2013 考研基础班线性代数

主讲：尤承业

欢迎使用新东方在线电子教材

考研基础班线性代数讲义

目　录

新东方在线
www.koolearn.com 网络课堂电子教材系列

第一讲 基本概念

线性代数的主要的基本内容：线性方程组 矩阵 向量 行列式等

一．线性方程组的基本概念

线性方程组的一般形式为：

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2, \\ \quad\cdots \qquad \cdots \qquad \cdots \qquad \cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m, \end{cases}$$

其中未知数的个数 n 和方程式的个数 m 不必相等.

线性方程组的解是一个 n 个数 C_1, C_2, …, C_n 构成, 它满足: 当每个方程中的未知数 x_i 都用 C_i 替代时都成为等式.

对线性方程组讨论的主要问题两个:

(1)判断解的情况.

线性方程组的解的情况有三种: 无解, 唯一解, 无穷多解.

$$\begin{cases} ax+by=c \\ dx+ey=f \end{cases}$$

如果两条直线是相交的则有一个解；如果两条直线是重合的则有无穷多个解；如果两条直线平行且不重合则无解。

(2)求解, 特别是在有无穷多解时求通解.

齐次线性方程组： $b_1=b_2=\cdots=b_n=0$ 的线性方程组. 0, 0, ⋯, 0 总是齐次线性方程组的解, 称为零解.

因此齐次线性方程组解的情况只有两种: 唯一解(即只有零解)和无穷多解(即有非零解).

二. 矩阵和向量

1. 基本概念

矩阵和向量都是描写事物形态的数量形式的发展.

矩阵由数排列成的矩形表格, 两边界以圆括号或方括号, m 行 n 列的表格称为 m×n 矩阵. 这些数称为他的元素, 位于第 i 行 j 列的元素称为(i, j)位元素.

$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 0 & 4 & 5 \end{pmatrix}$是一个 2×3 矩阵.

对于上面的线性方程组, 称矩阵

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \text{和} (A|\beta)=\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

为其系数矩阵和增广矩阵. 增广矩阵体现了方程组的全部信息, 而齐次方程组只用系数矩阵

新东方在线 www.koolearn.com 网络课堂电子教材系列

就体现其全部信息.

2009 年的一个题中,一个方程组的系数矩阵为

$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$,常数列为$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$,则方程组为$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 = 1, \\ -x_1 + x_2 + x_3 = -1, \\ -x_2 - 2x_3 = 2. \end{cases}$

由 n 个数构成的有序数组称为一个 **n 维向量**,称这些数为它的**分量**.
零矩阵:元素都是 0 的矩阵. 零向量:分量都是 0 的向量.

2. 矩阵和向量的关系
书写中可用矩阵的形式来表示向量:写成一行或写成一列.

问题:(3,-2,1)和$\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$是不是一样?

作为向量它们并没有区别,但是作为矩阵,它们不一样(左边是 1×3 矩阵,右边是 3×1 矩阵).
习惯上把它们分别称为行向量和列向量.
一个 m×n 的矩阵的每一行是一个 n 维向量,称为它的行向量; 每一列是一个 m 维向量, 称为它的列向量.

3. n 阶矩阵与几个特殊矩阵
n×n 的矩阵叫做 n 阶矩阵.
把 n 阶矩阵的从左上到右下的对角线称为它对角线.(其上的元素行号与列号相等.)
下面列出几类常用的 n 阶矩阵:

对角矩阵: 对角线外的的元素都为 0 的 n 阶矩阵.

数量矩阵: 对角线上的的元素都等于一个常数 c 的对角矩阵.

单位矩阵: 对角线上的的元素都为 1 的对角矩阵,记作 E(或 I).

上三角矩阵: 对角线下的的元素都为 0 的 n 阶矩阵.

下三角矩阵: 对角线上的的元素都为 0 的 n 阶矩阵.

对称矩阵:满足 $A^T = A$ 矩阵. 也就是对任何 i,j,(i,j)位的元素和(j,i) 位的元素总是相等的 n 阶矩阵.

问题:下列矩阵都是什么矩阵?

① $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ ② $\begin{pmatrix} c & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$ ③ $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

④ $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ⑤ $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

对角矩阵: ①、②、⑤
上三角矩阵: ①、②、③、⑤
下三角矩阵: ①、②、⑤

新东方在线 www.koolearn.com 网络课堂电子教材系列

对称矩阵：①、②、④、⑤

三. 线性运算和转置

1. 线性运算

是矩阵和向量所共有的.

① **加(减)法**:两个 m×n 的矩阵 A 和 B 可以相加(减),得到的和(差)仍是 m×n 矩阵,记作 $A+B$ ($A-B$),法则为对应元素相加(减).

$$\begin{pmatrix} 0 & 4 & -5 \\ 1 & 1 & 7 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & -4 & 3 \\ 2 & 0 & -6 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

两个同维数的向量可以相加(减),规则为对应分量相加(减).

② **数乘**: 一个数 c 与一个 m×n 的矩阵 A 可以相乘,乘积仍为 m×n 的矩阵,记作 cA,法则为 A 的每个元素乘 c.

一个数 c 与一个 n 维向量 α 可以相乘,乘积仍为 n 维向量,记作 $c\alpha$. 法则为 α 的每个元素乘 c.

$$\begin{pmatrix} c & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}=cE$$

向量组的线性组合：设 $\alpha_1,a_2,\cdots,\alpha_s$ 是一组 n 维向量， $c_1,c_2,\cdots,c_s$ 是一组数，则称 $c_1\alpha_1+c_2\alpha_2+\cdots+c_s\alpha_s$ 为 $\alpha_1,a_2,\cdots,\alpha_s$ 的以 $c_1,c_2,\cdots,c_s$ 为系数的**线性组合**.

例:求矩阵 $A=\begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 5 & 0 & 7 \\ 0 & 8 & -6 \end{pmatrix}$ 的列向量组的系数为 1, 1, 1 的线性组合.

解: $\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ -6 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 6 \\ 12 \\ 2 \end{pmatrix}$

2. **转置**

把一个 m×n 的矩阵 A 行和列互换,得到的 n×m 的矩阵称为 A 的转置,记作 A^T.

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 0 & 8 & 7 \end{pmatrix}^T=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 8 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$$

$(A\pm B)^T=A^T\pm B^T$

$(cA)^T=cA^T$

$\alpha^T=(-1.2.3)$即$\alpha=\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

新东方在线 www.koolearn.com 网络课堂电子教材系列

四. 矩阵的初等变换和阶梯形矩阵

1. 初等变换

矩阵有初等行变换和初等列变换, 它们各有 3 类.

初等行变换:

① 交换两行的位置.

② 用一个<u>非 0</u> 的常数乘某一行的各元素.

③ 把某一行的倍数加到另一行上. $A \to B$.

2. 阶梯形矩阵: 一个矩阵称为阶梯形矩阵, 如果满足:

① 如果它有零行, 非零行, 则都零行在下, 非零行在上.

② 如果它有非零行, 则每个非零行的第一个非 0 元素所在的列号自上而下严格单调上升.

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & 6 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{matrix} 1 \\ 3 \\ 4 \\ \ \end{matrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & -3 & 2 & 6 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 4- & 6 \\ 0 & 0 & 0- & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & 6 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{matrix} 1 \\ 4 \\ 4 \\ \ \end{matrix}$$

问题: 对角矩阵, 上三角矩阵, 数量矩阵中, 哪个一定是阶梯形矩阵?

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} c & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$$

一个 n 阶的阶梯形矩阵一定是上三角矩阵.

问题: 如果 A 是阶梯形矩阵.

(1) A 去掉一行还是阶梯形矩阵吗?

(2) A 去掉一列还是阶梯形矩阵吗?

3. 简单阶梯形矩阵

把阶梯形矩阵的每个非零行的第一个非 0 元素所在的位置称为**台角**.

简单阶梯形矩阵: 是特殊的阶梯形矩阵, 满足:

③台角位置的元素为 1.

④并且其正上方的元素都为 0.

4. 用初等行变换把矩阵化为阶梯形矩阵

每个阶梯形矩阵都可以用初等行变换化为简单阶梯形矩阵.

每个矩阵都可以用初等行变换化为阶梯形矩阵

$$\begin{pmatrix} 2 & -5 & 6 & 13 & 13 \\ 1 & -3 & 2 & 6 & 5 \\ -2 & 5 & -4 & -15 & -1 \\ -1 & 1 & -4 & -9 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & 6 & 5 \\ 2 & -5 & 6 & 13 & 13 \\ -2 & 5 & -4 & -15 & -1 \\ -1 & 1 & -4 & -9 & 1 \end{pmatrix} \to$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & 6 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 12 \\ 0 & -2 & -2 & -3 & 6 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & 6 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 12 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 12 \end{pmatrix} \to$$

新东方在线 www.koolearn.com 网络课堂电子教材系列

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & 6 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \to$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 0 & -7 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -9 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -34 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -9 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

请注意:

① 从阶梯形矩阵化得简单阶梯形矩阵时,台角不改变.

②一个矩阵用初等行变换化得的阶梯形矩阵并不是唯一的,但是其非零行数和台角位置是确定的.

③一个矩阵用初等行变换化得的简单阶梯形矩阵是唯一的.

五. 线性方程组的矩阵消元法

消元法原理:用同解变换化简方程组然后求解.

线性方程组的同解变换有三种:

① 交换两个方程的上下位置.

② 用一个非 0 的常数乘某个方程.

③ 把某个方程的倍数加到另一个方程上.

反映在增广矩阵上就是三种初等行变换.

矩阵消元法即用初等行变换化线性方程组的增广矩阵为阶梯形矩阵,再讨论解的情况和求解.

