目录

单元测试一 行列式

一、选择题

1、设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}, \boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} 2a_{11} & a_{13} & a_{11}+a_{12} \\ 2a_{21} & a_{23} & a_{21}+a_{22} \\ 2a_{31} & a_{33} & a_{31}+a_{32} \end{bmatrix}$,

且 $|A|=m$，则 $|B|=$

（A）m.　　（B）$-8m$.　　（C）$2m$.　　（D）$-2m$.

【答案】D

【解析】将行列式 $|A|$ 的第一列加到第二列上，再将二、三列互换，之后第一列乘以 2 就可以得到行列式 $|B|$. 由行列式的性质知 $|B|=-2|A|=-2m$.

2、设 n 阶矩阵 $A=[\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n]$，$B=[\alpha_n, \alpha_1, \cdots, \alpha_{n-1}]$，若行列式 $|A|=1$，则 $|A-B|=$

（A）0.　　（B）2.

（C）$1+(-1)^{n+1}$.　　（D）$1+(-1)^{n}$.

【答案】A

【解析】由 $A-B=[\alpha_1-\alpha_n, \alpha_2-\alpha_1, \cdots, \alpha_n-\alpha_{n-1}]$

$$=[\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n]\begin{bmatrix} 1 & -1 & & \\ & 1 & \ddots & \\ & & \ddots & -1 \\ -1 & & & 1 \end{bmatrix}$$

有 $$|\mathbf{A}-\mathbf{B}|=|\mathbf{A}|\begin{vmatrix} 1 & -1 & & \\ 0 & 1 & \ddots & \\ \vdots & & \ddots & -1 \\ -1 & & & 1 \end{vmatrix}=1+(-1)(-1)^{n+1}\begin{vmatrix} -1 & & & \\ 1 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & -1 \end{vmatrix}_{n-1}$$

$$=1+(-1)^{2n+1}=0.$$

3、下列 n 阶行列式中，取值必为 -1 的是

（A）$\begin{vmatrix} & & & 1 \\ & & 1 & \\ & \therefore & & \\ 1 & & & \\ 1 & & & \end{vmatrix}$.　　（B）$\begin{vmatrix} 1 & 1 & & & \\ & 1 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & 1 \\ 1 & & & & 1 \end{vmatrix}$.

（C）$\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{vmatrix}$.　　（D）$\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}$.

【答案】D

【解析】（A）中行列式的值等于$(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}$，从而不对.

（B）中行列式按第一列展开可得其值为 1＋（－1）$^{n+1}$.

（C）中行列式按第一行展开得（－1）$^{n+1}$.

（D）中的行列式按第一行展开之后，对 n－1 阶行列式再按第一列展开得

$$1\cdot(-1)^{n+1}\cdot 1\cdot(-1)^{n-1+1}=-1.$$

故（D）为正确答案.

4、设α_1，α_2，α_3，β_1，β_2，均为四维列向量，$A=[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1]$，$B=[\alpha_3, \alpha_1, \alpha_2, \beta_2]$，且$|A|=1$，$|B|=2$，则$|A+B|=$

（A）9.　（B）6.　（C）3.　（D）1.

【答案】B

【解析】由于矩阵加法 $A+B=[\alpha_1+\alpha_3, \alpha_2+\alpha_1, \alpha_3+\alpha_2, \beta_1+\beta_2]$，根据行列式的性质有

$$\begin{aligned}|A+B| &= |\alpha_1+\alpha_3, \alpha_2+\alpha_1, \alpha_3+\alpha_2, \beta_1+\beta_2| \\ &= |2(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3), \alpha_2+\alpha_1, \alpha_3+\alpha_2, \beta_1+\beta_2| \\ &= 2|\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3, \alpha_2+\alpha_1, \alpha_3+\alpha_2, \beta_1+\beta_2| \\ &= 2|\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3, -\alpha_3, -\alpha_1, \beta_1+\beta_2| \\ &= 2|\alpha_2, -\alpha_3, -\alpha_1, \beta_1+\beta_2| \\ &= 2|\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1+\beta_2| \\ &= 2(|A|+|B|)=6\end{aligned}$$

5、已知α_1，α_2，β_1，β_2，γ都是 3 维列向量，且行列式

$$|\alpha_1\ \ \beta_1\ \ \gamma|=|\alpha_1\ \ \beta_2\ \ \gamma|=|\alpha_2\ \ \beta_1\ \ \gamma|=|\alpha_2\ \ \beta_2\ \ \gamma|=3,$$

那么$|-2\gamma\ \ a_1+a_2\ \ \beta_1+2\beta_2|=$

（A）－18.　（B）－36.　（C）64.　（D）－96.

【答案】B

【解析】本题考查行列式的性质，利用性质$|\alpha_1, \alpha_2, \beta_1+\beta_2|=|\alpha_1, \alpha_2, \beta_1|+|\alpha_1, \alpha_2, \beta_2|$可以有

$$\begin{aligned}|-2\gamma, \alpha_1+\alpha_2, \beta_1+2\beta_2| &= |-2\gamma, \alpha_1, \beta_1+2\beta_2|+|-2\gamma, \alpha_2, \beta_1+2\beta_2| \\ &= |-2\gamma, \alpha_1, \beta_1|+|-2\gamma, \alpha_1, 2\beta_2|+|-2\gamma, \alpha_2, \beta_1|+|-2\gamma, \alpha_2, 2\beta_2| \\ &= -2|\alpha_1, \beta_1, \gamma|-4|\alpha_1, \beta_2, \gamma|-2|\alpha_2, \beta_1, \gamma|-4|\alpha_2, \beta_2, \gamma|=-36,\end{aligned}$$

所以应选（B）.

二、填空题

1、$\begin{vmatrix} 1 & a & 0 & 0 \\ -1 & 2-a & a & 0 \\ 0 & -2 & 3-a & a \\ 0 & 0 & -3 & 4-a \end{vmatrix}=$______.

【答案】24

【解析】在用按行（列）展开公式计算行列式的值时，应先用行列式的性质作恒等变形．以期减少计算量．

$$\begin{vmatrix} 1 & a & 0 & 0 \\ -1 & 2-a & a & 0 \\ 0 & -2 & 3-a & a \\ 0 & 0 & -3 & 4-a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 2 & a & 0 \\ 0 & -2 & 3-a & a \\ 0 & 0 & -3 & 4-a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 2 & a & 0 \\ 0 & 0 & 3 & a \\ 0 & 0 & -3 & 4-a \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 2 & a & 0 \\ 0 & 0 & 3 & a \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 24$$

2、行列式 $D = \begin{vmatrix} 9 & 8 & 7 & 6 \\ 1 & 2^2 & 3^2 & 4^2 \\ 1 & 2^3 & 3^3 & 4^3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} =$ ______.

【答案】120

【解析】将行列式第四行加到第一行上，可提出公因子 10，再将第四行逐行相换至第二行得：

$$D = 10\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2^2 & 3^2 & 4^2 \\ 1 & 2^3 & 3^3 & 4^3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 10\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2^2 & 3^2 & 4^2 \\ 1 & 2^3 & 3^3 & 4^3 \end{vmatrix}$$

$$= 10(2-1)(3-1)(4-1)(3-2)(4-2)(4-3) = 120\,.$$

3、设 $A=[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3]$是 3 阶矩阵，且 $|A|=4$．若 $B=[\alpha_1-3\alpha_2+2\alpha_3, \alpha_2-2\alpha_3, 2\alpha_2+\alpha_3]$，则 $|B|=$______.

【答案】20

【解析】由行列式性质

$$\begin{aligned} |B| &= |\alpha_1-3\alpha_2+2\alpha_3, \alpha_2-2\alpha_3, 2\alpha_2+\alpha_3| \\ &= |\alpha_1-2\alpha_2, \alpha_2-2\alpha_3, 5\alpha_3| \\ &= 5|\alpha_1-2\alpha_2, \alpha_2, \alpha_3| \\ &= 5|\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3| = 20 \end{aligned}$$

或者，利用分块矩阵乘法

$$B=[\alpha_1-3\alpha_2+2\alpha_3, \alpha_2-2\alpha_3, 2\alpha_2+\alpha_3]$$

$$= [\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3]\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

有 $|\boldsymbol{B}| = |\boldsymbol{A}| \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 4\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 20.$

4、设四阶方阵 $A=[\alpha, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4]$，$B=[\beta, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4]$，其中$\alpha, \beta, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4$均为四维列向量，且$|A|=4$，$|B|=-1$，则$|A-3B|=$______.

【答案】-56

【解析】因为

$$A-3B=[\alpha, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4]-[3\beta, 3\gamma_2, 3\gamma_3, 3\gamma_4]$$
$$=[\alpha-3\beta, -2\gamma_2, -2\gamma_3, -2\gamma_4]$$

故有

$$|A-3B|=|\alpha-3\beta, -2\gamma_2, -2\gamma_3, -2\gamma_4|$$
$$=-8|\alpha-3\beta, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4|$$
$$=-8(|\alpha, \gamma_2, \gamma_2, \gamma_4|-3|\beta, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4|)$$
$$=-8(|A|-3|B|)=-56$$

5、设四阶行列式$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}1&2&3&4\\0&3&4&6\\3&4&1&2\\2&2&2&2\end{vmatrix}$，则 $A_{11}+2A_{21}+A_{31}+2A_{41}=$______.

【答案】-12

【解析】因为代数余子式 A_{ij} 的值与元素 a_{ij} 的值无关．本题求第一列元素的代数余子式，故可构造一个新的行列式．把$|A|$中第 1 列换为所求和的代数余子式的系数，即

$$|\boldsymbol{B}|=\begin{vmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&6\\1&4&1&2\\2&2&2&2\end{vmatrix}$$

则$|A|$与$|B|$的 A_{11}，A_{21}，A_{31}，A_{41} 是一样的，而对$|B|$按第 1 列展开就是

$$|B|=A_{11}+2A_{21}+A_{31}+2A_{41}$$

那么只要计算出行列式$|B|$的值也就求出本题代数余子式的和．易计算出$|B|=-12$．

三、计算题与证明题

1、计算行列式$D=\begin{vmatrix}1&b_1&0&0\\-1&1-b_1&b_2&0\\0&-1&1-b_2&b_3\\0&0&-1&1-b_3\end{vmatrix}$的值．

【解析】解：从第一行开始，依次把每行加至下一行，得

$$D=\begin{vmatrix}1&b_1&0&0\\0&1&b_2&0\\0&-1&1-b_2&b_3\\0&0&-1&1-b_3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&b_1&0&0\\0&1&b_2&0\\0&0&1&b_3\\0&0&-1&1-b_3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&b_1&0&0\\0&1&b_2&0\\0&0&1&b_3\\0&0&0&1\end{vmatrix}=1$$

2、计算行列式$D=\begin{vmatrix}1&2&2&\cdots&2\\2&2&2&\cdots&2\\2&2&3&\cdots&2\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\2&2&2&\cdots&n\end{vmatrix}$的值．

【解析】解：把第二行的－1 倍分别加至其余各行，再把第一行的 2 倍加至第二行，得

$$D=\begin{vmatrix}-1 & 0 & 0 & \cdots & 0\\ 2 & 2 & 2 & \cdots & 2\\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-1 & 0 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 2 & 2 & \cdots & 2\\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-2\end{vmatrix}=-2\cdot(n-2)!$$

3、已知 $\begin{vmatrix}\lambda-17 & 2 & -7\\ 2 & \lambda-14 & 4\\ 2 & 4 & \lambda-14\end{vmatrix}=0$，求 λ 的值.

