_i(i=1,2,\cdots,s)$，使

$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s=0$。显然，$k_s=0$（否则$\alpha_s$可由$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{s-1}$线性表出），因此$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{s-1}$线性相关。

（5）已知A，B均是三阶矩阵，将A中的第 3 行的-2 倍加至第 2 行得到矩阵A_1，将B中第 2 列加至第 1 列得到矩阵B_1，又知$A_1B_1=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{bmatrix}$，则$AB=$ （ ）

$(A)\begin{pmatrix}1&0&0\\-2&2&6\\0&0&3\end{pmatrix}$ $(B)\begin{pmatrix}1&0&0\\2&2&-6\\0&0&3\end{pmatrix}$ $(C)\begin{pmatrix}1&0&0\\-1&2&4\\0&0&3\end{pmatrix}$ $(D)\begin{pmatrix}1&0&0\\1&2&-4\\0&0&3\end{pmatrix}$

【答案】(A)

【考点】矩阵的初等变换；初等矩阵

【解析】A经行初等变换得到A_1，故$A_1=PA$，P是初等矩阵，类似地$B_1=BQ$，可构造出$A_1B_1=PABQ$.

据已知条件，令$P=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&-2\\0&0&1\end{bmatrix}$，$Q=\begin{bmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$,

则 $A_1=PA$，$B_1=BQ$.那么 $A_1B_1=PABQ$，

于是 $AB=P^{-1}A_1B_1Q^{-1}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&2\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\-2&2&6\\0&0&3\end{bmatrix}$.

（6）设 A 是 4×3 矩阵，$r(A)=1,\xi_1,\xi_2,\xi_3$ 是非齐次线性方程组 $Ax=b$ 的三个线性无关解，下列哪个是 $Ax=0$ 的基础解系?（　　）

(A) $\xi_1+\xi_2+\xi_3$　　(B) $\xi_1+\xi_2-2\xi_3$　　(C) $\xi_1+\xi_2,\xi_2+\xi_3$　　(D) $\xi_2-\xi_1,\xi_3-\xi_1$

【答案】(D)

【考点】齐次线性方程组的基础解系

【解析】 设 A 是 4×3 矩阵，$r(A)=1$ 故可知基础解系中含有 2 个解向量，故排除 A，B，又 $A(\xi_1+\xi_2)=2b$,$A(\xi_2+\xi_3)=2b$，可知 $\xi_1+\xi_2,\xi_2+\xi_3$ 均不是 $Ax=0$ 的解，排除 C,故选 D .

二、填空题

（7）已知 $D_3=\begin{vmatrix}1&2&3\\2&7&8\\2&2&2\end{vmatrix}$，元素 a_{ij} 的代数余子式记为 A_{ij}，则 $A_{21}+A_{22}+A_{23}=$__________.

【答案】0

【考点】代数余子式求和

【解析】由行列式展开定理的推论得 $a_{31}A_{21}+a_{32}A_{22}+a_{33}A_{23}=0$，即 $2(A_{21}+A_{22}+A_{23})=0$。故 $A_{21}+A_{22}+A_{23}=0$.

（8）已知 $\alpha=(1,2,3)$，$\beta=\left(1,\frac{1}{2},\frac{1}{3}\right)$，设 $A=\alpha^T\beta$，其中 α^T 是 α 的转置，则 $A^n=$______________.

【答案】$3^{n-1}\begin{pmatrix}1&\frac{1}{2}&\frac{1}{3}\\2&1&\frac{2}{3}\\3&\frac{3}{2}&1\end{pmatrix}$

【考点】向量的内积

【解析】因为 $\beta\alpha^T=\left(1,\frac{1}{2},\frac{1}{3}\right)\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}=3$，

而 $A=\alpha^T\beta=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\left(1,\frac{1}{2},\frac{1}{3}\right)=\begin{pmatrix}1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3}\\ 2 & 1 & \frac{2}{3}\\ 3 & \frac{3}{2} & 1\end{pmatrix}$，于是

$$A^n=\alpha^T\beta\ldots\alpha^T\beta=\alpha^T(\beta\alpha^T)\ldots(\beta\alpha^T)\beta=3^{n-1}\alpha^T\beta=3^{n-1}\begin{pmatrix}1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3}\\ 2 & 1 & \frac{2}{3}\\ 3 & \frac{3}{2} & 1\end{pmatrix}$$

（9）设 A 是三阶实对称矩阵，满足 $A^3=2A^2+5A-6E$，保证 $kE+A$ 是正定阵，则 k 的取值范围是 __________.