例:

$$(A|\beta) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 5 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -2 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ 3x_2 - 2x_3 - x_4 = -2 \\ 3x_3 + x_4 = 4 \\ -2x_4 = 4 \end{cases}$$

矩阵消元法步骤如下:

(1)写出方程组的增广矩阵($A|\beta$),用初等行变换把它化为阶梯形矩阵($B|\gamma$).

(2)用($B|\gamma$)判别解的情况:

如果最下面的非零行为$(0,0,\cdots,0|d)$,则无解,否则有解. 有解时看非零行数 r(r 不会大于未知数个数 n),r=n 时唯一解;r<n 时无穷多解.

新东方在线 www.koolearn.com 网络课堂电子教材系列

(3)有唯一解时求解的**初等变换法**:去掉$(B|\gamma)$的零行,得到一个 n×(n+1)矩阵$(B_0|\gamma_0)$,并用初等行变换把它化为简单阶梯形矩阵$(E|\eta)$,则$\boldsymbol{\eta}$就是解.

$$(B_0|\gamma_0)=\left(\begin{array}{ccccc|c} b_{11} & * & * & \cdots & * & \\ 0 & b_{22} & * & \cdots & * & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \gamma_0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & b_{nn} & \end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & c_1 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & c_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & c_n \end{array}\right)$$

$(c_1,c_2,\cdots,c_n)$ 就是解.

$(A|\beta)\to(B|\gamma)\to(B_0|\gamma_0)\to(E|\eta)$, $\boldsymbol{\eta}$就是解.

$$(B_0|\gamma_0)=\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 5 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -2 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 4 \end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 5 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & -2 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right)$$

解为(1,0,2,-2).

对齐次线性方程组:
(1)写出方程组的系数矩阵 A,用初等行变换把它化为阶梯形矩阵 B.
(2)用 B 判别解的情况:非零行数 r=n 时只有零解; r<n 时有非零解(求解方法在第五章讲).
推论:当方程的个数 m<n 时,有非零解.

第二讲 行列式

1.形式和意义
形式:用 n^2 个数排列成的一个 n 行 n 列的表格,两边界以竖线,就成为一个 **n 阶行列式**:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \qquad \text{(简记为 } a_{ij}\text{)}$$

意义:是一个算式,把这 n^2 个元素按照一定的法则进行运算,得到的数值称为这个行列式的**值**.
请注意行列式和矩阵在形式上和意义上的区别.
当两个行列式的值相等时,就可以在它们之间写等号!(不必形式一样,甚至阶数可不同.)

每个 n 阶矩阵 A 对应一个 n 阶行列式,记作$|A|$.

行列式的的核心问题是值的计算.

一. 定义(完全展开式)
2 阶和 3 阶行列式的计算公式:

新东方在线 www.koolearn.com 网络课堂电子教材系列

$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}$ $-a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$ 一般地,一个 n 阶行列式

$$|a_{ij}| = \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}.$$

这里

1．是许多(n!个)项的代数和(在求和时每项先要乘+1 或-1.)

2. 每一项 $a_{1j_1}, a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$,都是 n 个元素的乘积,它们取自不同行,不同列.即列标 $j_1, j_2 \cdots j_n$ 构成 1,2, ⋯,n 的一个全排列(称为一个 n 元排列),共有 n!个 n 元排列,每个 n 元排列对应一项,因此共有 n!个项.

$\sum\limits_{j_1 j_2 \cdots j_n}$ 表示对所有 n 元排列求和.

3. 规定 $\tau(j_1, j_2 \cdots j_n)$ 为全排列 $j_1, j_2 \cdots j_n$ 的逆序数.

称 1,2,⋯,n 为自然序排列,如果不是自然序排列,就出现小数排在大数右面的现象,一对大小的数构成一个逆序.

逆序数可如下计算:标出每个数右面比它小的数的个数,它们的和就是逆序数.

例如求 436512 的逆序数:

$\overset{3}{4}\overset{2}{3}\overset{3}{6}\overset{2}{5}\overset{0}{1}\overset{0}{2}$,　　τ (436512)=3+2+3+2+0+0=10.

用完全展开式求行列式的值一般来说工作量很大.只在有大量元素为 0,使得只有少数项不为 0 时,才可能用它作行列式的计算.

例如下三角行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ a_{n-11} & a_{n-12} & \cdots & \cdots & a_{n-1n-1} & 0 \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & \cdots & a_{nn-1} & a_{nn} \end{vmatrix}$$
$$= (-1)^{\tau(12\cdots n)} a_{11}a_{22}\cdots a_{nn} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

对角行列式,上(下)三角行列式的值就等于对角线上的元素的乘积

例　求 $\begin{vmatrix} x-3 & a & -1 & 4 \\ 5 & x-8 & 0 & -2 \\ 0 & b & x+1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & x \end{vmatrix}$ 的 x^4 和 x^3 的系数.

解析：x^4 的系数是 1；x^3 的系数是-10

二. 化零降阶法

1.余子式和代数余子式

元素 a_{ij} 的余子式,是把 a_{ij} 所在的第 i 行和第 j 列划去后所得到的 n-1 阶行列式,记作 M_{ij}.

a_{ij} 的代数余子式为 $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$.

新东方在线 www.koolearn.com 网络课堂电子教材系列

2.定理(对某一行或列的展开)行列式的值等于某行(列)的各元素与其代数余子式乘积之和.

n=4, $\left|a_{ij}\right| = a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23} + a_{24}A_{24}$

例如 求 3 阶行列式 $\begin{vmatrix} -3 & 4 & 6 \\ -2 & 0 & 1 \\ 4 & 5 & 7 \end{vmatrix}$ =(-3)A_{11}+4A_{12}+6A_{13}=(-3)M_{11}-4M_{12}+6M_{13}

=(-3)×(-5)-4×(-18)+6×(-10)=27.

例 $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & t \\ t & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & t & 1 & \cdots & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & t & 1 \end{vmatrix}$

解析： 原式=1 A_{11}+t A_{1n} =$1+t\cdot(-1)^{1+n}t^{n-1}$

=1+ $(-1)^{1+n}t^{n}$

例 求行列式 $\begin{vmatrix} 3 & 0 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & -7 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & -2 & 2 \end{vmatrix}$ 的第四行各元素的余子式的和.

解析：

所求为 $M_{41}+M_{42}+M_{43}+M_{44}=-A_{41}+A_{42}-A_{43}+A_{44}$

原式= $5A_{41}+3A_{42}-2A_{43}+2A_{44}$

将原行列式换为 $\begin{vmatrix} 3 & 0 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & -7 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$ 即他的值就是原题的余子式之和

答案为-28（对第三行展开 $-7A_{32}=7M_{32}$）

3.命题 第三类初等变换不改变行列式的值. $\begin{vmatrix} -3 & 4 & 6 \\ -2 & 0 & 1 \\ 4 & 5 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 9 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 1 \\ 18 & 5 & 7 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 9 & 4 \\ 18 & 5 \end{vmatrix} = 27$

08 题： $A=\begin{vmatrix} 2a & 1 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ a^2 & 2a & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & a^2 & 2a & 1 & \cdots & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & a^2 & 2a & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & a^2 & 2a \end{vmatrix}$. 证明|A|=(n+1)a^n.

新东方在线 www.koolearn.com 网络课堂电子教材系列

$$\to\begin{vmatrix} 2a & 1 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{3a}{2} & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & a^2 & 2a & 1 & \cdots & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & a^2 & 2a & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & a^2 & 2a \end{vmatrix} \to \begin{vmatrix} 2a & 1 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{3a}{2} & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4a}{3} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & a^2 & 2a & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & a^2 & 2a \end{vmatrix}\cdots$$

证明：初等变换

$$\to\begin{vmatrix} 2a & 1 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{3a}{2} & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4a}{3} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 0 & \frac{(n+1)a}{n} \end{vmatrix} = 2a\cdot\frac{3a}{2}\cdot\frac{4a}{3}\cdots\frac{(n+1)a}{n}=(n+1)a^n$$

4. 化零降阶法 用命题把行列式的某一行或列化到只有一个元素不为 0, 再用展开定理. 于是化为计算一个低一阶的行列式.

三. 其它性质

行列式还有以下性质:

3．把行列式转置值不变, 即 $|A^T|=|A|$.

4．作第一类初等变换，行列式的值变号.

5．作第二类初等变换，行列式的值乘 c.

问题： $|cA|=?$

$c|A|$；$|c||A|$；$c^n|A|$；$|c|^n|A|$

6．行列式的行或列可分解, 即如果某个行(列)向量是两个行（列）向量的和，即 $\alpha=\beta+\gamma$，则原行列式的值等于 β 和 γ 替换 α 后得到的两个新行列式的值之和.

例如 $|\alpha,\beta_1+\beta_2,\gamma|=|\alpha,\beta_1,\gamma|+|\alpha,\beta_2,\gamma|$

问题：$|A+B|=|A|+|B|$?

例如：$A=|\ \alpha_1\quad \alpha_2\quad \alpha_3\ |, B=|\ \beta_1\quad \beta_2\quad \beta_3\ |$

$$\begin{aligned}|A+B|&=|\ \alpha_1+\beta_1\quad \alpha_2+\beta_2\quad \alpha_3+\beta_3\ |\\ &=|\ \alpha_1\quad \alpha_2+\beta_2\quad \alpha_3+\beta_3\ |+|\ \beta_1\quad \alpha_2+\beta_2\quad \alpha_3+\beta_3\ |\\ &=|\ \alpha_1\quad \alpha_2\quad \alpha_3+\beta_3\ |+|\ \alpha_1\quad \beta_2\quad \alpha_3+\beta_3\ |+|\ \beta_1\quad \alpha_2+\beta_2\quad \alpha_3+\beta_3\ |\\ &=\cdots\cdots=|A|+|B|+\cdots(\text{另外的6个})\end{aligned}$$

例 设 4 阶矩阵 $A=(\alpha,\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3), B=(\beta,\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3), |A|=2, |B|=3$, 求 $|A+B|$

解：$A+B=(\alpha+\beta,2\gamma_1,2\gamma_2,2\gamma_3)$,

$$\begin{aligned}|A+B|&=|\alpha+\beta,2\gamma_1,2\gamma_2,2\gamma_3|=8|\alpha+\beta,\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3|\\&=8|\alpha,\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3|+8|\beta,\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3|=40\end{aligned}$$

7. 如果一个行(列)向量是另一个行(列)向量的倍数,则行列式的值为 0.
8. 某一行(列)的各元素与另一行(列)的对应元素的代数余子式乘积之和等于 0.