【解析】解：

$$\begin{vmatrix}\lambda-17 & 2 & -7\\ 2 & \lambda-14 & 4\\ 2 & 4 & \lambda-14\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda-17 & 2 & -7\\ 2 & \lambda-14 & 4\\ 0 & 18-\lambda & \lambda-18\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda-17 & -5 & -7\\ 2 & \lambda-10 & 4\\ 0 & 0 & \lambda-18\end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-18)\begin{vmatrix}\lambda-17 & -5\\ 2 & \lambda-10\end{vmatrix}=(\lambda-18)(\lambda^2-27\lambda+180)=(\lambda-12)(\lambda-15)(\lambda-18)=0$$

所以 λ 为 12，15，18.

4、A 是 n 阶可逆矩阵，A 与 A^{-1} 的元素都是整数，证明：|A|=±1.

【解析】证明：因为 $AA^{-1}=E$，有 $|A||A^{-1}|=1$．因为 A 的元素都是整数，按行列式定义|A|是不同行不同列元素乘积的代数和，所以|A|必是整数．同理由 A^{-1} 的元素都是整数而知 $|A^{-1}|$ 必是整数．因为两个整数 $|A|$ 和 $|A^{-1}|$ 相乘为 1，所以 $|A|$ 与 $|A^{-1}|$ 只能取值为±1.

5、设 A 是 n 阶矩阵，证明存在非 0 的 n 阶矩阵 B 使 AB=0 的充分必要条件是|A|=0.

【解析】证明：必要性．对零矩阵及矩阵 B 按列分块，设 $B=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)$，那么

$$AB=A(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)=(A\beta_1,A\beta_2,\cdots,A\beta_n)=(0,0,\cdots,0)=0.$$

于是 $A\beta_j=0(j=1,2,\cdots,n)$，即 β_j 是齐次方程组 $Ax=0$ 的解.

由 $B\neq 0$，知 $Ax=0$ 有非 0 解．故|A|=0.

充分性．因为|A|=0，所以齐次线性方程组 $Ax=0$ 有非 0 解．设 β 是 $Ax=0$ 的一个非零解，那么，令 $B=(\beta,0,0,\cdots,0)$，则 $B\neq 0$．而 AB=0.

单元测试二 矩阵

一、选择题

1、设矩阵 $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 2 & 0\\ 0 & -2 & 0 & 0\\ -1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$，矩阵 B 满足 $AB+B+A+2E=0$，则 $|B+E|=$

（A）-6.　　（B）6.　　（C）$-\dfrac{1}{12}$.　　（D）$\dfrac{1}{12}$.

【答案】C

【解析】化简矩阵方程向 $B+E$ 靠拢，用分组因式分解有

$$(AB+A)+(B+E)=-E \quad 即（A+E）(B+E)=-E$$

两边取行列式，用行列式乘法公式得

$$|A+E|\,|B+E|=1$$

又 $|\mathbf{A}+\mathbf{E}|=\begin{vmatrix}2 & 0 & 2 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 0\\ -1 & 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 2\end{vmatrix}=2\begin{vmatrix}2 & 0 & 2\\ 0 & -1 & 0\\ -1 & 0 & 2\end{vmatrix}=-12$，故应选 C.

2、已知 $A=\begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 3\\ 0 & 2 & 5\end{bmatrix}$，矩阵 B 满足 $A^*B+2A^{-1}=B$，其中 A^*是 A 的伴随矩阵，

则 $|B|=$

（A）$\dfrac{2}{15}$.　　（B）$\dfrac{2}{9}$.　　（C）$\dfrac{1}{30}$.　　（D）$\dfrac{1}{12}$.

【答案】A

【解析】对于矩阵方程首先要恒等变形，左乘 A 并利用 $AA^*=A^*A=|A|E$，得

$$|A|B+2E=AB$$

即 $(A-|A|E)B=2E$

因为 $|A|=-2$，于是 $(A+2E)B=2E$

两边取行列式，得

$$|A+2E|\cdot|B|=8$$

又 $|\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E}|=\begin{vmatrix}4 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 3\\ 0 & 2 & 7\end{vmatrix}=60$

所以 $|\boldsymbol{B}|=\dfrac{2}{15}$. 故应选（A）.

3、设 A 为三阶方阵，A^*为 A 的伴随矩阵，$|A|=\dfrac{1}{3}$，则 $|4A-(3A^*)^{-1}|=$

（A）$\dfrac{1}{3}$.　　（B）3.　　（C）6.　　（D）9.

【答案】D

【解析】因为 $|\boldsymbol{A}|=\dfrac{1}{3}$ 又 $(3A^*)^{-1}=(3|A|A^{-1})^{-1}=A$，所以

$|4A-(3A^*)^{-1}|=|4A-A|=|3A|=3^3|A|=9$.

所以应选（D）.

4、设 $A=\begin{bmatrix}0&0&5&2\\0&0&2&1\\1&3&0&0\\1&2&0&0\end{bmatrix}$，则 $A^{-1}=$

（A）$\begin{bmatrix}0&0&1&-2\\0&0&-2&5\\2&-3&0&0\\-1&1&0&0\end{bmatrix}$.　　（B）$\begin{bmatrix}0&0&-2&3\\0&0&1&-1\\1&-2&0&0\\-2&5&0&0\end{bmatrix}$.

（C）$\begin{bmatrix}0&0&1&-3\\0&0&-1&2\\1&-2&0&0\\-2&5&0&0\end{bmatrix}$.　　（D）$\begin{bmatrix}0&0&-1&3\\0&0&1&-2\\-1&2&0&0\\2&-5&0&0\end{bmatrix}$.

【答案】B

【解析】本题考查分块求逆及二阶求逆，注意

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{B}\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}^{-1}&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{B}^{-1}\end{bmatrix},\begin{bmatrix}\boldsymbol{O}&\boldsymbol{A}\\\boldsymbol{B}&\boldsymbol{O}\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{O}&\boldsymbol{B}^{-1}\\\boldsymbol{A}^{-1}&\boldsymbol{O}\end{bmatrix}$$

再根据 $\boldsymbol{A}^{-1}=\dfrac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}^{*}$，用二阶矩阵的伴随矩阵是主对角线对调副对角线变号，很容易看出

$$\begin{bmatrix}5&2\\2&1\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}1&-2\\-2&5\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1&3\\1&2\end{bmatrix}^{-1}=-\begin{bmatrix}2&-3\\-1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2&3\\1&-1\end{bmatrix}$$

所以应选（B）.

5、设 A、B 均为 n 阶可逆矩阵，且（$A+B$）^{2}＝E，则（$E+BA^{-1}$）$^{-1}$＝

（A）（$A+B$）B.　　　（B）$E+AB^{-1}$.

（C）A（$A+B$）.　　　（D）（$A+B$）A.

【答案】C

【解析】$(E+BA^{-1})^{-1}=(AA^{-1}+BA^{-1})^{-1}=[(A+B)A^{-1}]^{-1}$

$=(A^{-1})^{-1}(A+B)^{-1}=A(A+B)$

注意，因为 $(A+B)^2=E$，即 $(A+B)(A+B)=E$，按可逆定义知 $(A+B)^{-1}=(A+B)$.

二、填空题

1、若 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&2&0\\3&4&0\\0&0&5\end{bmatrix}$，则矩阵 A 的伴随矩阵 A^{*}＝______.

【答案】$\begin{bmatrix}20&-10&0\\-15&5&0\\0&0&-2\end{bmatrix}$

【解析】按定义，求出行列式｜A｜的代数余子式，有

$$A_{11}=\begin{vmatrix}4&0\\0&5\end{vmatrix}=20, A_{12}=-\begin{vmatrix}3&0\\0&5\end{vmatrix}=-15, A_{13}=\begin{vmatrix}3&4\\0&0\end{vmatrix}=0$$

$$A_{21}=-\begin{vmatrix}2&0\\0&5\end{vmatrix}=-10, A_{22}=\begin{vmatrix}1&0\\0&5\end{vmatrix}=5, A_{23}=-\begin{vmatrix}1&2\\0&0\end{vmatrix}=0$$

$$A_{31}=\begin{vmatrix}2&0\\4&0\end{vmatrix}=0, A_{32}=-\begin{vmatrix}1&0\\3&0\end{vmatrix}=0, A_{33}=\begin{vmatrix}1&2\\3&4\end{vmatrix}=-2$$

所以 $\boldsymbol{A}^*=\begin{bmatrix}A_{11}&A_{21}&A_{31}\\A_{12}&A_{22}&A_{32}\\A_{13}&A_{23}&A_{33}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}20&-10&0\\-15&5&0\\0&0&-2\end{bmatrix}$

或者，由 $A^*=|A|A^{-1}$，现在 $|\boldsymbol{A}|=-10, \boldsymbol{A}^{-1}=\begin{bmatrix}-2&1&0\\\frac{3}{2}&-\frac{1}{2}&0\\0&0&\frac{1}{5}\end{bmatrix}$.

从而得 $\boldsymbol{A}^*=-10\begin{bmatrix}-2&1&0\\\frac{3}{2}&-\frac{1}{2}&0\\0&0&\frac{1}{5}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}20&-10&0\\-15&5&0\\0&0&-2\end{bmatrix}$.

2、已知 $\alpha_1=(1,0,0)^T$，$\alpha_2=(1,2,-1)^T$，$\alpha_3=(-1,1,0)^T$ 且 $A\alpha_1=(2,1)^T$，$A\alpha_2=(-1,1)^T$，$A\alpha_3=(3,-4)^T$，则 $A=$______.