【答案】$k>2$

【考点】求矩阵的特征值；正定矩阵的判别法

【解析】由题设条件 $A^3=2A^2+5A-6E$，即 $A^3-2A^2-5A+6E=O$

设 A 有特征值 λ，则 λ 满足 $\lambda^3-2\lambda^2-5\lambda+6=0$

因式分解得 $\lambda^3-2\lambda^2-5\lambda+6=(\lambda-1)(\lambda+2)(\lambda-3)=0$

故 A 的特征值的取值范围是 1，-2，3. $kE+A$ 的特征值的取值范围是 $k+1$，$k-2$，$k+3$，当 $k>2$ 时，$kE+A$ 的特征值均大于零，故 $k>2$.

（10）已知 $A=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&0&1\\0&1&a\end{bmatrix}$ 与 $B=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&b&0\\0&0&-1\end{bmatrix}$ 相似，则 $r(A+E)=$__________.

【答案】2

【考点】相似矩阵的性质

【解析】由 $A\sim B$ 知 $\begin{bmatrix}0&1\\1&a\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}b&0\\0&-1\end{bmatrix}$

那么 $\begin{vmatrix}\lambda & -1\\ -1 & \lambda-a\end{vmatrix}\sim\begin{vmatrix}\lambda-b & 0\\ 0 & \lambda+1\end{vmatrix}$

即 $\lambda^2-a\lambda-1=\lambda^2+(1-b)\lambda-b$ 知 $a=0$，$b=1$

又由 $A\sim B$ 知 $A+E\sim B+E$. 那么

$$r(A+E)=r(B+E)=r\begin{bmatrix}3 & & \\ & 2 & \\ & & 0\end{bmatrix}=2.$$

三、解答题

（11）（本小题满分 8 分）

计算 n 阶行列式 $D=\begin{vmatrix}a & b & b & \cdots & b\\ b & a & b & \cdots & b\\ b & b & a & \cdots & b\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ b & b & b & \cdots & a\end{vmatrix}$.

【考点】行列式的性质；行列式的计算

【解析】$\begin{vmatrix}a & b & b & \cdots & b\\ b & a & b & \cdots & b\\ b & b & a & \cdots & b\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ b & b & b & \cdots & a\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a+(n-1)b & a+(n-1)b & \cdots & a+(n-1)b\\ b & a & \cdots & b\\ b & b & \cdots & b\\ \vdots & \vdots & \cdots & \\ b & b & \cdots & a\end{vmatrix}$

↑各行均加至第一行

$$=\left[a+(n-1)b\right]\begin{vmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ b & a & \cdots & b\\ b & b & \cdots & b\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ b & b & \cdots & a\end{vmatrix}=\left[a+(n-1)b\right]\begin{vmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ & a-b & & \\ & & \ddots & \\ & & & a-b\end{vmatrix}$$

↑提公因数　　　　　　↑第 1 行的-b 倍加至各行

$$=\left[a+(n-1)b\right](a-b)^{n-1}$$

↑上三角行列式

（12）（本小题满分 9 分）

设矩阵 A 满足 $A^2+A-4E=0$,其中 E 为单位矩阵，证明 $\left(A+2E\right)$ 可逆，并求 $\left(A+2E\right)^{-1}$.

【考点】逆矩阵的概念

【解析】由　$A^2+A-4E=0$

有　$A^2+A-2E=2E,$

$\left(A-E\right)\left(A+2E\right)=2E,$

也即$\left(A-E\right)\cdot\frac{1}{2}\left(A+2E\right)=E,$

故 $\left(A+2E\right)$可逆，，且$\left(A+2E\right)^{-1}=\frac{1}{2}\left(A-E\right)$

（13）（本小题满分 10 分）

设$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关，证明$\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_1$线性无关.

【考点】向量组线性无关的判别法

【解析】证明：设$k_1(\alpha_1+\alpha_2)+k_2(\alpha_2+\alpha_3)+k_3(\alpha_3+\alpha_1)=0$

$(k_1+k_3)\alpha_1+(k_1+k_2)\alpha_2+(k_2+k_3)\alpha_3=0$

因为$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关，故$\begin{cases}k_1+k_3=0\\k_1+k_2=0\\k_2+k_3=0\end{cases}$ ①

$\begin{vmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&1&1\end{vmatrix}=2\neq0$ 故①只有零解，

故$\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_1$线性无关。

（14）（本小题满分 11 分）

设$A=\begin{bmatrix}\lambda&1&1\\0&\lambda-1&0\\1&1&\lambda\end{bmatrix}$，$b=\begin{bmatrix}a\\1\\1\end{bmatrix}$. 已知线性方程组$Ax=b$存在 2 个不同的解，

（Ⅰ）求λ,a；

（Ⅱ）求方程组$Ax=b$的通解.

【考点】含有参数的方程组解的讨论

【解析】（Ⅰ）因为线性方程组$Ax=b$有 2 个不同的解，所以$r(A)=r(\overline{A})<n$.