例 已知行列式 $\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ x & -1 & -y & z+1 \\ 1 & -z & x+3 & y \\ y+2 & x+1 & 0 & z+3 \end{vmatrix}$ 的代数余子式 $A_{11}=-9, A_{12}=3, A_{13}=-1, A_{14}=3$, 求 x, y, z.

解析：思路：利用性质 8 $\rightarrow \begin{cases} -9x-3+y+3(z+1)=0 \\ \cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\cdots \\ y=\cdots \\ z=\cdots \end{cases}$

拉普拉斯公式的一个特殊情形：

如果 A 与 B 都是方阵(不必同阶), 则 $\begin{vmatrix} A & * \\ 0 & B \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & 0 \\ * & B \end{vmatrix} = |A||B|$

范德蒙行列式：形如 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & \cdots & a_n^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & a_3^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}$ 的行列式(或其转置). 它由 $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n$ 所决定, 它的值等于 $\prod_{i<j}(a_j-a_i)$

因此范德蒙行列式不等于 $0 \Leftrightarrow a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n$ 两两不同.
对于元素有规律的行列式(包括 n 阶行列式), 常常可利用性质简化计算.

四. 克莱姆法则

克莱姆法则 当线性方程组的方程个数等于未知数个数 n (即系数矩阵 A 为 n 阶矩阵)时.

$|A| \neq 0 \Rightarrow$ 方程组有唯一解.

此解为 $(D_1/|A|, D_2/|A|, \cdots D_n/|A|)^T$, D_i 是把 $|A|$ 的第 i 个列向量换成常数列向量 β 所得到的行列式.

1. $|A| \neq 0$ 是方程组有唯一解的充分必要条件.

$(A|\beta) \rightarrow (B|\gamma)$

问题：$|A| = |B|$?

$|A| \neq 0 \Leftrightarrow |B| \neq 0$

于是只用说明 $|B| \neq 0$ 是方程组有唯一解的充分必要条件.

2. 实际上求解可用初等变换法：对增广矩阵 $(A|\beta)$ 作初等行变换，使得 A 变为单位矩阵：$(A|\beta)\to(E|\eta)$；η 就是解.

用在齐次方程组上 ：如果齐次方程组的系数矩阵 A 是方阵，则它只有零解的充分必要条件是 $|A|\neq 0$.

例　设有方程组 $\begin{cases} x_1+x_2+x_3=a+b+c \\ ax_1+bx_2+cx_3=a^2+b^2+c^2 \\ bcx_1+acx_2+abx_3=3abc \end{cases}$

(1)证明此方程组有唯一解的充分必要条件为 a, b, c 两两不等.

(2)在此情况求解.

证明：（1）

$$\left|\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & a+b+c \\ a & b & c & a^2+b^2+c^2 \\ bc & ac & ab & 3abc \end{array}\right| \xrightarrow{\text{阶梯形矩阵转换}}$$

$$\left|\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & a+b+c \\ 0 & b-a & c-a & b^2+c^2-ab-ac \\ 0 & ac-bc & ab-bc & 2abc-b^2c-bc^2 \end{array}\right| \to$$

$$\left|\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & a+b+c \\ 0 & b-a & c-a & b^2+c^2-ab-ac \\ 0 & 0 & (c-a)(c-b) & c(c-a)(c-b) \end{array}\right|$$

由克莱姆法则法则可知

$$|A|\neq 0 \to (b-a)(c-a)(c-b)\neq 0$$

故 a, b, c 两两不相等

（2）

$$\left|\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & a+b+c \\ 0 & b-a & c-a & b^2+c^2-ab-ac \\ 0 & 0 & (c-a)(c-b) & c(c-a)(c-b) \end{array}\right| \to$$

$$\left|\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & a+b \\ 0 & b-a & 0 & b^2-ab \\ 0 & 0 & 1 & c \end{array}\right| \to \left|\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & c \end{array}\right|$$

解为$x=(a,b,c)^T$

五. 典型例题

例 1

① $\begin{vmatrix} 2 & a & a & a & a \\ a & 2 & a & a & a \\ a & a & 2 & a & a \\ a & a & a & 2 & a \\ a & a & a & a & 2 \end{vmatrix}$　② $\begin{vmatrix} 1+x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1+x \end{vmatrix}$　③ $\begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2+a & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3+a & 3 \\ 4 & 4 & 4 & 4+a \end{vmatrix}$

新东方在线 www.koolearn.com 网络课堂电子教材系列

④ 对角线上的元素都为 0，其它元素都为 1 的 n 阶行列式.
②分析：

解：$\begin{vmatrix} 1+x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1+x \end{vmatrix} \to \begin{vmatrix} 4+x & 1 & 1 & 1 \\ 4+x & 1+x & 1 & 1 \\ 4+x & 1 & 1+x & 1 \\ 4+x & 1 & 1 & 1+x \end{vmatrix} \to \begin{vmatrix} 4+x & 1 & 1 & 1 \\ 0 & x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x \end{vmatrix}$

所以值 $= x^3(x+4)$

①分析：与②同理
④分析：类型一致
③分析：把下面三行分别加到第一行

例 2 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \\ 3 & 4 & 5 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 1 & 2 & 3 \\ 5 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$

解：$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \\ 3 & 4 & 5 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 1 & 2 & 3 \\ 5 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} \to \begin{vmatrix} 15 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 15 & 3 & 4 & 5 & 1 \\ 15 & 4 & 5 & 1 & 2 \\ 15 & 5 & 1 & 2 & 3 \\ 15 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} \to \begin{vmatrix} 15 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & 1 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

$\to 15\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & -4 \\ 1 & 1 & -4 & 1 \\ 1 & -4 & 1 & 1 \\ -4 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \to 15\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 & -4 \\ -1 & 1 & -4 & 1 \\ -1 & -4 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \to 15\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & -5 \\ -1 & 0 & -5 & 0 \\ -1 & -5 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$

所以值=15×125=1875

例 3 $\begin{vmatrix} 1+x_1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+x_2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+x_3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1+x_4 \end{vmatrix}$

解：

$\begin{vmatrix} 1+x_1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+x_2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+x_3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1+x_4 \end{vmatrix} =$

$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+x_2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+x_3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1+x_4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1+x_2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1+x_3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1+x_4 \end{vmatrix} = \cdots =$

新东方在线 www.koolearn.com 网络课堂电子教材系列

$$\begin{vmatrix} x_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x_4 \end{vmatrix}+\cdots+\cdots+\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & x_2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & x_3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & x_4 \end{vmatrix}+\cdots+\begin{vmatrix} x_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x_3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & x_4 \end{vmatrix}$$

$$=x_1x_2x_3x_4+x_2x_3x_4+x_1x_3x_4+x_1x_2x_4+x_1x_2x_3$$

例 4 证明 $\begin{vmatrix} a+b & b & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a & a+b & b & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a+b & b \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a & a+b \end{vmatrix}=\sum_{i=0}^{n}a^{n-i}b^{i}=\dfrac{a^{n+1}-b^{n+1}}{a-b}$（当$a\neq b$时）

分析：

证明：归纳法：展开递推$\rightarrow$递推公式$D_{\mathrm{n}}=(a+b)D_{n-1}-abD_{n-2}$

再用归纳法证明之

也可以：

$$\begin{vmatrix} a & b & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a & a+b & b & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a+b & b \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a & a+b \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} b & b & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a+b & b & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a+b & b \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a & a+b \end{vmatrix}$$

$$=bD_{n-1}+\begin{vmatrix} a & b & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a & b & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a+b & b \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a & a+b \end{vmatrix}=\cdots=$$

$$bD_{n-1}+\begin{vmatrix} a & b & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a & b & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a & b \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a \end{vmatrix}=bD_{n-1}+a^{n}$$

$D_{\mathrm{n}}=\mathrm{b}D_{n-1}+\mathrm{a}^{n}\langle 1\rangle$

另$D_{\mathrm{n}}=\mathrm{a}D_{n-1}+\mathrm{b}^{n}\langle 2\rangle$

$\langle 1\rangle\times a-\langle 2\rangle\times b\rightarrow(a-b)D_n=a^{n+1}-b^{n+1}\rightarrow D_n=\dfrac{a^{n+1}-b^{n+1}}{a-b}$（当$a\neq b$时）

另当$a=b$时

$\begin{vmatrix} 2a & a & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a & 2a & a & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2a & a \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a & 2a \end{vmatrix}$其值为$(n+1)a^{n}$

新东方在线 www.koolearn.com 网络课堂电子教材系列

推广：（ab = cd）

$$\begin{vmatrix} a+b & d & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ c & a+b & d & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a+b & d \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & c & a+b \end{vmatrix}$$ 其值为 $\dfrac{a^{n+1}-b^{n+1}}{a-b}$

第三讲 矩阵

一． 两种基本矩阵方程

在等式 $AB=C$ 中, 如果已知 C 及 A, B 中的一个, 求另一个. 就提出下面两种基本形式的矩阵方程:

(I) $AX=B$. (II) $XA=B$. 其中 A, B 已知，求 X

这里要求 A 是行列式不为 0 的 n 阶矩阵, 这样可使得这两个方程的解都是存在并且唯一的.

先讨论(I) $AX=B$.