【答案】$\begin{bmatrix}2&5&13\\1&-3&-6\end{bmatrix}$

【解析】利用分块矩阵，有

$$\boldsymbol{A}[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3]=[\boldsymbol{A\alpha}_1,\boldsymbol{A\alpha}_2,\boldsymbol{A\alpha}_3]=\begin{bmatrix}2&-1&3\\1&1&-4\end{bmatrix}$$

那么 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2&-1&3\\1&1&-4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1&-1\\0&2&1\\0&-1&0\end{bmatrix}^{-1}$

$=\begin{bmatrix}2&-1&3\\1&1&-4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1&3\\0&0&-1\\0&1&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&5&13\\1&-3&-6\end{bmatrix}$.

3、设 A，B 均为三阶矩阵，E 是三阶单位矩阵，已知 $AB=2A+3B$，$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}9&0&-6\\0&15&0\\0&0&21\end{bmatrix}$，则 $(B-2E)^{-1}=$______.

【答案】$\begin{bmatrix}1&0&-1\\0&2&0\\0&0&3\end{bmatrix}$

【解析】为了求（B－$2E$）$^{-1}$，利用已知条件 AB＝$2A$＋$3B$，先分组配出 B－$2E$，得：

$$AB-2A-3B+6E=6E$$

$$(A-3E)(B-2E)=6E$$

从而$(\mathbf{B}-2\mathbf{E})^{-1}=\dfrac{1}{6}(\mathbf{A}-3\mathbf{E})=\begin{bmatrix}1&0&-1\\0&2&0\\0&0&3\end{bmatrix}$.

4、设$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&0&0\\6&1&0\\3&6&1\end{bmatrix}$, B＝（E－A）（E＋$2A$）$^{-1}$，则（B－E）$^{-1}$＝______.

【答案】$\begin{bmatrix}-1&0&0\\2&-1&0\\-11&2&-1\end{bmatrix}$

【解析】（A＋B）$^{-1}$没有运算法则．应当恒等变形将其化为乘积形式，本题用单位矩阵恒等变形之技巧．

因为 $B-E=(E-A)(E+2A)^{-1}-(E+2A)(E+2A)^{-1}$

$=[(E-A)-(E+2A)](E+2A)^{-1}$

$=-3A(E+2A)^{-1}$

故 $(B-E)^{-1}=[-3A(E+2A)^{-1}]^{-1}$

$$=-\frac{1}{3}(\boldsymbol{E}+2\boldsymbol{A})\boldsymbol{A}^{-1}$$

$$=-\frac{1}{3}(\boldsymbol{A}^{-1}+2\boldsymbol{E})$$

因为 $\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{bmatrix}1&0&0\\6&1&0\\3&6&1\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}1&0&0\\-6&1&0\\33&-6&1\end{bmatrix}$.

所以 $(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{E})^{-1}=-\dfrac{1}{3}\begin{bmatrix}3&0&0\\-6&3&0\\33&-6&3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1&0&0\\2&-1&0\\-11&2&-1\end{bmatrix}$.

5、已知$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2&0&1\\0&3&0\\2&0&2\end{bmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&0\end{bmatrix}$, 若 X 满足 AX＋$2B$＝BA＋$2X$，那么 X^2＝______.

【答案】$\begin{bmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$

【解析】由已知 AX＋$2B$＝BA＋$2X$，得

$AX-2X=BA-2B$，即（$A-2E$）$X=B$（$A-2E$）

由于 $\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}=\begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&0\\2&0&0\end{bmatrix}$可逆，故 $X=$（$A-2E$）^{-1}B（$A-2E$）

那么 $X^2=$（$A-2E$）$^{-1}B^2$（$A-2E$）

$$=\begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&0\\2&0&0\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}1&&\\&1&\\&&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&0\\2&0&0\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}0&0&\frac{1}{2}\\0&1&0\\1&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&0\\0&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}.$$

三、计算题与证明题

1、设 $A^{-1}=\begin{bmatrix}1&1&1\\1&2&1\\1&1&3\end{bmatrix}$，求 $(A^*)^{-1}$.

【解析】解：因为 $(A^*)^{-1}=\dfrac{1}{|A|}A$，

$$(A^{-1}\vdots E)=\begin{bmatrix}1&1&1&1&0&0\\1&2&1&0&1&0\\1&1&3&0&0&1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&1&1&1&0&0\\0&1&0&-1&1&0\\0&0&2&-1&0&1\end{bmatrix}$$

$$\to\begin{bmatrix}1&1&0&3/2&0&-1/2\\0&1&0&-1&1&0\\0&0&2&-1&0&1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&0&5/2&-1&-1/2\\0&1&0&-1&1&0\\0&0&1&-1/2&0&1/2\end{bmatrix}$$

即 $A=\begin{bmatrix}5/2&-1&-1/2\\-1&1&0\\-1/2&0&1/2\end{bmatrix}$，又|A|=1/2，故

$$(A^*)^{-1}=2\begin{bmatrix}5/2&-1&-1/2\\-1&1&0\\-1/2&0&1/2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5&-2&-1\\-2&2&0\\-1&0&1\end{bmatrix}.$$

2、设 $A=\begin{bmatrix}1&1&0&0\\1&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&1&1\end{bmatrix}$，求 A^n.

【解析】解：对矩阵 A 分块，记 $A=\begin{bmatrix} B & 0 \\ 0 & C \end{bmatrix}$，则由 $r(B)=1$，知

$$B^2=2B, B^n=2^{n-1}B=\begin{bmatrix} 2^{n-1} & 2^{n-1} \\ 2^{n-1} & 2^{n-1} \end{bmatrix}$$

而 $C=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$，因为 $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^2=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$，于是有

$C^n=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}+n\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ n & 1 \end{bmatrix}$. 从而 $A^n=\begin{bmatrix} 2^{n-1} & 2^{n-1} & 0 & 0 \\ 2^{n-1} & 2^{n-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & n & 1 \end{bmatrix}$.

3、若 A 是对称矩阵，B 是反对称矩阵，则 AB 是反对称矩阵的充要条件是 AB=BA.

【解析】证明：因为 $A^T=A, B^T=-B$，那么 $(AB)^T=B^TA^T=-BA$.

若 AB 是反对称矩阵，则 $(AB)^T=-AB$，从而 AB=BA．反之，若 AB=BA，则

$(AB)^T=-BA=-AB$，即 AB 使反对称矩阵.

4、设 A 是 n 阶矩阵，$A^m=0$，证明 $E-A$ 可逆.

【解析】证明：由 $A^m=0$，有 $E-A^m=E$．于是

$$(E-A)(E+A+A^2+\cdots+A^{m-1})=E-A^m=E$$

所以 $E-A$ 可逆，且 $(E-A)^{-1}=E+A+A^2+\cdots+A^{m-1}$.

单元测试三 向量组的线性关系与秩

一、选择题

1、设向量组 α，β，γ 线性无关，α，β，δ 线性相关，则

（A）α 必可由 β，γ，δ 线性表示.

（B）β 必不可由 α，γ，δ 线性表示.

（C）δ 必可由 α，β，γ 线性表示.

（D）δ 必不可由 α，β，γ 线性表示.

【答案】(C)

【解析】$\left.\begin{array}{l}\alpha，\beta，\gamma\text{线性无关}\Rightarrow\alpha，\beta\text{线性无关}\\ \text{又}\alpha，\beta，\delta\text{线性相关}\end{array}\right\}\Rightarrow\delta\text{可由}\alpha，\beta\text{线性表出}.$

$\Rightarrow\delta$可由$\alpha，\beta，\gamma$线性表出.

故应选（C）.

2、设向量组（Ⅰ）$\alpha_1，\alpha_2，\alpha_3，\alpha_4$线性无关，则与向量组（Ⅰ）等价的向量组是

（A）$\alpha_1+\alpha_2，\alpha_2+\alpha_3，\alpha_3+\alpha_4，\alpha_4+\alpha_1$.

（B）$\alpha_1+\alpha_2，\alpha_2+\alpha_3，\alpha_3+\alpha_4$.

（C）$\alpha_1+\alpha_2，\alpha_2-\alpha_3，\alpha_3+\alpha_4，\alpha_4-\alpha_1$.

（D）$\alpha_1，\alpha_1+\alpha_2，\alpha_2+\alpha_3，\alpha_3+\alpha_4，\alpha_4-\alpha_1$.

【答案】(D)

【解析】两向量组等价$\Leftrightarrow$可以相互表出.

两向量组等价$\Rightarrow$等秩.

（Ⅰ）$\alpha_1，\alpha_2，\alpha_3，\alpha_4$线性无关，r(Ⅰ)=4.

选项（B）只有三个向量，r(B)≤3，可排除.

选项（A）因$(\alpha_1+\alpha_2)-(\alpha_2+\alpha_3)+(\alpha_3+\alpha_4)-(\alpha_4+\alpha_1)=0$，线性相关，r(A)≤3，可排除.

选项（C）因$(\alpha_1+\alpha_2)-(\alpha_2-\alpha_3)-(\alpha_3+\alpha_4)+(\alpha_4-\alpha_1)=0$，线性相关，r(C)≤3，可排除.

由排除法，应选（D）.

3、设向量组$\alpha_1，\alpha_2，\alpha_3$线性无关，则下列向量组中线性无关的是

（A）$\alpha_1-\alpha_2，\alpha_2-\alpha_3，\alpha_3-\alpha_1$.

（B）$\alpha_1-\alpha_2，\alpha_2+\alpha_3，\alpha_3+\alpha_1$.

（C）$\alpha_1+\alpha_2，3\alpha_1-5\alpha_2，5\alpha_1+9\alpha_2$.

（D）$\alpha_1+\alpha_2，2\alpha_1+3\alpha_2+4\alpha_3，\alpha_1-\alpha_2-2\alpha_3$.

【答案】(D)

【解析】由观察法易见

$(\alpha_1-\alpha_2)+(\alpha_2-\alpha_3)+(\alpha_3-\alpha_1)=0$

$(\alpha_1-\alpha_2)+(\alpha_2+\alpha_3)-(\alpha_3+\alpha_1)=0$

可知（A）、（B）两组中的向量均线性相关.

关于（C），可设想为$\beta_1=\alpha_1+\alpha_2$，$\beta_2=3\alpha_1-5\alpha_2$，$\beta_3=5\alpha_1+9\alpha_2$，即$\beta_1，\beta_2，\beta_3$三个向量可以由$\alpha_1，\alpha_2$两个向量线性表出，所以$\beta_1，\beta_2，\beta_s$必线性相关．即$\alpha_1+\alpha_2，3\alpha_1-5\alpha_2，5\alpha_1+9\alpha_2$必线性相关.

因而用排除法可知应选（D).