由$|A|=\begin{vmatrix}\lambda&1&1\\0&\lambda-1&0\\1&1&\lambda\end{vmatrix}=(\lambda-1)\begin{vmatrix}\lambda&1\\1&\lambda\end{vmatrix}=(\lambda+1)(\lambda-1)^2=0$，

知$\lambda=1$或$\lambda=-1$.

当$\lambda=1$时，必有$r(A)=1,r(\overline{A})=2$.此时线性方程组无解.

而当$\lambda=-1$时，

$\overline{A}=\left[\begin{array}{ccc:c}-1&1&1&a\\0&-2&0&1\\1&1&-1&1\end{array}\right]\rightarrow\left[\begin{array}{ccc:c}1&1&-1&1\\0&-2&0&1\\0&0&0&a+2\end{array}\right]$，

若 $a=-2$，则 $r(A)=r(\overline{A})=2$，方程组 $Ax=b$ 有无穷多解.

故 $\lambda=-1$，$a=-2$.

（Ⅱ）当 $\lambda=-1$，$a=-2$ 时，

$$\overline{A}\to\left[\begin{array}{ccc:c}1&0&-1&\frac{3}{2}\\0&1&0&-\frac{1}{2}\\0&0&0&0\end{array}\right],$$

所以方程组 $Ax=b$ 的通解为 $(\frac{3}{2},-\frac{1}{2},0)^T+k(1,0,1)^T$，其中 k 是任意常数.

（15）（本小题满分 11 分）

若 $A=\begin{bmatrix}1&-1&1\\x&4&y\\-3&-3&5\end{bmatrix}$ 有三个线性无关的特征向量，$\lambda=2$ 是二重特征值，求 P 使 $P^{-1}AP=\wedge$.

【考点】求矩阵的特征值与特征向量

【解析】因为 $A\sim\wedge$，$\lambda=2$ 是二重特征值，故

$$r(2E-A)=3-2=1$$

由于 $2E-A=\begin{bmatrix}1&1&-1\\-x&-2&-y\\3&3&-3\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&1&-1\\2-x&0&-y-2\\0&0&0\end{bmatrix}$

因为秩为 1，故 x=2，y=-2.

A 的特征多项式

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1&1&-1\\-2&\lambda-4&2\\3&3&\lambda-5\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda-2&0&-1\\0&\lambda-2&2\\\lambda-2&\lambda-2&\lambda-5\end{vmatrix}=(\lambda-2)^2(\lambda-6)$$

所以 A 的特征值是 2，2，6

（或由 $2+2+\lambda_3=1+4+5\Rightarrow\lambda_3=6$）

当 $\lambda=2$ 时，解方程 $(2E-A)x=0$.由

$$2E-A=\begin{bmatrix}1&1&-1\\-2&-2&2\\3&3&-3\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&1&-1\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$$

得到特征向量 $\eta_1=(-1,1,0)^T$，$\eta_2=(1,0,1)^T$

当 $\lambda=6$ 时，解方程 $(6E-A)x=0$.由

$$6E-A=\begin{bmatrix}5&1&-1\\-2&2&2\\3&3&1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}-1&1&1\\0&6&4\\0&0&0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&-1&-1\\0&3&2\\0&0&0\end{bmatrix}$$

得到特征向量 $\eta_3=(1,-2,3)^T$

令 $P=(\eta_1,\eta_2,\eta_3)=\begin{bmatrix}-1&1&1\\1&0&-2\\0&1&3\end{bmatrix}$，有 $P^{-1}AP=\begin{bmatrix}2&&\\&2&\\&&6\end{bmatrix}$.

（16）（本小题满分 11 分）

设二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=ax_1^2+ax_2^2+(a-1)x_3^2+2x_1x_3-2x_2x_3,$$

（Ⅰ）求二次型 f 的矩阵的所有特征值；

（Ⅱ）若二次型 f 的规范形为 $y_1^2+y_2^2$，求 a 的值.

【考点】二次型的矩阵表示；求矩阵的特征值；二次型的规范形

【解析】（Ⅰ）二次型 f 的矩阵为

$$A=\begin{bmatrix}a&0&1\\0&a&-1\\1&-1&a-1\end{bmatrix},$$

其特征多项式为

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-a&0&-1\\0&\lambda-a&1\\-1&1&\lambda-a+1\end{vmatrix}=(\lambda-a)[\lambda-(a+1)][\lambda-(a-2)],$$

所以二次型 f 矩阵 A 的特征值为 $\lambda_1=a$，$\lambda_2=a+1$，$\lambda_3=a-2$.

（Ⅱ）因为二次型 f 的规范形是 $y_1^2+y_2^2$，所以二次型矩阵 A 的特征值为：2 个正数，1 个 0.

由于 $a-2<a<a+1$，所以 $a-2=0$，即 $a=2$.