设 B 是 $n\times s$ 矩阵，则 X 也是 $n\times s$ 矩阵.

如果 $s=1$, 即 B 只有一列, 则(I)就是一个线性方程组. 由克莱姆法则知它有唯一解. 此解可以用初等变换法求出: $(A|B)\to(E|X)$.

如果 $s>1$，设 $B=(\beta_1,\beta_2,\cdots\beta_s)$， $X=(X_1,X_2,\cdots X_s)$

则 $A(X_1,X_2,\cdots X_s)=(\beta_1,\beta_2,\cdots\beta_s)$. 即

$(AX_1,AX_2,\cdots AX_s)=(\beta_1,\beta_2,\cdots\beta_s)\Leftrightarrow\{AX_i=\beta_i, i=1,2,\cdots,s\}$

这是 s 个线性方程组. 由克莱姆法则, 它们都有唯一解, 从而 $AX=B$ 有唯一解.

这些方程组系数矩阵都是 A, 可同时求解:

$(A|\beta_1,\beta_2,\cdots\beta_s)\to(E|X_1,X_2,\cdots X_s)$

即得(I)的解法:

将 A 和 B 并列作矩阵 $(A|B)$, 对它作初等行变换, 使得 A 变为单位矩阵, 此时 B 变为解 X .

$(A|B)\to(E|X)$

例： $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$，求 $AX=B$ 的解.

$$(A|B)=\left(\begin{array}{ccc|cc} 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 5 & -3 \end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 1 & -5 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & -3 & 3 \end{array}\right)$$

新东方在线 www.koolearn.com 网络课堂电子教材系列

$$\to\left(\begin{array}{ccc|cc}1&0&1&-5&3\\0&1&0&1&-1\\0&0&2&-4&4\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|cc}1&0&0&-3&1\\0&1&0&1&-1\\0&0&1&-2&2\end{array}\right)$$

$$X=\begin{pmatrix}-3&1\\1&-1\\-2&2\end{pmatrix}$$

(II)的解法:对两边转置化为(I)的形式: $A^TX^T=B^T$. 再用解(I)的方法求出 X^T, 转置得 X.

$$\left(A^T\middle|B^T\right)\to\left(E\middle|X^T\right)$$

2007 年的一个题中, 求 3 阶矩阵 B, 满足

$$B\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\2\\-2\end{pmatrix},\ B\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\ B\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}.$$

解:建立矩阵方程

$$B\begin{pmatrix}1&1&0\\-1&1&1\\1&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2&1&0\\2&1&1\\-2&0&1\end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&-1&1&-2&2&-2\\1&1&0&1&1&0\\0&1&1&0&1&1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&0&1&1&0\\0&1&1&0&1&1\\0&-2&1&-3&1&-2\end{array}\right)$$

$$\to\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&0&1&1&0\\0&1&1&0&1&1\\0&0&3&-3&3&0\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&0&1&-1\\0&1&0&1&0&1\\0&0&1&-1&1&0\end{array}\right)$$

$$B^T=\begin{pmatrix}0&1&-1\\1&0&1\\-1&1&0\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}0&1&-1\\1&0&1\\-1&1&0\end{pmatrix}$$

二. 可逆矩阵

(1) 定义

$a\neq 0, ab=ac\Rightarrow b=c$ 用 a^{-1} 乘等式两边.

如果有 H, 使得 $HA=E, AB=AC\Rightarrow B=C$

如果有 H, 使得 AH=E, BA=CA ⇒ B=C

定义 设 A 是 n 阶矩阵, 如果存在 n 阶矩阵 H, 使得 $AH=E, HA=E$, 则称 A 为可逆矩阵. 此时 H 是唯一的, 称为 A 的逆矩阵, 通常记作 A^{-1}.

新东方在线 www.koolearn.com 网络课堂电子教材系列

如果 A 可逆, 则 A 在乘法中有消去律:

$AB=0\Rightarrow B=0; AB=AC\Rightarrow B=C$ （左消去律）; .

$BA=0\Rightarrow B=0; BA=CA\Rightarrow B=C$ （右消去律）

如果 A 可逆, 则 A 在乘法中可移动(化为逆矩阵移到等号另一边):

$AB=C\Leftrightarrow B=A^{-1}C; BA=C\Leftrightarrow B=CA^{-1}$

由此得到基本矩阵方程的逆矩阵解法:

(I) $AX=B$ 的解 $X=A^{-1}B$.　　　(II) $XA=B$ 的解 $X=BA^{-1}$.

这种解法想法自然，好记忆, 但是计算量比初等变换法大(多了一次矩阵乘积运算).

(2) 矩阵可逆性的判别, 逆矩阵的计算

定理　n 阶矩阵 A 可逆 $\Leftrightarrow |A|\neq 0$.

证明　“$\Rightarrow$”对 $AA^{-1}=E$ 两边取行列式, 得 $|A||A^{-1}|=1$, 从而 $|A|\neq 0$. （并且 $|A^{-1}|=|A|^{-1}$）

“$\Leftarrow$”定义中的 H 是矩阵方程 $AX=E$ 和 $XA=E$ 的公共解.

因为 $|A|\neq 0$, 矩阵方程 $AX=E$ 和 $XA=E$ 都有唯一解. 设

B,C 分别是它们的解, 即 $AB=E, CA=E$. 于是:

$B=EB=CAB=CE=C$, 从定义得到 A 可逆.

A^{-1} 是唯一的, 因为它是 $AX=E$ 解.

计算 A^{-1} 的初等变换法：解矩阵方程 $AX=E$,

$(A|E)\to(E|A^{-1})$.

应用：对角矩阵可逆 $\Leftrightarrow$ 对角线上元素都不为 0. 其逆矩阵也是对角矩阵, 只用把每个对角线元素变为倒数.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} c_1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & c_3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{c_1} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{c_2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{c_3} \end{array}\right)$$

初等矩阵都是可逆矩阵, 并且

$E(i,j)^{-1}=E(i,j), E(i(c))^{-1}=E(i(c^{-1})), E(i,j(c))^{-1}=E(i,j(-c))$

$$\left(E_{(1,3)}|E\right)=\left(\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

新东方在线 www.koolearn.com 网络课堂电子教材系列

$$\left(E_{(1,4(2))}\middle|E\right)=\left(\begin{array}{cccc|cccc}1&0&0&2&1&0&0&0\\0&1&0&0&0&1&0&0\\0&0&1&0&0&0&1&0\\0&0&0&1&0&0&0&1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cccc|cccc}1&0&0&0&1&0&0&-2\\0&1&0&0&0&1&0&0\\0&0&1&0&0&0&1&0\\0&0&0&1&0&0&0&1\end{array}\right)$$

推论　如果 A 和 B 都是 n 阶矩阵, 则 $AB=E \Leftrightarrow BA=E$.

即只要 $AB=E$（或 $BA=E$）中的一个式子成立, 则 A 和 B 都可逆并且互为逆矩阵.

2008 年的考题: $A^3=0$, 时 $E-A$ 可逆.

$(E-A)(E+A+A^2)=E-A^3=E$.

例　4 个 n 阶矩阵 A,B,C 和 D 满足 $ABCD=E$, 求 A^{-1} 和 B^{-1} .

$ABCD=E \Rightarrow A^{-1}=BCD$, 于是 $BCDA=E \Rightarrow B^{-1}=CDA$

例　设 A,B,C 都是 n 阶矩阵, 满足 $B=E+AB, C=A+CA$, 则 $B-C$ 为

(A) E .　(B) $-E$.　(C) A .　(D) $-A$.　　(A)（2005 年数学四）

$B=E+AB$ 化为 $(E-A)B=E$ 即 B 与 $(E-A)$ 互为逆矩阵，

$C=A+CA$ **化为** $C(E-A)=A$，　用 B 右乘得 $C=AB$

如果 A 和 B 是两个 n 阶可逆阶矩, 则分块矩阵

$\begin{pmatrix}A&O\\O&B\end{pmatrix}$ 和 $\begin{pmatrix}O&A\\B&O\end{pmatrix}$ 都可逆，并且

$$\begin{pmatrix}A&O\\O&B\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}A^{-1}&O\\O&B^{-1}\end{pmatrix}\qquad\begin{pmatrix}O&A\\B&O\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}O&B^{-1}\\A^{-1}&O\end{pmatrix}$$

(3) 可逆矩阵的性质:

① 如果 A 可逆, 则 A^T , $cA(c\neq 0)$ 和 A^k 都可逆, 并且

$$(A^T)^{-1}=(A^{-1})^T, (cA)^{-1}=c^{-1}A^{1}, (A^k)^{-1}=(A^{-1})^k$$

已经规定的矩阵的右肩膀有 3 种:T, k, -1, 它们两两可交换先后次序.

② 对于两个 n 阶矩 A 和 B ,

A 和 B 都可逆 $\Leftrightarrow AB$ 可逆, 并且 $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$.　$|AB|=|A||B|$.

三. 伴随矩阵

若 A 是 n 阶矩阵, 记 A_{ij} 是 $|A|$ 的 (i,j) 位元素 a_{ij} 的代数余子式, 规定 A 的伴随矩阵为

$$A^*=\begin{pmatrix}A_{11}&A_{21}&\cdots&A_{n1}\\A_{12}&A_{22}&\cdots&A_{n2}\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\A_{1n}&A_{2n}&\cdots&A_{nn}\end{pmatrix}=(A_{ij})^T$$

新东方在线 www.koolearn.com 网络课堂电子教材系列

例如对 2 阶矩阵

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}, \quad \left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^*\right)^* = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

基本公式：$AA^* = A^*A = |A|E$.

$$AA^* = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |A| & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & |A| & \cdots & 0 \\ & & & \\ 0 & \cdots & 0 & |A| \end{pmatrix}$$

于是对于可逆矩阵 A , 有

$A^{-1} = A^*/|A|$ ，$(A^*)^{-1} = A/|A|$.