4、向量组$\alpha_1=(1，3，5，-1)^T$，$\alpha_2=(2，-1，-3，4)^T$，$\alpha_3=(6，4，4，6)^T$，$\alpha_4=(7，7，9，1)^T$，$\alpha_5=(3，2，2，3)^T$的极大线性无关组是

（A）$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_5$. （B）$\alpha_1，\alpha_3，\alpha_5$. （C）$\alpha_2,\alpha_3，\alpha_4$. （D）$\alpha_3，\alpha_4,\alpha_5$.

【答案】(C)

【解析】列向量作行变换，有

$$[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_5]=\begin{bmatrix}1&2&6&7&3\\3&-1&4&7&2\\5&-3&4&9&2\\-1&4&6&1&3\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&2&6&7&3\\0&-7&-14&-14&-7\\0&-13&-26&-26&-13\\0&6&12&8&6\end{bmatrix}$$

$$\to\begin{bmatrix}1&2&6&7&3\\0&1&2&2&1\\0&0&0&2&0\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}$$

可见秩 r（α_1，α_2，α_3，α_4，α_5）＝3.

因为三阶子式

$$\begin{vmatrix}2&6&7\\1&2&2\\0&0&2\end{vmatrix}\neq 0$$

所以α_2，α_3，α_4是极大线性无关组，故选 C.

5、设向量组Ⅰ：α_1，$\alpha_2,\cdots$，α_r可由向量组Ⅱ：$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$线性表示，则

（A）当 r<s 时，向量组（Ⅱ）必线性相关.
（B）当 r>s 时，向量组（Ⅱ）必线性相关.
（C）当 r<s 时，向量组（Ⅰ）必线性相关.
（D）当 r>s 时，向量组（Ⅰ）必线性相关.

【答案】(D)

【解析】若多数向量可用少数向量线性表出，则多数向量一定线性相关.故应选（D）.

二、填空题

1、向量组$\alpha_1=(1,0,1,2)^T$，$\alpha_2=(1,1,3,1)^T$，$\alpha_3=(2,-1,a+1,5)^T$线性相关，则 a=______.

【答案】-1

【解析】n 个 n 维向量线性相关$\Leftrightarrow\left|\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\right|=0.$而

$$\begin{bmatrix}1&1&2\\0&1&-1\\1&3&a+1\\2&1&5\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&1&2\\0&1&-1\\0&2&a-1\\0&-1&1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&1&2\\0&1&-1\\0&0&a+1\\0&0&0\end{bmatrix},$$

故 a=-1.

2、已知向量组α_1＝（1，2，－1，1）^{T}，α_2＝（2，0，t，0）^{T}，α_3＝（0，－4，5，t）^{T}线性无关，则 t 的取值为______.

【答案】(－∞，＋∞)

【解析】由于向量的个数与维数不一样，不能用行列式去分析，而要用矩阵的秩等于 n 来进行分析.

$$\boldsymbol{A}=[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3]=\begin{bmatrix}1&2&0\\2&0&-4\\-1&t&5\\1&0&t\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&2&0\\0&-4&-4\\0&t+2&5\\0&-2&t\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&2&0\\0&1&1\\0&0&3-t\\0&0&t+2\end{bmatrix}$$

由于$\forall t$，恒有 r（A）＝3，所以向量组α_1，α_2，α_3必线性无关.

3、已知α_1＝（1，4，2）^{T}，α_2＝（2，7，3）^{T}，α_3＝（0，1，a）^{T}可以表示任意一个三维向量，则 a 的取值为______.

【答案】$a\neq1$

【解析】α_1，α_2，α_3可表示任一个 3 维向量

$\Leftrightarrow$ α_1，α_2，α_3与ε_1＝（1，0，0）^{T}，ε_2＝（0，1，0）^{T}，ε_3＝（0，0，1）^{T}等价

$\Leftrightarrow$ 秩 r（α_1，α_2，α_3）＝3

$\Leftrightarrow$ $|\alpha_1，\alpha_2，\alpha_3|\neq0$

由 $\begin{vmatrix}1&2&0\\4&7&1\\2&3&a\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&0&0\\4&-1&1\\2&-1&a\end{vmatrix}=1-a$

所以 $a\neq1$.

4、设 4 阶矩阵 A 的秩为 2，则$r(A^*)=$______.

【答案】0

【解析】由$r(A^*)=\begin{cases}n, & 若r(A)=n,\\1, & 若r(A)=n-1,\\0, & 若r(A)<n-1,\end{cases}$知$r(A^*)=0.$

5、与$\alpha_1=(1,-1,0,2)^T$，$\alpha_2=(2,3,1,1)^T$，$\alpha_3=(0,0,1,2)^T$都正交的单位向量是______.

【答案】$\pm\dfrac{1}{\sqrt{7}}(1,-1,2,-1)^T$

【解析】设$\beta=(x_1,x_2,x_3,x_4)^T$与$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$均正交，则$\beta^T\alpha_i=0(i=1,2,3)$，即

$$\begin{cases}x_1-x_2+2x_4=0,\\2x_1+3x_2+x_3+x_4=0,\\x_3+2x_4=0,\end{cases}$$

求出基础解系：$(1,-1,2,-1)^T$，单位化得$\pm\dfrac{1}{\sqrt{7}}(1,-1,2,-1)^T$

三、计算题与证明题

1、如果秩$r(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)=r(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s,\alpha_{s+1})$，证明$\alpha_{s+1}$可由$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性表出.

【解析】证明：设$r(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)=r(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s,\alpha_{s+1})=r$，且$\alpha_{i1},\alpha_{i2},\cdots,\alpha_{ir}$是向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$的极大

线性无关组，那么$\alpha_{i1},\alpha_{i2},\cdots,\alpha_{ir}$也是$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s,\alpha_{s+1}$的极大线性无关组.从而$\alpha_{s+1}$可由$\alpha_{i1},\alpha_{i2},\cdots,\alpha_{ir}$线性表出.那么$\alpha_{s+1}$可由$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性表出.

2、已知向量组$\beta_1=\begin{bmatrix}0\\1\\-1\end{bmatrix}$，$\beta_2=\begin{bmatrix}a\\2\\1\end{bmatrix}$，$\beta_3=\begin{bmatrix}b\\1\\0\end{bmatrix}$与$\alpha_1=\begin{bmatrix}1\\2\\-3\end{bmatrix}$，$\alpha_2=\begin{bmatrix}3\\0\\1\end{bmatrix}$，$\alpha_3=\begin{bmatrix}9\\6\\-7\end{bmatrix}$有相同的秩，且$\beta_3$可由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表出，求 a，b 的值.

【解析】因为β_3可由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表示，故方程组$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3=\beta$有解.由

$$\begin{bmatrix}1&3&9&b\\2&0&6&1\\-3&1&-7&0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&3&9&b\\0&-6&-12&1-2b\\0&10&20&3b\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&3&9&b\\0&1&2&\frac{3}{10}b\\0&0&0&1-\frac{1}{5}b\end{bmatrix},\Rightarrow b=5.$$

又由$\alpha_3=3\alpha_1+2\alpha_2$，且$\alpha_1,\alpha_2$线性无关，知秩$r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=2$.

于是$r(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=2$.

从而$|\beta_1,\beta_2,\beta_3|=\begin{vmatrix}0&a&5\\1&2&1\\-1&1&0\end{vmatrix}=-(a-15)=0\Rightarrow a=15.$

3、已知线性方程组

$$\begin{cases}a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3+a_4x_4=a_5,\\b_1x_1+b_2x_2+b_3x_3+b_4x_4=b_5,\\c_1x_1+c_2x_2+c_3x_3+c_4x_4=c_5,\\d_1x_1+d_2x_2+d_3x_3+d_4x_4=d_5\end{cases}$$

的通解是$(2,1,0,3)^T+k(1,-1,2,0)^T$，如今$\alpha_i=(a_i,b_i,c_i,d_i)^T,i=1,2,\cdots,5.$

试问：（Ⅰ）α_1能否由$\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$线性表出？

（Ⅱ）α_4能否由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表出？并说明理由.

【解析】（Ⅰ）α_1可由$\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$线性表出.因$k(1,-1,2,0)^T$是相应齐次方程组$Ax=0$的通解，则

$$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)\begin{bmatrix}1\\-1\\2\\0\end{bmatrix}=0,\text{即}\ \alpha_1-\alpha_2+2\alpha_3=0,$$

所以 $\alpha_1=\alpha_2-2\alpha_3+0\alpha_4$, 即 α_1 可由 $\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性表出.

（Ⅱ） α_4 不能由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表出.如果 α_4 能用 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表出，则

$r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=r(A).$

由于 $Ax=0$ 的基础解系仅一个向量，于是有 $r(A)=n-1=3$. 那么， $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，与 $\alpha_1=\alpha_2-2\alpha_3$ 相矛盾.

单元测试四 线性方程组

一、选择题

1、某五元齐次线性方程组经高斯消元系数矩阵化为 $\begin{bmatrix}1&-1&2&3&-4\\&&1&5&-2\\&&&2&0\end{bmatrix}$

自由变量若取为

（1）x_4，x_5　（2）x_3, x_5　（3）x_1, x_5　（4）x_2，x_3

那么，正确的共有

（A）1 个.　（B）2 个.　（C）3 个.　（D）4 个.

【答案】（B）

【解析】因为系数矩阵的秩 r（A）＝3，有 $n-r$（A）＝5－3＝2，故应当有 2 个自由变量.

由于去掉 x_4，x_5 两列之后，所剩三阶矩阵为 $\begin{bmatrix}1&-1&2\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}$，因为其秩与 r（A）不相等，故 x_4，x_5 不是自由变量．同理，x_3，x_5 不能是自由变量.

而 x_1，x_5 与 x_2，x_3 均可以是自由变量，因为行列式 $\begin{vmatrix}-1&2&3\\0&1&5\\0&0&2\end{vmatrix}$ 与 $\begin{vmatrix}1&3&-4\\0&5&-2\\0&2&0\end{vmatrix}$ 都不为 0.

2、要使 $\xi_1=\begin{bmatrix}1\\0\\2\end{bmatrix}$，$\xi_2=\begin{bmatrix}0\\1\\-1\end{bmatrix}$ 都是线性方程组 $Ax=0$ 的解，只要系数矩阵 A 为

（A）$\begin{bmatrix}-2&1&1\\4&-2&-2\end{bmatrix}$.　（B）$\begin{bmatrix}2&0&-1\\0&1&1\end{bmatrix}$.

（C）$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$.　　　（D）$\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 4 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

【答案】（A）

【解析】由于 $Ax=0$ 已有 2 个线性无关的解，故 $n-r(A)\geq 2$，即 $r(A)\leq 1$．所以（B）、（D）的秩不符合题目要求．ξ_1 不是（C）中方程的解，因为 ξ_1 不是（C）的解．用排除法应选（A）.