因此可通过求 A^* 来计算 A^{-1} . 这就是求逆矩阵的伴随矩阵法.
和初等变换法比较， 伴随矩阵法的计算量要大得多, 除非 n=2, 一般不用它来求逆矩阵.

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}\Big/(ad-bc)$$

$A^{-1} = A^*/|A|$ 即 $A^* = |A|A^{-1}$

意义:用逆矩阵来求伴随矩阵.

A 可逆时还有 $(A^*)^{-1} = A/|A|$

$$(A^{-1})^* = |A^{-1}|(A^{-1})^{-1} = A/|A| = (A^*)^{-1}$$

伴随矩阵的其它性质:

① 如果 A 是可逆矩阵，则 A^* 也可逆，并且 $(A^*)^{-1} = A/|A| = (A^{-1})$.

② $|A^*| = |A|^{n-1}$

③ $(A^T)^* = (A^*)^T$

④ $(cA)^* = c^{n-1}A^*$

⑤ $(AB)^* = B^*A^*$，$(A^k)^* = (A^*)^k$

⑥ $(A^*)^* = |A|^{n-2}A$

② $|A^*| = |A|^{n-1}$ 的证明:对 $AA^* = |A|E$ 两边求行列式, 得

$$|A||A^*| = |A|^n \Rightarrow |A^*| = |A|^{n-1}$$

新东方在线 www.koolearn.com 网络课堂电子教材系列

⑥ $\left(A^*\right)^* = |A|^{n-2} A$ 的证明:

$$\left(A^*\right)^* = \left|A^*\right|\left(A^*\right)^{-1} = |A|^{n-1} A/|A| = |A|^{n-2} A$$

例 21 设 A 是 n 阶可逆矩阵，交换 A 的 i, j 行得到 B .

(1) 证明 B 可逆 $|B| = -|A| \neq 0$.

(2) 求 AB^{-1} .

$B = E(i, j)A$

$B^{-1} = A^{-1}\left[E(i, j)\right]^{-1} = A^{-1}E(i, j)$, $AB^{-1} = E(i, j)$

例 22 设 A 是 3 阶矩阵,将 A 的第 2 行加到第 1 行上得 B ,将 B 的第 1 列的-1 倍加到第 2 列上得 C . 记

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$(A) C = P^{-1}AP$ $(B) C = PAP^{-1}$ $(C) C = P^T AP$ $(D) C = PAP^T$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} A$$

$$C = B\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = PAP^{-1}$$

例 20 设 A 是 3 阶可逆矩阵,交换 A 的 1,2 行得 B , 则

(A) 交换 A^* 的 1,2 行得到 B^*. (B) 交换 A^* 的 1,2 列得到 B^*.

(C) 交换 A^* 的 1,2 行得到 $-B^*$. (D) 交换 A^* 的 1,2 列得到 $-B^*$.

(2005 年)

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} A$$

$$B^* = |B|B^{-1} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} |A| A^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = -A^* \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

新东方在线 www.koolearn.com 网络课堂电子教材系列

例 18 设 A 和 B 都是 n 阶矩阵， $C=\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$，则 $C^*=$（　　）

$(A)\begin{pmatrix} |A|A^* & 0 \\ 0 & |B|B^* \end{pmatrix}$　　$(B)\begin{pmatrix} |B|B^* & 0 \\ 0 & |A|A^* \end{pmatrix}$

$(C)\begin{pmatrix} |A|B^* & 0 \\ 0 & |B|A^* \end{pmatrix}$　　$(D)\begin{pmatrix} |B|A^* & 0 \\ 0 & |A|B^* \end{pmatrix}$

不妨设 A 和 B 都可逆 $C^{-1}=\begin{pmatrix} A^{-1} & 0 \\ 0 & B^{-1} \end{pmatrix}$

$$C^*=|C|C^{-1}=|A||B|\begin{pmatrix} A^{-1} & O \\ O & B^{-1} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} |B||A|A^{-1} & O \\ O & |A||B|B^{-1} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} |B|A^* & O \\ O & |A|B^* \end{pmatrix}$$

2009 题

设 A 和 B 都是 2 阶矩阵， $|A|=2$，$|B|=3$．则 $\begin{pmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{pmatrix}^*=$（　　）

$(A)\begin{pmatrix} O & 3B^* \\ 2A* & O \end{pmatrix}$　　$(B)\begin{pmatrix} O & 2B^* \\ 3A^* & O \end{pmatrix}$

$(C)\begin{pmatrix} O & 3A^* \\ 2B^* & O \end{pmatrix}$　　$(D)\begin{pmatrix} O & 2A^* \\ 3B^* & O \end{pmatrix}$

（2009 年的考题）

解： $C^*=|C|C^{-1}$

先求 C^{-1}

$$(C|E)=\left(\begin{array}{cc|cccc} & & 1 & 0 & 0 & 0 \\ O & A & 0 & 1 & 0 & 0 \\ B & O & 0 & 0 & 1 & 0 \\ & & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cc|cccc} & & 0 & 0 & 1 & 0 \\ B & O & 0 & 0 & 0 & 1 \\ O & A & 1 & 0 & 0 & 0 \\ & & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\to\left(\begin{array}{cc|cc} E & O & O & B^{-1} \\ O & E & A^{-1} & O \end{array}\right)$$

$$C^*=\begin{vmatrix} O & A \\ B & O \end{vmatrix}\begin{pmatrix} O & B^{-1} \\ A^{-1} & O \end{pmatrix}$$

$$=|A||B|\begin{pmatrix} O & B^{-1} \\ A^{-1} & O \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} O & |A||B|B^{-1} \\ |B||A|A^{-1} & O \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} O & |A|B^* \\ |B|A^* & O \end{pmatrix}$$

例 16 设 A 是 n 阶非零实矩阵，满足 $A^*=A^T$．证明：

新东方在线 www.koolearn.com 网络课堂电子教材系列

$(1)|A|>0$

（2）如果 n>2 则$|A|=1$

解：条件 $A^*=A^T$，即$\left(A_{ij}\right)^T=\left(a_{ij}\right)^T$

即 $A_{ij}=a_{ij},\forall i,j$

（1） $|A|=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in}=a_{i1}^2+a_{i2}^2+\cdots+a_{in}^2\ge 0$

又因为 $A\neq 0$，即 A 有非零元素，则$|A|=a_{i1}^2+a_{i2}^2+\cdots+a_{in}^2>0$

(2) $AA^T=AA^*=|A|E$，$|A|^2=|A|^n$ 得$|A|^{n-2}=1$ 因为$|A|>0$，$n-2$ 是正整数，得$|A|=1$

例 17 设矩阵 $A=\left(a_{ij}\right)_{3\times 3}$ 满足 $A^*=A^T$，a_{11},a_{12},a_{13} 为 3 个相等的正数，则它们为

$(A)\sqrt{3}/3$ $(B)3$ $(C)1/3$ $(D)\sqrt{3}$（2005 年数学三）

设 $a_{11}=a_{12}=a_{13}=a$

则 $A^*=A^T\Rightarrow|A|=3a^2>0$

又 $n=3>2$ 得$|A|=1$

$$\therefore 3a^2=1,a^2=\frac{1}{3},a=\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

例 8 3 维向量 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1,\beta_2,$ 满足 $\alpha_1+\alpha_3+2\beta_1-\beta_2=0$，$3\alpha_1-\alpha_2+\beta_1-\beta_3=0$，$-\alpha_2+\alpha_3-\beta_2+\beta_3=0$，已知$|\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3|=a$，求$|\beta_1,\beta_2,\beta_3|$.

解：$\alpha_1+\alpha_3=-2\beta_1+\beta_2$

$$3\alpha_1-\alpha_2=-\beta_1+\beta_3$$

$$-\alpha_2+\alpha_3=\beta_2-\beta_3$$

$$(\alpha_1+\alpha_3,3\alpha_1-\alpha_2,-\alpha_2+\alpha_3)=(-2\beta_1+\beta_2,-\beta_1+\beta_3,\beta_2-\beta_3)$$

$$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}1&3&0\\0&-1&-1\\1&0&1\end{pmatrix}=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)\begin{pmatrix}-2&-1&0\\1&0&1\\0&1&-1\end{pmatrix}$$

新东方在线 www.koolearn.com 网络课堂电子教材系列

$$|\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3|\begin{vmatrix}1&3&0\\0&-1&-1\\1&0&1\end{vmatrix}=|\beta_1,\beta_2,\beta_3|\begin{vmatrix}-2&-1&0\\1&0&1\\0&1&-1\end{vmatrix}$$

$$-4a=|\beta_1,\beta_2,\beta_3|$$

例 9　设 A 是 3 阶矩阵, α 是 3 维列向量, 使得 $P=(\alpha,A\alpha,A^2\alpha)$ 可逆, 并且 $A^3\alpha=3A\alpha-2A^2\alpha$. 又 3 阶矩阵 B 满足 $A=PBP^{-1}$.

(1) 求 B. (2) 求 $|A+E|$. (01 一)

解：$A=PBP^{-1}$ 即 $AP=PB$

$$A(\alpha,A\alpha,A^2\alpha)=(A\alpha,A^2\alpha,3A\alpha-2A^2\alpha)$$

$$=(\alpha,A\alpha,A^2\alpha)\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&3\\0&1&-2\end{pmatrix}$$

$$B=\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&3\\0&1&-2\end{pmatrix}$$

则 $|A+E|=|P||B+E||P^{-1}|$

$$=|B+E|=\begin{vmatrix}1&0&0\\1&1&3\\0&1&-1\end{vmatrix}=-4$$

例 10 3 阶矩阵 A,B 满足 $ABA^*=2BA^*+E$, 其中 $A=\begin{pmatrix}2&1&0\\1&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$, 求 $|B|$. (04 一)

解：$ABA^*=2BA^*+E$, $(A-2E)BA^*=E$

$$|A|(A-2E)B=A$$

$$|A|^3|A-2E||B|=|A|,\quad |B|=\frac{1}{|A-2E||A|^2}=\frac{1}{1\times3^2}=\frac{1}{9}$$

例 11 设 3 阶矩阵 $A=\begin{pmatrix}3 & -5 & 1\\ 1 & -1 & 0\\ -1 & 0 & 2\end{pmatrix}$, $A^{-1}XA = XA+2A$, 求 X.

解： $(A^{-1}XA)A^{-1} = XAA^{-1} + 2AA^{-1}$

$A^{-1}X = X + 2E$， $X = AX + 2A$

$(E-A)X = 2A$

$$(E-A\,|\,2A)=\left(\begin{array}{ccc|ccc}-2 & 5 & -1 & 6 & -10 & 2\\ -1 & 2 & 0 & 2 & -2 & 0\\ 1 & 0 & -1 & -2 & 0 & 4\end{array}\right)$$

$$\to\left(\begin{array}{ccc|ccc}-1 & 2 & 0 & 2 & -2 & 0\\ 0 & 1 & -1 & 2 & -6 & 2\\ 0 & 2 & -1 & 0 & -2 & 4\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|ccc}-1 & 2 & 0 & 2 & -2 & 0\\ 0 & 1 & 0 & -2 & 4 & 2\\ 0 & 0 & 1 & -4 & 10 & 0\end{array}\right)$$

$$\to\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & -6 & 10 & 4\\ 0 & 1 & 0 & -2 & 4 & 2\\ 0 & 0 & 1 & -4 & 10 & 0\end{array}\right)$$

得

$$X=\begin{pmatrix}-6 & 10 & 4\\ -2 & 4 & 2\\ -4 & 10 & 0\end{pmatrix}$$

例 12 设 3 阶矩阵 $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ -1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}$, $A^{*}X = A^{-1} + 2X$, 求 X.

解： $A^{*}X = A^{-1} + 2X$

$|A|X = E + 2AX$

$(4E-2A)X = E$

$X = (4E-2A)^{-1}$

新东方在线 www.koolearn.com 网络课堂电子教材系列

$$|A|=\begin{vmatrix}1&1&-1\\-1&1&1\\1&-1&1\end{vmatrix}=4$$

例 13 4 阶矩阵 A,B 满足 $ABA^{-1}=BA^{-1}+3E$, 已知 $A^*=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\1&0&1&0\\0&-3&0&8\end{pmatrix}$，求 B.（00 一）

解： $ABA^{-1}=BA^{-1}+3E$

$AB=B+3A$

$|A|B=A^*B+3|A|E$

$|A|^3=|A^*|=8$

得 $|A|=2$

$(2E-A^*)B=6E$

$B=6(2E-A^*)^{-1}$

例 14 已知 $A=\begin{pmatrix}3&0&0\\2&1&0\\2&1&3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$， $XA+2B=AB+2X$，求 X^{11}.

解：$XA+2B=AB+2X$

$X(A-2E)=(A-2E)B$

$X=(A-2E)B(A-2E)^{-1}$

$X^{11}=(A-2E)B(A-2E)^{-1}(A-2E)B(A-2E)^{-1}\cdots(A-2E)B(A-2E)^{-1}$

$=(A-2E)B^{11}(A-2E)^{-1}$

$=(A-2E)B(A-2E)^{-1}=X$

用解矩阵方程 $X(A-2E)=(A-2E)B$ 求 X

$\left((A-2E)^T\middle|[(A-2E)B]^T\right)=\left(A^T-2E\middle|B(A^T-2E)\right)$

新东方在线 www.koolearn.com 网络课堂电子教材系列

$$=\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 2 & 2 & 1 & 2 & 2\\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 6\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1\end{array}\right)$$

$$X=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 2 & 0 & 0\\ 6 & -1 & -1\end{pmatrix}$$

例 26　设 3 阶矩阵 A,B 满足 $AB=A+B$.

(1) 证明 $A-E$ 可逆.

(2) 设 $B=\begin{pmatrix}1 & -3 & 0\\ 2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$, 求 A. (91)

解：$AB=A+B$

$(A-E)B=A$

令 $C=A-E$

即 $A=C+E$

$(C+E)B=C+E+B$

$CB=C+E$ $C(B-E)=E\Rightarrow C$ 可逆

例 27　设 A,B 是 3 阶矩阵, A 可逆, 它们满足 $2A^{-1}B=B-4E$.

(1) 证明 $A-2E$ 可逆.

(2) 设 $B=\begin{pmatrix}1 & -2 & 0\\ 1 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$, 求 A. (2002)

A 可逆解：$2A^{-1}B=B-4E$ 即 $2B=AB-4A$

$AB=4A+2B$

$(A-2E)B=4A$

由 A 可逆得 $A-2E$ 可逆

例 28　设 n 阶矩阵 A,B 满足 $AB=aA+bB$. 其中 $ab\neq 0$, 证明

新东方在线 www.koolearn.com 网络课堂电子教材系列

(1) $A-bE$ 和 $B-aE$ 都可逆.

(2) A 可逆 $\Leftrightarrow$ B 可逆.

(3) $AB=BA$

解：(1) 令 $C=A-bE, D=B-aE$

$$A=C+bE, B=D+aE$$

$$(C+bE)(D+aE)=aC+abE+bD+abE$$

$$CD+aC+bD+abE=aC+bD+2abE$$

$CD=abE \Rightarrow C, D$ 都可逆

或者直接把 $A-bE$ 和 $B-aE$ 相乘

$$AB-aA-bB+abE$$

(2) $(A-bE)B=aA$

(3) $(A-bE)(B-aE)=abE$

$$\frac{(A-bE)}{ab}(B-aE)=E$$

$$(B-aE)\frac{(A-bE)}{ab}=E$$

$$(B-aE)(A-bE)=abE$$

$$BA-aA-bB=O$$

$$BA=aA+bB=AB$$

例 29　设 A, B 都是 n 阶对称矩阵, $E+AB$ 可逆, 证明 $(E+AB)^{-1}A$ 也是对称矩阵.

证：验证

$$[(E+AB)^{-1}A]^T=(E+AB)^{-1}A$$

$$[(E+AB)^{-1}A]^T=A^T[(E+AB)^{-1}]^T$$

$$=A[(E+AB)^T]^{-1}=A(E+B^TA^T)^{-1}=A(E+BA)^{-1}$$

新东方在线 www.koolearn.com 网络课堂电子教材系列

即要证明 $A(E+BA)^{-1}=(E+AB)^{-1}A \Leftrightarrow A=(E+AB)^{-1}A(E+BA)$

$\Leftrightarrow (E+AB)A=A(E+BA)$

例 30 设 A,B 都是 n 阶矩阵使得 $A+B$ 可逆, 证明

(1) 如果 $AB=BA$, 则 $B(A+B)^{-1}A=A(A+B)^{-1}B$.

(2) 如果 A,B 都可逆, 则 $B(A+B)^{-1}A=A(A+B)^{-1}B$.

(3) 等式 $B(A+B)^{-1}A=A(A+B)^{-1}B$ 总成立.

(1)思路：两侧是 $A,B,(A+B)^{-1}$ 的不同顺序的，且有证明

$AB=BA \Rightarrow A(A+B)=A^2+AB=A^2+BA$

$=(A+B)A \Rightarrow (A+B)^{-1}A=A(A+B)^{-1}$

$(A+B)^{-1}B=B(A+B)^{-1}$

(2) 两边求逆

左边求逆 $=A^{-1}(A+B)B^{-1}=A^{-1}AB^{-1}+A^{-1}BB^{-1}=B^{-1}+A^{-1}$

右边求逆 $=B^{-1}(A+B)A^{-1}=B^{-1}AA^{-1}+B^{-1}BA^{-1}=B^{-1}+A^{-1}$

例 32 设 A,B 都是 n 阶矩阵, 并且 A 是可逆矩阵. 证明:矩阵方程 $AX=B$ 和 $XA=B$ 的解相同 $\Leftrightarrow AB=BA$.

$AX=B$ 的解为 $A^{-1}B$

$XA=B$ 的解为 BA^{-1}

同解即 $A^{-1}B=BA^{-1} \Leftrightarrow AB=BA$

第四讲 向量组的线性关系与秩

全课程的理论基础

线性表示 $\rightarrow$ 线性相关性 $\rightarrow$ 极大无关组和秩 $\rightarrow$ 矩阵的秩

一. 线性表示

新东方在线 www.koolearn.com 网络课堂电子教材系列

设$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$是一个 n 维向量组.

1. n 维向量β可用$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性表示，即$\beta$是$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$的一个线性组合，也就是说存在数组 $c_1, c_2, \cdots, c_s$ 使得

$$c_1\alpha_1+c_2\alpha_2+\cdots+c_s\alpha_s=\beta \quad .$$

例如$\beta=\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$，$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$，$\alpha_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$，$\alpha_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$. 则$\beta=a\alpha_1+b\alpha_2+c\alpha_3$

又如$\beta=\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$，$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$，$\alpha_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$，$\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$. 看 c, c≠0, 则不能表示,

c=0, 则$\beta=a\alpha_1+b\alpha_2$或$\beta=(a-b)\alpha_1+b\alpha_3$

问题是:判断β可否用$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性表示？表示方式是否唯一？”这也就是问：向量方程

$$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_s\alpha_s=\beta$$

是否有解？解是否唯一？设$A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)$, 则此向量方程就是$AX=\beta$.

反过来, 判别“以$(A|\beta)$为增广矩阵的线性方程组是否有解？解是否唯一？”的问题又可转化为“β是否可以用 A 的列向量组线性表示？表示方式是否唯一？”的问题.