3、已知 α_1，α_2 是非齐次线性方程组 $Ax=b$ 的两个不同的解，那么

$$\alpha_1-\alpha_2,\quad 3\alpha_1-2\alpha_2,\quad \frac{1}{3}(\alpha_1+2\alpha_2),\quad \frac{1}{2}(\alpha_1+\alpha_2)$$

中，仍是线性方程组 $Ax=b$ 特解的共有

（A）4 个.　　（B）3 个.　　（C）2 个.　　（D）1 个.

【答案】（B）

【解析】由于 $A\alpha_1=b$，$A\alpha_2=b$，那么

$$A(3\alpha_1-2\alpha_2)=3A\alpha_1-2A\alpha_2=3b-2b=b,$$

$$\boldsymbol{A}[\frac{1}{3}(\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2)]=\frac{1}{3}\boldsymbol{A\alpha}_1+\frac{2}{3}\boldsymbol{A\alpha}_2=\frac{1}{3}\boldsymbol{b}+\frac{2}{3}\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b},$$

$$\boldsymbol{A}[\frac{1}{2}(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)]=\frac{1}{2}\boldsymbol{A\alpha}_1+\frac{1}{2}\boldsymbol{A\alpha}_2=\frac{1}{2}\boldsymbol{b}+\frac{1}{2}\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b},$$

可知 $3\boldsymbol{\alpha}_1-2\boldsymbol{\alpha}_2,\frac{1}{3}(\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2),\frac{1}{2}(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)$ 均是 $Ax=b$ 的解.

而 $A(\alpha_1-\alpha_2)=A\alpha_1-A\alpha_2=b-b=0$，所以 $\alpha_1-\alpha_2$ 是 $Ax=0$ 的解，不是 $Ax=b$ 的解，故应选（B）.

4、已知 $\eta_1,\eta_2,\eta_3,\eta_4$ 是齐次方程组 $Ax=0$ 的基础解系，则此方程组的基础解系还可以是

（A）$\eta_1+\eta_2,\eta_2+\eta_3,\eta_3+\eta_4,\eta_4+\eta_1$.

（B）$\eta_1,\eta_2,\eta_3+\eta_4,\eta_3-\eta_4$.

（C）$\eta_1,\eta_2,\eta_3,\eta_4$ 是一个等价向量组.

（D）$\eta_1,\eta_2,\eta_3,\eta_4$ 是一个等秩向量组.

【答案】（B）

【解析】向量组（A）线性相关，（A）不正确.

$\eta_1,\eta_2,\eta_3,\eta_4$，$\eta_1+\eta_2$ 与 $\eta_1,\eta_2,\eta_3,\eta_4$ 等价．但前者线性相关，故（C）不正确.

等秩的向量组不一定能互相线性表出，因而可能不是方程组的解，故（D）不正确．选（B）.

5、设 A 是 $m\times n$ 矩阵，A^T 是 A 的转置，若 η_1，η_2，…，η_t 是齐次方程组 $A^Tx=0$ 的基础解系，则秩 $r(A)=$

（A）t.　　（B）$n-t$.　　（C）m-t.　　（D）$n-m$.

【答案】（C）

【解析】由于 A 是 $m\times n$ 矩阵，知 A^T 是 $n\times m$ 矩阵，那么 $A^Tx=0$ 是 n 个方程 m 个未知数的齐次线性方程组，从而 $m-r(A^T)=t$．又因 $r(A)=r(A^T)$，所以 $r(A)=m-t$，即应当选（C）.

二、填空题

1、设 A 是五阶矩阵，A^*是 A 的伴随矩阵，若η_1，η_2是齐次线性方程组 $Ax=0$ 的两个坐标不成比例的解，那么秩 r（A^*）＝______.

【答案】0

【解析】因为η_1与η_2的坐标不成比例，所以η_1，η_2线性无关．因而齐次方程组 $Ax=0$ 至少有两个线性无关的解，于是 n－r（A）≥2，即有 r（A）≤3．

又因为 A 是五阶矩阵，而 r（A）≤3，故｜A｜中 4 阶子式必全为 0，因此，代数余子式 A_{ij} 恒为零，从而 A^*＝0，所以秩 r（A^*）＝0．

2、已知方程组$\begin{cases}2x_1+\lambda x_2-x_3=b_1,\\ \lambda x_1-x_2+x_3=b_2,\\ 4x_1+5x_2-5x_3=b_3\end{cases}$ 总有解，则λ应满足______.

【答案】$\lambda\neq 1$且$\lambda\neq-\frac{4}{5}$

【解析】对任意b_1,b_2,b_3，方程组有解$\Leftrightarrow r(A)=3\Leftrightarrow |A|\neq 0.$而由

$$\begin{vmatrix}2&\lambda&-1\\ \lambda&-1&1\\ 4&5&-5\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2&\lambda&-1\\ \lambda&-1&1\\ 5\lambda+4&0&0\end{vmatrix}=(5\lambda+4)(\lambda-1)\neq 0$$

可知$\lambda\neq 1$且$\lambda\neq-\frac{4}{5}$

3、已知齐次线性方程组$\begin{cases}ax_1-3x_2+3x_3=0\\ x_1+(a+2)x_2+3x_3=0.\\ 2x_1+x_2-x_3=0\end{cases}$有无穷多解，则 a＝______.

【答案】－5 或－6

【解析】齐次方程组 $Ax=0$ 有无穷多解的充分必要条件是 r（A）<n．现在是三个未知数三个方程的齐次方程组，故可以用系数行列式｜A｜＝0.

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}a&-3&3\\ 1&a+2&3\\ 2&1&-1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a&0&3\\ 1&a+5&3\\ 2&0&-1\end{vmatrix}$$

$$=(a+5)\begin{vmatrix}a&3\\ 2&-1\end{vmatrix}=(a+5)(-a-6)=0$$

故 a＝－5 或 a＝－6.

4、设 A 为三阶非零矩阵，$B=\begin{bmatrix}1&2&-2\\ 4&t&3\\ -3&-1&1\end{bmatrix}$，且 $AB=0$，则 $Ax=0$ 的通解是______.

【答案】$k_1(1,4,3)^T+k_2(-2,3,1)^T$

【解析】因为 $AB=0$，$A\neq 0$，所以$r(A)+r(B)\leq 3$，$r(A)\geq 1$．故$r(B)\leq 2$．又因B中有 2 阶子式不为 0，所以秩$r(B)\geq 2$．从而$r(B)=2$．故$r(A)=1$．于是$n-r(A)=2$．

由 $AB=0$ 又知 B 的列向量是齐次方程组的解，所以 $Ax=0$ 的通解是 $k_1(1,4,3)^T+k_2(-2,3,1)^T$.

5、已知非齐次线性方程组（Ⅰ）与（Ⅱ）同解，其中

（Ⅰ）$\begin{cases} x_1+x_2-2x_3=5 \\ x_2+x_3=2 \end{cases}$　　（Ⅱ）$\begin{cases} ax_1+4x_2+x_3=11 \\ 2x_1+5x_2-ax_3=16 \end{cases}$

则 a＝______.

【答案】1

【解析】所谓两个方程组（Ⅰ）与（Ⅱ）同解，即（Ⅰ）的解全是（Ⅱ）的解，（Ⅱ）的解也全是（Ⅰ）的解．对（Ⅰ）求出其通解

$(3,2,0)^T+k(3,-1,1)^T$

把 $x_1=3+3k$，$x_2=2-k$，$x_3=k$ 代入方程组（Ⅱ），有

$$\begin{cases} a(3+3k)+4(2-k)+k=11 \\ 2(3+3k)+5(2-k)-ak=16 \end{cases}$$

整理为

$$\begin{cases} (k+1)(a-1)=0 \\ k(1-a)=0 \end{cases}$$

因为 k 为任意常数，故 $a=1$．此时方程组（Ⅰ）的解全是方程组（Ⅱ）的解.

且当 $a=1$ 时，方程组（Ⅱ）为

$$\begin{cases} x_1+4x_2+x_3=11 \\ 2x_1+5x_2-x_3=16 \end{cases}$$

由 $r(A_2)=2$，从解的结构知（Ⅱ）的通解形式为 $\alpha+k\eta$．易于验算

$\alpha=(3,2,0)^T$ 是 $A_2x=b$ 的解，$\eta=(3,-1,1)^T$ 是 $A_2x=0$ 的解.

所以（Ⅰ）与（Ⅱ）必同解.

三、计算题与证明题

1、求齐次方程组 $\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=0, \\ 3x_1+2x_2+ax_3-3x_4=0, \\ 5x_1+4x_2+3x_3-x_4=0 \end{cases}$ 的基础解系.

【解析】对系数矩阵作初等变换，有

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & a & -3 \\ 5 & 4 & 3 & -1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & a-3 & -6 \\ 0 & -1 & -2 & -6 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3-a & 6 \\ 0 & 0 & 1-a & 0 \end{bmatrix}.$$

当 $a\neq 1$ 时，$r(A)=3$，取自由变量 x_4 得 $x_4=1,x_3=0,x_2=-6,x_1=5$. 基础解系是 $(5,-6,0,1)^T$.

当 $a=1$ 时，$r(A)=2$．取自由变量 x_3,x_4，则由

$x_3=1,x_4=0$ 得 $x_2=-2,x_1=1$，

$x_3=0,x_4=1$ 得 $x_2=-6,x_1=5$，

知基础解系是 $(1,-2,1,0)^T,(5,-6,0,1)^T$.

2、设 $A=\begin{bmatrix}\lambda & 1 & 1\\ 0 & \lambda-1 & 0\\ 1 & 1 & \lambda\end{bmatrix}$，$b=\begin{bmatrix}a\\1\\1\end{bmatrix}$. 已知线性方程组 $Ax=b$ 存在 2 个不同的解，

（Ⅰ）求 λ,a；

（Ⅱ）求方程组 $Ax=b$ 的通解.

【解析】（Ⅰ）因为线性方程组 $Ax=b$ 有 2 个不同的解，所以 $r(A)=r(\overline{A})<n$.

由 $|A|=\begin{vmatrix}\lambda & 1 & 1\\ 0 & \lambda-1 & 0\\ 1 & 1 & \lambda\end{vmatrix}=(\lambda-1)\begin{vmatrix}\lambda & 1\\ 1 & \lambda\end{vmatrix}=(\lambda+1)(\lambda-1)^2=0$,

知 $\lambda=1$ 或 $\lambda=-1$.

当 $\lambda=1$ 时，必有 $r(A)=1,r(\overline{A})=2$.此时线性方程组无解.

而当 $\lambda=-1$ 时，

$$\overline{A}=\left[\begin{array}{ccc:c}-1 & 1 & 1 & a\\ 0 & -2 & 0 & 1\\ 1 & 1 & -1 & 1\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc:c}1 & 1 & -1 & 1\\ 0 & -2 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & a+2\end{array}\right],$$

若 $a=-2$，则 $r(A)=r(\overline{A})=2$，方程组 $Ax=b$ 有无穷多解.

故 $\lambda=-1$，$a=-2$.

（Ⅱ）当 $\lambda=-1$，$a=-2$ 时，

$$\overline{A}\to\left[\begin{array}{ccc:c}1 & 0 & -1 & \frac{3}{2}\\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2}\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right],$$

所以方程组 $Ax=b$ 的通解为 $(\frac{3}{2},-\frac{1}{2},0)^T+k(1,0,1)^T$，其中 k 是任意常数.

3、设齐次方程组

$$\begin{cases}ax_1+bx_2+bx_3+\cdots+bx_n=0,\\ bx_1+ax_2+bx_3+\cdots+bx_n=0,\\ \qquad\cdots\\ bx_1+bx_2+bx_3+\cdots+ax_n=0,\end{cases}$$

其中 $a\neq0,b\neq0,n\geq2$. 试讨论 a，b 为何值时，方程组仅有零解，有无穷多解？当有无穷多解时，求出其全部解，并用基础解系表示全部解.

【解析】对系数矩阵作初等行变换，把第 1 行的-1 倍分别加至第 2 行到第 n 行，有

$$\begin{bmatrix} a & b & b & \cdots & b & b \\ b & a & b & \cdots & b & b \\ b & b & a & \cdots & b & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ b & b & b & \cdots & a & b \\ b & b & b & \cdots & b & a \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} a & b & b & \cdots & b & b \\ b-a & a-b & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ b-a & 0 & a-b & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ b-a & 0 & 0 & \cdots & a-b & 0 \\ b-a & 0 & 0 & \cdots & 0 & a-b \end{bmatrix}.$$

（Ⅰ）如果 $a=b$，方程组的同解方程组是 $x_1+x_2+\cdots+x_n=0$.

由于 $n-r(A)=n-1$，取自由变量为 $x_2,x_3,\cdots,x_n$，得到基础解系为：

$\alpha_1=(-1,1,0,\cdots,0)^T,\alpha_2=(-1,0,1,\cdots,0)^T,\cdots,\alpha_{n-1}=(-1,0,0,\cdots,1)^T$

方程组通解是：$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_{n-1}\alpha_{n-1}$，其中 $k_1,k_2,\cdots,k_{n-1}$ 为任意常数.

（Ⅱ）如果 $a\neq b$，对系数矩阵作初等行变换，有

$$A \to \begin{bmatrix} a & b & b & \cdots & b & b \\ 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} a+(n-1)b & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

若 $a\neq(1-n)b$，则秩 $r(A)=n$，此时齐次方程组只有零解.

若 $a=(1-n)b$，则秩 $r(A)=n-1$.取 x_1 为自由变量，则基础解系为 $\alpha=(1,1,\cdots,1)^T$，于是方程组的通解是：$k\alpha$，其中 k 为任意常数.

4、证明：与基础解系等价的线性无关的向量组也是基础解系.

【解析】证明：设 $Ax=0$ 的基础解系是 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_t$.若 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 线性无关，$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 与 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_t$ 等价.

由于 $\beta_j(j=1,2,\cdots,s)$ 可以由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_t$ 线性表示，而 $\alpha_i(i=1,\cdots,t)$ 是 $Ax=0$ 的解，所以 $\beta_j(j=1,2,\cdots,s)$ 是 $Ax=0$ 的解.

因为 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_t$ 线性无关，秩 $r(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_t)=t$，又 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_t$ 与 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 等价，所以 $r(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s)=r(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_t)=t$.又因 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 线性无关，故 $s=t$.

因此 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$ 是 $Ax=0$ 的基础解系.

单元测试五 特征向量和特征值 相似和对角化

一、选择题

1、已知 A 是 4 阶矩阵，A^*是 A 的伴随矩阵，若 A^*的特征值是 1，－1，2，4，那么不可逆矩阵是

（A）$A-E$.　　　　（B）$2A-E$.

（C）$A+2E$.　　　　（D）$A-4E$.

【答案】(C)

【解析】由 A^*的特征值是 1，－1，2，4 知 $|A^*|=-8$，又因 $|A^*|=|A|^{n-1}$而知 $|A|^3=-8$，于是 $|A|=-2$.

那么，矩阵 A 的特征值是：－2，2，－1，$-\frac{1}{2}$.

因此，$A-E$ 的特征值是－3，1，－2，$-\frac{3}{2}$，因为特征值非 0，故矩阵 $A-E$ 可逆.

类似地易见，矩阵 $A+2E$ 的特征值中含有 0，所以矩阵 $A+2E$ 不可逆.

2、已知$\alpha=(1,-2,3)^T$是矩阵 $A=\begin{bmatrix}3 & 2 & -1\\ a & -2 & 2\\ 3 & b & -1\end{bmatrix}$的特征向量，则

（A）$a=-2$，$b=6$.　　　（B）$a=2$，$b=-6$.

（C）$a=2$，$b=6$.　　　（D）$a=-2$，$b=-6$.

【答案】(A)

【解析】设α是矩阵 A 属于特征值λ的特征向量，按定义有

$$\begin{bmatrix}3 & 2 & -1\\ a & -2 & 2\\ 3 & b & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ -2\\ 3\end{bmatrix}=\lambda\begin{bmatrix}1\\ -2\\ 3\end{bmatrix}$$

即有
$$\begin{cases}3-4-3=\lambda\\ a+4+6=-2\lambda\\ 3-2b-3=3\lambda\end{cases}$$

可见 $\lambda=-4$，$a=-2$，$b=6$，所以应选（A）.

3、设 A 是三阶矩阵，其特征值是 1，3，－2，相应的特征向量依次为α_1，α_2，α_3，若 $P=(\alpha_1, 2\alpha_3, -\alpha_2)$，则 $P^{-1}AP=$

（A）$\begin{bmatrix}1 & & \\ & -2 & \\ & & 3\end{bmatrix}$.　　（B）$\begin{bmatrix}1 & & \\ & -4 & \\ & & -3\end{bmatrix}$.

（C）$\begin{bmatrix}1 & & \\ & -2 & \\ & & -3\end{bmatrix}$.　　（D）$\begin{bmatrix}1 & & \\ & 3 & \\ & & -2\end{bmatrix}$.

【答案】(A)

【解析】 由 $A\alpha_2=3\alpha_2$，有 $A(-\alpha_2)=3(-\alpha_2)$，即当$\alpha_2$是矩阵 A 属于特征值$\lambda=3$ 的特征向量时，$-\alpha_2$仍是

矩阵 A 属于特征值λ＝3 的特征向量．同理 $2\alpha_3$ 仍是矩阵 A 属于特征值λ＝－2 的特征向量．

当 $P^{-1}AP=\boldsymbol{\Lambda}$ 时，P 由 A 的特征向量所构成，$\boldsymbol{\Lambda}$ 由 A 的特征值所构成，且 P 与 $\boldsymbol{\Lambda}$ 的位置是对应一致的．现在，矩阵 A 的特征值是 1，3，－2，故对角矩阵 $\boldsymbol{\Lambda}$ 应当由 1，3，－2 构成，因此排除（B）、（C）．由于 $2\alpha_3$ 是属于λ＝－2 的特征向量，所以－2 在对角矩阵 $\boldsymbol{\Lambda}$ 中应当是第 2 列，故应选（A）．

4、下列矩阵中，不能相似对角化的矩阵是

（A）$\begin{bmatrix}1&0&-1\\0&2&3\\-1&3&5\end{bmatrix}$．　　（B）$\begin{bmatrix}1&0&0\\2&3&0\\-1&5&-1\end{bmatrix}$．

（C）$\begin{bmatrix}1&0&-1\\2&0&-2\\-3&0&3\end{bmatrix}$．　　（D）$\begin{bmatrix}1&2&3\\0&1&3\\0&0&-1\end{bmatrix}$．

【答案】（D）

【解析】（A）是实对称矩阵，实对称矩阵必可以相似对角化．

（B）是下三角矩阵，主对角线元素就是矩阵的特征值，因而矩阵有三个不同的特征值，所以矩阵必可以相似对角化．

（C）是秩为 1 的矩阵，由｜$\lambda E-A$｜＝$\lambda^3-4\lambda^2$，知矩阵的特征值是 4，0，0．对于二重根λ＝0，由秩

$$r(0\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})-r(\boldsymbol{A})=1$$

知齐次方程组（$0E-A$）x＝0 的基础解系有 3－1＝2 个线性无关的解向量，即λ＝0 有两个线性无关的特征向量．从而矩阵必可以相似对角化．

（D）是上三角矩阵，主对角线上的元素 1，1，－1 就是矩阵的特征值，对于二重特征值λ＝1，由秩

$$r(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})=r\begin{bmatrix}0&-2&-3\\0&0&-3\\0&0&2\end{bmatrix}=2$$

知齐次方程组（$E-A$）x＝0 只有 3－2＝1 个线性无关的解，亦即＝1 只有一个线性无关的特征向量，故矩阵必不能相似对角化．所以应当选（D）．

5、设 A 是 n 阶非零矩阵，$A^m=0$，下列命题中不一定正确的是

（A）A 的特征值只有零．

（B）A 必不能对角化．

（C）$E+A+A^2+\cdots+A^{m-1}$ 必可逆．

（D）A 只有一个线性无关的特征向量．

【答案】（D）

【解析】设 $A\alpha=\lambda\alpha,\alpha\neq 0$，则 $A^m\alpha=\lambda^m\alpha=0$．（A）正确．

因为 $A\neq 0$，$r(A)\neq 1$，那么 $Ax=0$ 的基础解系有 $n-r(A)$ 个解，即 $\lambda=0$ 有 $n-r(A)$ 个线性无关的特征向量．

故（B）正确，而（D）不一定正确．

由 $(E-A)(E+A+A^2+\cdots+A^{m-1})=E-A^m=E$，知（C）正确.故选（D）．

二、填空题

1、已知 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}3&2&2\\2&3&2\\2&2&3\end{bmatrix}$，$A^*$是 A 的伴随矩阵，那么 A^*的特征值是______.

【答案】1，7，7

【解析】由矩阵 A 的特征多项式

$$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-3&-2&-2\\-2&\lambda-3&-2\\-2&-2&\lambda-3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda-7&\lambda-7&\lambda-7\\-2&\lambda-3&-2\\-2&-2&\lambda-3\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}\lambda-7&0&0\\-2&\lambda-1&0\\-2&0&\lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-7)(\lambda-1)^2=0$$

知矩阵 A 的特征值是 7，1，1.