记号：可以表示$\rightarrow$　　不可以表示$\not\rightarrow$

唯一表示$\xrightarrow{1}$　　无穷多表示$\xrightarrow{\infty}$

例　下列各选项中哪个成立, 哪个不成立?

(A) 如果$\beta\rightarrow\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$则对任意数 c, $c\beta\rightarrow\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$

(B) 如果存在 c, 使得 $c\beta\rightarrow\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$则$\beta\rightarrow\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$

(C) 如果$\beta\rightarrow\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$　$\gamma\rightarrow\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$则$\beta+\gamma\rightarrow\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$

(D) 如果$\beta\not\rightarrow\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$　$\gamma\not\rightarrow\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$则$\beta+\gamma\not\rightarrow\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$

如果$\beta\rightarrow\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$　$\gamma\not\rightarrow\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$问题：

$\beta+\gamma\xrightarrow{?}\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$

新东方在线 www.koolearn.com 网络课堂电子教材系列

答：$\beta+\gamma \not\to \alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$

例 14 已知β可用$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性表示，但不可用$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{s-1}$线性表示．证明

⑴ α_s不可用$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{s-1}$线性表示；

⑵α_s可用$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{s-1},\beta$ 线性表示．

（看题解）

解：（1）用反证法

如果$\alpha_s=\kappa_1\alpha_1+\cdots+\kappa_{s-1}\alpha_{s-1}$,则

$$\beta=c_1\alpha_1+\cdots+c_{s-1}\alpha_{s-1}+c_s\kappa_1\alpha_1+\cdots c_s\kappa_{s-1}\alpha_{s-1}$$

（2）设$\beta=c_1\alpha_1+c_2\alpha_2+\cdots+c_{s-1}\alpha_{s-1}+c_s\alpha_s \quad c_s\neq 0$

$$\beta-c_1\alpha_1-c_2\alpha_2-\cdots-c_{s-1}\alpha_{s-1}=c_s\alpha_s$$

$$\frac{1}{c_s}(\beta-c_1\alpha_1-c_2\alpha_2-\cdots-c_{s-1}\alpha_{s-1})=\alpha_s$$

2. 如果 n 维向量组$\beta_1,\beta_2,\cdots\beta_t$中的每一个都可以可以用$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性表示，就说向量组$\beta_1,\beta_2,\cdots\beta_t$可以用$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性表示.

向量组之间的线性表示问题与矩阵乘法有密切关系：乘积矩阵 AB 的每个列向量都可以表示为 A 的列向量组的线性组合，从而 AB 的列向量组可以用 A 的列向量组线性表示.

反过来，如果向量组$\beta_1,\beta_2,\cdots\beta_t$可以用$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性表示，则矩阵（$\beta_1,\beta_2,\cdots\beta_t$）可分解为矩阵（$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$）和一个矩阵 C 的乘积.

例如$\beta_1=\alpha_1+2\alpha_2,\beta_2=2\alpha_2+3\alpha_3,\beta_3=3\alpha_3+\alpha_1$，则

$$(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}1&0&1\\2&2&0\\0&3&3\end{pmatrix}$$

一般地 C 可以这样构造：它的第 i 个列向量就是β_i对$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$的分解系数. 称 C 为$\beta_1,\beta_2,\cdots\beta_t$对$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$的一个表示矩阵. （C 不是唯一的）

3. 当向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$和$\beta_1,\beta_2,\cdots\beta_t$互相都可以表示时，就说它们等价，并记作

新东方在线 www.koolearn.com 网络课堂电子教材系列

$\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s\}\cong\{\beta_1,\beta_2,\cdots\beta_t\}$

例如,如果矩阵 A 用一次初等行变换化为 B,则 A 的行向量组和 B 的行向量组等价

如果矩阵 A 用一次初等列变换化为 B,则 A 的列向量组和 B 的列向量组等价

$$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\to\alpha_2,\alpha_1,\alpha_3$$

$$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\to\alpha_1,4\alpha_2,\alpha_3$$

$$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\to\alpha_1,\alpha_2,6\alpha_1+\alpha_3$$

向量组的线性表示关系有传递性,即如果向量组 $\beta_1,\beta_2,\cdots\beta_t$ 可以用 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性表示,而 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 可以用 $\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_r$ 线性表示,则 $\beta_1,\beta_2,\cdots\beta_t$ 可以用 $\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_r$ 线性表示.

等价关系也有传递性.

二. 向量组的线性相关性

讨论向量组的内在关系的性质.

1. 意义和定义--从三个方面看线性相关性

（1） 意义:线性相关性是描述向量组内在关系的概念.

如果向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 中有向量可以用其它的 s-1 个向量线性表示,就说 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性相关.

如果向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 中每个向量都不可以用其它的 s-1 个向量线性表示,就说 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性无关.

$$a_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\quad a_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\quad a_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$a_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\quad a_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\quad a_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix},\quad a_4=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$$

两个向量线性相关就是它们的对应分量成比例.如 $\alpha=(a_1,a_2,a_3)$ 和 $\beta=(b_1,b_2,b_3)$ 相关,不妨设 $\beta=c\alpha$,即 $b_1=ca_1$, $b_2=ca_2$, $b_3=ca_3$.

（2）定义 设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 是 n 维向量组,如果存在不全为 0 的一组数 $c_1,c_2,\cdots,c_s$ 使

得

$$c_1\alpha_1+c_2\alpha_2+\cdots+c_s\alpha_s=0,$$

则说$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性相关　否则就说它们线性无关.

说明:① 意义和定义是一致的.比如设 c_s不为 0,则

$\alpha_s=\left(c_1\alpha_1+c_2\alpha_2+\cdots+c_{s-1}\alpha_{s-1}\right)/c_s$

② 当向量组中只有一个向量(s=1)时,它相关(无关)就是它是(不是)零向量.

③$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性无关即要使得$c_1\alpha_1+c_2\alpha_2+\cdots+c_s\alpha_s=0$必须 c_1, c_2, …, c_s全为 0.

(3) $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ “线性相关还是无关”就是向量方程$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_s\alpha_s=0$“有没有非零解”.

如果令 A=($\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$), 则

$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性相关(无关)$\Leftrightarrow$ 齐次方程组 AX=0 有非零解(无非零解).

2. 性质

(1)若向量的个数 s 等于维数 n,则$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$线性相关$\Leftrightarrow|\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n|=0$.

当向量的个数 s 大于维数 n 时, $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$一定线性相关.

用齐次方程组, 注意:n 是 AX=0 的方程数, s 是 AX=0 的未知数个数.
s=n 时用克莱姆法则.
s>n 即方程数 n 小于 AX=0 的未知数个数 s,一定有非零解.

(2) 线性无关向量组的每个部分组都线性无关(于是每个向量都不是零向量).

$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5$无关$\Rightarrow\alpha_1,\alpha_3,\alpha_5$无关

逆否命题:如果向量组有线性相关的部分组,则它本身也线性相关.

(3) 如果$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$线性无关　则

$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n,\beta$线性相关$\Leftrightarrow\beta\to\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$

$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n,\beta$线性无关$\Leftrightarrow$　$\beta\not\to\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$

$\Leftarrow$ 明显.
$\Rightarrow$ 设 c_1, c_2, …, c_s, c 不全为 0,使得

$c_1\alpha_1+c_2\alpha_2+\cdots+c_s\alpha_s+c\beta=0$

则 c 不为 0(否则$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性相关),因此$\beta\to\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$

例 β_1=(1,2, a+3), β_2=(2,1 ,a+6), β_3=(2,1,a+4) 线性无关.

例 15 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta$线性无关,而$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\gamma$线性相关,则

(A) $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,c\beta+\gamma$ 线性相关.

(B) $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,c\beta+\gamma$ 线性无关.

(C) $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta+c\gamma$ 线性相关.

(D) $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,c\beta+\gamma$ 线性无关.

2008 年的一个题中:已知α_1,α_2都是 3 阶矩阵 A 的特征向量,特征值分别为-1 和 1,又 3 维向量α_3满足

$\alpha_3+\alpha_2=A\alpha_3$

证明$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关.

(看题解)

设$c_1\alpha_1+c_2\alpha_2+c_3\alpha_3=0$ (1)

A(1) 得 $-c_1\alpha_1+c_2\alpha_2+c_3\alpha_2+c_3\alpha_3=0$ (2)

(1)-(2): $2c_1\alpha_1-c_3\alpha_2=0$ (3)

A(3) 得 $-2c_1\alpha_1-c_3\alpha_2=0$ (4)

(3)-(4) $4c_1\alpha_1=0$,得 $c_1=0$;

代人(3),$-c_3\alpha_2=0$,得 $c_3=0$,

代人(1),$c_2\alpha_2=0$,得 $c_2=0$

方法二:α_1,α_2线性无关,只用证 $\alpha_3\not\to\alpha_1,\alpha_2$

反证法:若 $\alpha_3=c_1\alpha_1+c_2\alpha_2$,(1)

新东方在线 www.koolearn.com 网络课堂电子教材系列

A（1） 得 $\alpha_2+\alpha_3=-c_1\alpha_1+c_2\alpha_2$（2）

（2）-（1）： $\alpha_2=-2c_1\alpha_1$ 与 α_1,α_2 线性无关矛盾。

2009 年的一个题中： $\alpha_1\neq0$，$A\alpha_1=0$，$A\alpha_2=\alpha_1$，$A^2\alpha_3=\alpha_1$， 证明 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关.（看题解）

证明：A 是 3 阶矩阵，α_1 是 3 维非零列向量，使得 $A\alpha_1=0$，又 α_2,α_3 满足 $A\alpha_2=\alpha_1$，$A^2\alpha_3=\alpha_1$，证明 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关。

证：方法一（用定义法）

设 $c_1\alpha_1+c_2\alpha_2+c_3\alpha_3=0$ （1）

$A^2(1)$： $c_1A^2\alpha_1+c_2A^2\alpha_2+c_3A^2\alpha_3=0$，即 $c_3\alpha_1=0$，得 $c_3=0$

（1）化为 $c_1\alpha_1+c_2\alpha_2=0$

A（1）： $c_2\alpha_1=0$，得 $c_2=0$

（1）化为 $c_1\alpha_1=0$，得 $c_1=0$

方法二：$\alpha_1\neq0$，α_1 无关

$\alpha_2\not\to\alpha_1$（否则 $\alpha_2=c\alpha_1$，$A\alpha_2=cA\alpha_1\neq\alpha_1$）

所以 α_1,α_2 线性无关

又 $\alpha_3\not\to\alpha_1,\alpha_2$（否则 $\alpha_3=c_1\alpha_1+c_2\alpha_2$，$A^2\alpha_3=0\neq\alpha_1$）

（4）如果 $\beta\to\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$，则 $\overset{1}{\to}\Leftrightarrow\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性无关.