由｜A｜＝$\prod\lambda_i$，从而｜A｜＝7•1•1＝7.

因为若 $A\alpha=\lambda\alpha$，则有 $A^*\alpha=\dfrac{|\boldsymbol{A}|}{\lambda\boldsymbol{\alpha}}$·所以 A^*的特征值是 1，7，7.

2、设 A 是 3 阶矩阵，且各行元素之和都是 5，则 A 必有特征向量______.

【答案】$\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$

【解析】因为各行元素之和都是 5，即 $\begin{cases}a_{11}+a_{12}+a_{13}=5,\\a_{21}+a_{22}+a_{23}=5,\\a_{31}+a_{32}+a_{33}=5,\end{cases}$ 亦即

$$\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5\\5\\5\end{bmatrix}=5\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix},$$

从而 $A\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}=5\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$.所以矩阵 A 必有特征向量 $\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$.

3、已知三阶矩阵 A 的特征值是 $\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{4}$，又三阶矩阵 B 满足关系式 $A^{-1}BA=6A+BA$. 则矩阵 B 的特征值是______.

【答案】6，3，2

【解析】由 $A^{-1}BA=6A+BA\Rightarrow A^{-1}B=6E+B\Rightarrow$（$A^{-1}-E$）$B=6E$

知 $B=6$（$A^{-1}-E$）$^{-1}$

因为 A 的特征值 $\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{4}\Rightarrow A^{-1}$ 的特征值 2，3，4 $\Rightarrow A^{-1}-E$ 的特征值 1，2，3

$\Rightarrow$（$A^{-1}-E$）$^{-1}$的特征值$1,\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{3}$.

所以矩阵 B 的特征值：6，3，2.

4、已知矩阵 $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 1\\ -2 & -3 & a\\ 0 & 0 & -1\end{bmatrix}$有两个线性无关的特征向量，则$a=$______.

【答案】-1

【解析】由 A 的特征多项式

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & -2 & -1\\ 2 & \lambda+3 & -a\\ 0 & 0 & \lambda+1\end{vmatrix}=(\lambda+1)^3.$$

知矩阵 A 的特征值是$\lambda=-1$（三重根），因为 A 只有 2 个线性无关的特征向量，故

$$r(-E-A)=r\begin{bmatrix}-2 & -2 & -1\\ 2 & 2 & -a\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}=1$$

从而$a=-1$

5、已知α是 3 维列向量，α^T是α的转置，若矩阵$\alpha\alpha^T$相似于$\begin{bmatrix}2 & 2 & 2\\ 2 & 2 & 2\\ 2 & 2 & 2\end{bmatrix}$，则$\alpha^T\alpha$=______.

【答案】6

【解析】设α=（a_1，a_2，a_3）^{T}，记 $A=\alpha\alpha^T$，有

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}a_1\\ a_2\\ a_3\end{bmatrix}[a_1,a_2,a_3]=\begin{bmatrix}a_1^2 & a_1a_2 & a_1a_3\\ a_1a_2 & a_2^2 & a_2a_3\\ a_1a_3 & a_2a_3 & a_3^2\end{bmatrix}$$

又

$$\boldsymbol{\alpha}^T\boldsymbol{\alpha}=[a_1,a_2,a_3]\begin{bmatrix}a_1\\ a_2\\ a_3\end{bmatrix}=a_1^2+a_2^2+a_3^2$$

可见$\alpha^T\alpha$是矩阵 A 主对角线元素之和，即矩阵 A 的迹 tr（A）由于相似矩阵迹相同，所以本题中$\alpha^T\alpha$=2+2+2=6.

三、计算题与证明题

1、已知 $A=\begin{bmatrix}-4 & -10 & 0\\ 1 & 3 & 0\\ 3 & x & 1\end{bmatrix}$可对角化，求可逆矩阵 P 及对角矩阵Λ，使$P^{-1}AP=\Lambda$.

【解析】由特征多项式

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda+4 & 10 & 0\\ -1 & \lambda-3 & 0\\ -3 & -x & \lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2(\lambda+2),$$

知矩阵 A 的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=1,\lambda_3=-2.$

因为矩阵 A 可以相似对角化，故 $r(E-A)=1$.而

$$E-A=\begin{bmatrix}5&10&0\\-1&-2&0\\-3&x&0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&2&0\\0&6-x&0\\0&0&0\end{bmatrix},$$

所以 $x=6$.

当 $\lambda=1$ 时，由 $(E-A)x=0$ 得基础解系 $\alpha_1=(-2,1,0)^T,\alpha_2=(0,0,1)^T$

当 $\lambda=-2$ 时，由 $(-2E-A)x=0$ 得基础解系 $\alpha_3=(-5,1,3)^T$

那么，令 $P=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=\begin{bmatrix}-2&0&-5\\1&0&1\\0&1&3\end{bmatrix}$，得 $P^{-1}AP=\begin{bmatrix}1&&\\&1&\\&&-2\end{bmatrix}$

2、设矩阵 A 与 B 相似，且 $A=\begin{bmatrix}1&-1&1\\2&4&-2\\-3&-3&a\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&b\end{bmatrix}$.求可逆矩阵 P，使 $P^{-1}AP=B$.

【解析】由于 $A\sim B$，有

$$\begin{cases}1+4+a=2+2+b,\\|A|=6a-6=4b=|B|.\end{cases}\Rightarrow a=5,b=6$$

由 $A\sim B$，知 A 与 B 有相同的特征值，于是 A 的特征值是 $\lambda_1=\lambda_2=2,\lambda_3=6.$

当 $\lambda=2$ 时，解齐次方程组 $(2E-A)x=0$ 得到基础解系为 $\alpha_1=(1,-1,0)^T,\alpha_2=(1,0,1)^T$，即 $\lambda=2$ 的线性无关的特征向量.

当 $\lambda=6$ 时，解齐次方程组 $(6E-A)x=0$ 得到基础解系是 $(1,-2,3)^T$，即 $\lambda=6$ 的特征向量.

那么，令 $P=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=\begin{bmatrix}1&1&1\\-1&0&-2\\0&1&3\end{bmatrix}$，则有 $P^{-1}AP=B$.

3、已知 $A\alpha_i=i\alpha_i(i=1,2,3)$，其中 $\alpha_1=(1,2,2)^T,\alpha_2=(2,-2,1)^T,\alpha_3=(-2,-1,2)^T$.求矩阵 A.

【解析】由于 $A\alpha_i=i\alpha_i$ 知，A 有 3 个不同的特征值 1,2,3.所以

$$A\sim\Lambda=\begin{bmatrix}1&&\\&2&\\&&3\end{bmatrix}，即 P^{-1}AP=\Lambda，其中 P=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=\begin{bmatrix}1&2&-2\\2&-2&-1\\2&1&2\end{bmatrix}.$$

故 $A=P\Lambda P^{-1}=\begin{bmatrix} \frac{7}{3} & 0 & -\frac{2}{3} \\ 0 & \frac{5}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & 2 \end{bmatrix}$.

4、已知 $A^2=0$， $A\neq 0$，证明 A 不能相似对角化.

【解析】证明：设 $A\alpha=\lambda\alpha,\alpha\neq 0$，那么 $A^2\alpha=\lambda^2\alpha=0$.从而 $\lambda=0$.

又因 $A\neq 0$，$r(A)\geq 1$，所以 $Ax=0$ 的基础解系有 $n-r(A)$ 个向量，即 $\lambda=0$ 有 $n-r(A)$ 个线性无关的特征向量.

又 $n-r(A)<n$，所以 A 不能相似对角化.

单元测试六 二次型

一、选择题

1、二次型 f（x_1，x_2，x_3）$=x_1^2+5x_2^2+x_3^2-4x_1x_2+2x_2x_3$ 的标准形可以是

（A）$y_1^2+4y_2^2$. （B）$y_1^2-6y_2^2-2y_3^2$.

（C）$y_1^2-y_2^2$. （D）$y_1^2+4y_2^2+y_3^2$.

【答案】(A)

【解析】用配方法，有

$$f=x_1^2-4x_1x_2+4x_2^2+x_2^2+2x_2x_3+x_3^2$$

$$=(x_1-2x_2)^2+(x_2+x_3)^2$$

可见二次型的正惯性指数 p=2，负惯性指数 q=0．因此，（A）是二次型的标准形．所用坐标变换是：

$$\begin{cases} z_1=x_1-2x_2 \\ z_2=x_2+x_3 \\ z_3=x_3 \end{cases} \text{即} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix}$$

与
$$\begin{cases} z_1=y_1 \\ z_2=2y_2 \\ z_3=y_3 \end{cases} \text{即} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$$

即经坐标变换

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$$

有 $\boldsymbol{x}^T \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}^T \boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{y} = y_1^2 + 4y_2^2$

2、下列矩阵中，正定矩阵是

（A）$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{bmatrix}$.　　（B）$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 3 \\ 0 & 3 & 8 \end{bmatrix}$.

（C）$\begin{bmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{bmatrix}$.　　（D）$\begin{bmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}$.

【答案】（C）

【解析】二次型正定的必要条件是：$a_{ii}>0$.

在（D）中，由于 $a_{33}=0$，易知 $f(0,0,1)=0$，与 $X \neq \mathbf{0}$，$\mathbf{x}^T \mathbf{A}\mathbf{x}>0$ 相矛盾.

二次型正定的充分必要条件是顺序主子式全大于零．在（A）中，二阶主子式

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 0$$

在（B）中，三阶主子式 $\Delta_3 = |A| = -1$.

因此（A）、（B）、（D）均不是正定矩阵.

3、设 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$，$B = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$，则 A 与 B

（A）合同且相似.　　（B）合同但不相似.

（C）不合同但相似.　　（D）不合同也不相似.

【答案】（A）

【解析】由 $|\lambda E - A| = \lambda^3 - 3\lambda^2$，知矩阵 A 的特征值为 3，0，0.

又因 A 是实对称矩阵，A 必能相似对角化，所以 $A \sim B$.

因为 A，B 有相同的特征值，从而二次型 $x^T Ax$ 与 $x^T Bx$ 有相同的标准形，进而有相同的正、负惯性指数，所以 $A \simeq B$.故应选（A）.

4、二次型 $x^T Ax$ 正定的充要条件是

（A）负惯性指数为零.　　（B）存在可逆矩阵 P，使 $P^{-1}AP = E$.

（C）A 的特征值全大于零.　　（D）存在 n 阶矩阵，使 $A = C^T C$.

【答案】（C）

【解析】（A）是正定的必要条件.若 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+5x_3^2$，虽 $q=0$，但 f 不正定.

（B）是充分条件.正定并不要求特征值全为 1.虽 $A=\begin{bmatrix}1&0\\0&2\end{bmatrix}$不和单位矩阵 E 相似，但二次型 x^TAx 正定.

（D）中没有矩阵 C 可逆的条件，也就推导不出 A 与 E 合同，例如 $C=\begin{bmatrix}1&1\\1&1\end{bmatrix}$，

$A=C^TC=\begin{bmatrix}1&1\\1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1\\1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&2\\2&2\end{bmatrix}$，则 x^TAx 不正定.

故应选（C）.

5、设 A，B 均是 n 阶实对称矩阵，若 A 与 B 合同，则

（A）A 与 B 有相同的特征值. （B）A 与 B 有相同的秩.

（C）A 与 B 有相同的特征向量. （D）A 与 B 有相同的行列式.

【答案】（B）

【解析】按定义，若存在可逆矩阵 C 使 $C^TAC=B$，则称 A 与 B 合同.

因为矩阵 C 可逆，故有

$$r(A)=r(C^TAC)=r(B)$$

即（B）正确.

注意，若 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix},\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1&0\\0&4\end{bmatrix},\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}1&0\\0&2\end{bmatrix}$,则有 $C^TAC=B$，即 A 与 B 合同.

此时 A 的特征值是 1，1，B 的特征值是 1，4；$(3,2)^T$ 是 A 的特征向量，但不是 B 的特征向量；$|A|=1$，$|B|=4$ 亦不相同．说明（A）（C）（D）均不正确.

二、填空题

1、若二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=ax_1^2+4x_2^2+ax_3^2+6x_1x_2+2x_2x_3$ 是正定的，则 a 的取值范围是______.

【答案】 $a>\dfrac{5}{2}$

【解析】 二次型 f 的矩阵为 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}a&3&0\\3&4&1\\0&1&a\end{bmatrix}$

因为 f 正定 $\Leftrightarrow$ A 的顺序主子式全大于零，即

$\Delta_1=a>0$

$\Delta_2=\begin{vmatrix}a&3\\3&4\end{vmatrix}=4a-9>0$

$\Delta_3=|\boldsymbol{A}|=4a^2-10a>0$

故 f 正定 $\Leftrightarrow a>\dfrac{5}{2}$.

2、设 α＝（1，0，1）^{T}，$A=\alpha\alpha^T$，若 B＝（$kE+A$）*是正定矩阵，则 k 的取值范围是______.

【答案】 $k<-2$ 或 $k>0$

【解析】 由于 $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}[1,0,1]=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&0&0\\1&0&1\end{bmatrix}$

有 $|\lambda E-A|=\lambda^3-2\lambda^2=\lambda^2(\lambda-2)$

即矩阵 A 的特征值是 2，0，0，从而矩阵 $kE+A$ 的特征值是 $k+2$，k，k，那么 B 的特征值是 k^2，$k(k+2)$，$k(k+2)$.

所以，B 正定的充要条件是：$k^2>0$，$k(k+2)>0$.

3、二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=(x_1+x_2)^2+(x_2-x_3)^2+(x_3+x_1)^2$ 的正、负惯性指数分别为 $p=$______，$q=$______.

【答案】 $p=2,q=0$

【解析】 $f=(2x_1^2+2x_1x_2+2x_1x_3)+2x_2^2-2x_2x_3+2x_3^2=2(x_1+\dfrac{1}{2}x_2+\dfrac{1}{2}x_3)^2+\dfrac{3}{2}(x_2-x_3)^2$

由于二次型的标准形是 $2y_1^2+\dfrac{3}{2}y_2^2$，所以 $p=2,q=0$.

4、已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&1&-2\\1&-2&1\\-2&1&1\end{bmatrix}$ 与二次型 $\mathrm{x}^{\mathrm{T}}\mathrm{Bx}=3x_1^2+ax_3^2$ 的矩阵 B 合同，则 a 的取值______.

【答案】 $a<0$

【解析】 矩阵 A 与 B 合同 $\Leftrightarrow$ x^TAx 与 x^TBx 有相同的正、负惯性指数.

由于 $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-1&-1&2\\-1&\lambda+2&-1\\2&-1&\lambda-1\end{vmatrix}=\lambda(\lambda-3)(\lambda+3)$

可见 $p_{\mathbf{A}}=1$，$q_{\mathbf{A}}=1$. 因而 $x^TBx=3x_1^2+ax_2^2$ 的 $p_{\mathbf{B}}=1$，$q_{\mathbf{B}}=1$ 时，矩阵 A 和 B 合同.

所以 $a<0$ 即可.

5、已知 $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}&&1\\&1&\\1&&\end{bmatrix}$ 和 $\mathbf{B}=\begin{bmatrix}2&&\\&1&\\&&-2\end{bmatrix}$ 合同，那么使 $C^TAC=B$ 的可逆矩阵 C＝______.

【答案】 $\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&0\\1&0&-1\end{bmatrix}$

【解析】 二次型 x^TAx 经坐标变换 $x=Cy$ 得 $x^TAx=y^TBy$ 就有 A 和 B 合同，其中 $B=C^TAC$，那么求矩阵 C

就是求所用坐标变换（由于本题矩阵 A 和 B 不相似．若先用正交变换过渡是可行的，但比较麻烦）.

对二次型 $x^TAx=2x_1x_3+x_2^2$

用配方法，令 $\begin{cases} x_1=y_1+y_3 \\ x_2=y_2 \\ x_3=y_1-y_3 \end{cases}$

即有 $x^TAx=2(y_1+y_3)(y_1-y_3)+y_2^2=2y_1^2+y_2^2-2y_3^2$

可见经坐标变换 $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$，就有矩阵 A 和 B 合同，所以 $\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

三、计算题与证明题

1、设 $A=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$，则有 $A\simeq B$.

【解析】证明：因为有可逆矩阵 $C=\begin{bmatrix} \sqrt{3} & \\ & \sqrt{2} \end{bmatrix}$，使 $C^TAC=\begin{bmatrix} \sqrt{3} & \\ & \sqrt{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & \\ & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \sqrt{3} & \\ & \sqrt{2} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3 & \\ & 4 \end{bmatrix}=B$，

或者由二次型 $x^TAx=x_1^2+2x_2^2$ 与 $x^TBx=3x_1^2+4x_2^2$ 有相同的正惯性指数 $p=2$ 及相同的负惯性指数 $q=0$ 而知 $A\simeq B$.

2、求正交变换化二次型 $2x_3^2-2x_1x_2+2x_1x_3-2x_2x_3$ 为标准形，并写出所用正交变换.

【解析】二次型矩阵是 $A=\begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$.由特征多项式

$$\left|\lambda E-A\right|=\begin{vmatrix} \lambda & 1 & -1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ -1 & 1 & \lambda-2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \lambda+1 & \lambda+1 & 0 \\ 1 & \lambda & 1 \\ -1 & 1 & \lambda-2 \end{vmatrix}=(\lambda+1)(\lambda^2-3\lambda),$$

得到 A 的特征值是 3，-1，0.

对 $\lambda=3$，由 $(3E-A)x=0$，即 $\begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}\to\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ & 2 & 1 \\ & & 0 \end{bmatrix}$，解得 $\alpha_1=(1,-1,2)^T$.

类似地，对 $\lambda=-1$，$\alpha_2=(1,1,0)^T$；$\lambda=0$ 时，$\alpha_3=(-1,1,1)^T$.特征值无重根，仅需单位化：

$$\gamma_1=\frac{\alpha_1}{\|\alpha_1\|}=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix},\quad \gamma_2=\frac{\alpha_2}{\|\alpha_2\|}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},\quad \gamma_3=\frac{\alpha_3}{\|\alpha_3\|}=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

构造正交矩阵$C=\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$，那么令$x=Cy$，二次型$x^TAx=3y_1^2-y_2^2$为所求标准形.

3、二次型$f(x_1,x_2,x_3)=5x_1^2+5x_2^2+cx_3^2-2x_1x_2-6x_2x_3+6x_1x_3$的秩为 2，求$c$及此二次型的规范形，并写出相应的坐标变换.

【解析】二次型矩阵$A=\begin{bmatrix} 5 & -1 & 3 \\ -1 & 5 & -3 \\ 3 & -3 & c \end{bmatrix}$，由二次型的秩为 2，即矩阵$A$的秩$r(A)=2$，则有

$|A|=24(c-3)=0\Rightarrow c=3$

由特征多项式

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix} \lambda-5 & 1 & -3 \\ 1 & \lambda-5 & 3 \\ -3 & 3 & \lambda-3 \end{vmatrix}=\lambda(\lambda-4)(\lambda-9)$$

可知矩阵A的特征值是 0，4，9.

由$(0E-A)x=0$得$\lambda=0$的特征向量$\alpha_1=(-1,1,2)^T$.

由$(4E-A)x=0$得$\lambda=4$的特征向量$\alpha_2=(1,1,0)^T$.

由$(9E-A)x=0$得$\lambda=9$的特征向量$\alpha_3=(1,-1,1)^T$.

令$P_1=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$，经$x=P_1y$有$x^TAx=y^T\Lambda y=4y_2^2+9y_3^2$.

$$\begin{cases} y_1=z_1, \\ y_2=\frac{1}{2}z_2, \\ y_3=\frac{1}{3}z_3, \end{cases}$$即$$\begin{bmatrix} y_2 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix}$$，则有

$x^TAx=z^T\Lambda z=z_2^2+z_3^2$，记$y=P_2z$

而所用坐标变换是$x=Cz$，其中

$$C=P_1P_2=\begin{bmatrix}-1&1&1\\1&1&-1\\2&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&\frac{1}{2}&0\\0&0&\frac{1}{3}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1&\frac{1}{2}&\frac{1}{3}\\1&\frac{1}{2}&-\frac{1}{3}\\2&0&\frac{1}{3}\end{bmatrix}.$$

4、已知 $A=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{bmatrix}$ 是正定矩阵，证明 $\Delta=\begin{vmatrix}a_{22}&a_{23}\\a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}>0$

【解析】证明：令 $C_1=\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}$，$C_2=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}$，$C=C_1C_2$，则 C 是可逆矩阵，且

$$C^TAC=C_2^TC_1^TAC_1C_2=C_2^T\begin{bmatrix}a_{22}&a_{21}&a_{23}\\a_{12}&a_{11}&a_{13}\\a_{32}&a_{31}&a_{33}\end{bmatrix}C_2=\begin{bmatrix}a_{22}&a_{23}&a_{21}\\a_{32}&a_{33}&a_{31}\\a_{12}&a_{13}&a_{11}\end{bmatrix}\overset{记}{=\!=}B,$$

则 $A\simeq B$.由于 A 正定，故 B 正定，从而 B 的顺序主子式 $\Delta>0$.