$\overset{\infty}{\to}\Leftrightarrow\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性相关.

（5）如果 $\beta_1,\beta_2,\cdots\beta_t\to\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$，并且 t>s，则 $\beta_1,\beta_2,\cdots\beta_t$ 线性相关.

逆否命题：如果 $\beta_1,\beta_2,\cdots\beta_t\to\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 并且 $\beta_1,\beta_2,\cdots\beta_t$ 线性无关. 则 t≤s，

推论 如果两个线性无关的向量组互相等价，则它们包含的向量个数相等.

三. 向量组的极大无关组和秩

新东方在线 www.koolearn.com 网络课堂电子教材系列

向量组的内在性质的定量的讨论. 向量组的秩是刻画向量组相关"程度"的一个数量概念. 它表明向量组可以有多大(指包含向量的个数)的线性无关的部分组.

$$a_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\quad a_2=\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix},\quad a_3=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix},\quad a_4=\begin{pmatrix}3\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$a_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\quad a_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\quad a_3=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix},\quad a_4=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$$

1. 定义与简单性质

定义　设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 是 n 维向量组,(I)是它的一个部分组. 如果

①（I）　线性无关.
②（I）　再扩大就线性相关.

就称(I)为 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 的一个极大无关组. 称(I)　中所包含向量的个数为 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 的秩。记作 r($\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$).

说明 i）$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 的不同的极大无关组包含向量的个数会不会不同?

任何 $_i$都可用极大无关组(I)　线性表示,从而(I)　与 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 等价.

于是任意两个极大无关组等价，因此包含向量的个数相同。

说明 ii）如果 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 全是零向量,则规定 r($\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$)=0.

如果 r($\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$)=3,则

i）$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 有包含 3 个向量的无关部分组。

ii）　一个部分组如果含有多于 3 个向量,则它一定的相关.

iii）$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 的每个含有 3 个向量的线性无关部分组一定是极大无关组.

　　0≤r($\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$)≤ Min{s，n}

2. 应用

①$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性无关⇔ r($\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$)=s.

②β 可用 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性表示

　⇔r($\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s,\beta$)=r($\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$).

新东方在线 www.koolearn.com 网络课堂电子教材系列

命题： r$(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s,\beta)$=

$$\begin{cases} r(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s) & 若\beta可以用\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_s表示 \\ r(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)+1 & 若\beta不可以用\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_s表示 \end{cases}$$

证明思路:看$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$的一个极大无关组(I)是否也是$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s,\beta$的极大无关组?

$\beta\to\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s\Leftrightarrow\beta\to$(I)$\Leftrightarrow$ (I),β线性相关$\Leftrightarrow$(I)也是$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$，$\beta$

的极大无关组，则 r$(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$， $\beta)$=r$(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)$.

$\beta\not\to\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s\Leftrightarrow\beta\not\to$(I)$\Leftrightarrow$ (I),β线性无关$\Leftrightarrow$(I),β是$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$，$\beta$的极大无关组

则 r$(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$， $\beta)$=r$(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)$+1.

例 14 已知β可用$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性表示，但不可用$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{s-1}$线性表示．证明

⑴α_s不可用$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{s-1}$线性表示；

⑵α_s可用$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{s-1},\beta$线性表示.

⑴$\Leftrightarrow$ r$(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{s-1},\alpha_s,\beta)$=r$(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{s-1},\alpha_s)$.

⑵$\Leftrightarrow$ r$(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{s-1},\beta)$=r$(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{s-1})$+1.

③β可用$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$唯一线性表示

$\Leftrightarrow$r$(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{s-1},\alpha_s,\beta)$=r$(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)$=s.

④$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$可以用$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性表示$\Leftrightarrow$

r$(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$, $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t)$=r$(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)$.

推论： 如果$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$可以用$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性表示, 则

r$(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t)$≤r$(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)$.

⑤$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$和$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$等价$\Leftrightarrow$

新东方在线 www.koolearn.com 网络课堂电子教材系列

r($\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$)= r($\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$, $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$)= r($\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$).

r($\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$)的计算:

用初等行变换把矩阵($\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$)化为阶梯形矩阵,其非零行数= r($\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$).

例 11 中的向量组的秩:

$$\begin{pmatrix}1&0&3&1&2\\-1&3&0&-2&1\\2&1&7&2&5\\4&2&14&0&10\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&0&3&1&2\\0&3&3&-1&3\\0&1&1&0&1\\0&0&0&-4&0\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&0&3&1&2\\0&3&3&-1&3\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

r($\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5$)=3.

例 2 已知(2, 1, 1, 1), (2, 1, a, a), (3, 2, 1, a), (4, 3, 2, 1)线性相关, 并且 a≠1, 求 a. (05)

$$\begin{pmatrix}2&2&3&4\\1&1&2&3\\1&a&1&2\\1&a&a&1\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&1&2&3\\0&0&-1&-2\\0&a-1&-1&-1\\0&0&a-1&-1\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&1&2&3\\0&a-1&-1&-1\\0&0&-1&-2\\0&0&0&1-2a\end{pmatrix}$$

秩<4 得 1-2a=0 $a=\dfrac{1}{2}$

例 3 设 α_1=(1+a, 1, 1), α_2=(1, 1+b, 1), α_3=(1, 1, 1-b), 问 a, b 满足什么条件时 r($\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$)=2

$$(\alpha_1^T,\alpha_2^T,\alpha_3^T)=\begin{pmatrix}1+a&1&1\\1&1+b&1\\1&1&1-b\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&1&1-b\\0&b&b\\0&-a&ab+b-a\end{pmatrix}=B$$

1) 若 b=0 $B=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&0&0\\0&-a&-a\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&1&1\\0&a&a\\0&0&0\end{pmatrix}$

$b=0,a\neq0$ 时秩= 2

2) $b\neq0$ $B\rightarrow\begin{pmatrix}1&1&1-b\\0&1&1\\0&-a&ab+b-a\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&1&1-b\\0&1&1\\0&0&ab+b\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&1&1-b\\0&1&1\\0&0&a+1\end{pmatrix}$

$\begin{cases}b\neq0\\a=-1\end{cases}$ 时秩为 2

新东方在线 www.koolearn.com 网络课堂电子教材系列

例 4 设 α_1=(1+λ，1，1)，α_2 =(1，1+λ，1)，α_3=(1，1，1+λ)，β=(0，λ，λ ^{2}).

① λ 为何值时，β 可用 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示，并且表示方式唯一？

②λ 为何值时，β 可用 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示，并且表示方式不唯一？

③ λ 为何值时，β 不可用 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示？

(看题解)

$$\left(\alpha_1^T,\alpha_2^T,\alpha_3^T\middle|\beta^T\right)=\left(\begin{array}{ccc|c}1+\lambda & 1 & 1 & 0\\ 1 & 1+\lambda & 1 & \lambda\\ 1 & 1 & 1+\lambda & \lambda^2\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & 1+\lambda & \lambda^2\\ 0 & \lambda & -\lambda & \lambda-\lambda^2\\ 0 & -\lambda & -\lambda^2-2\lambda & -\lambda^3-\lambda^2\end{array}\right)\to$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & 1+\lambda & \lambda^2\\ 0 & \lambda & -\lambda & \lambda-\lambda^2\\ 0 & 0 & -\lambda^2-3\lambda & -\lambda^3-2\lambda^2+\lambda\end{array}\right)$$

当 $\lambda\neq 0,-3$ 时，$r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=3$，$r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta)=3$

当 $\lambda=0$ 时，$r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta)=1$

当 $\lambda=-3$ 时，$r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=2, r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta)=3$

例 7 设 α_1=(1, 2, −3)，α_2=(3, 0, 1)，α_3=(9, 6, −7)，β_1=(0, 1, −1)，β_2 =(a, 2, 1)，β_3 =(b，1，0). 已知 r($\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$)=r($\beta_1,\beta_2,\beta_3$), 并且 β_3 可用 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示，求 a, b. (00 二)

(看题解)

思路：先用 $\beta_3\to\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 这个条件求出 b

$$\left(\alpha_1^T,\alpha_2^T,\alpha_3^T\middle|\beta_3^T\right)=\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 3 & 9 & b\\ 2 & 0 & 6 & 1\\ -3 & 1 & -7 & 0\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 3 & 9 & b\\ 0 & -6 & -12 & 1-2b\\ 0 & 4 & 8 & b+1\end{array}\right)\to$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 3 & 9 & b\\ 0 & -6 & -12 & 1-2b\\ 0 & 12 & 24 & 3b+3\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 3 & 9 & b\\ 0 & -6 & -12 & 1-2b\\ 0 & 0 & 0 & -b+5\end{array}\right)$$

$r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=2, b=5$

则 $r(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=2, \left|\beta_1,\beta_2,\beta_3\right|=0$

新东方在线 www.koolearn.com 网络课堂电子教材系列

$$\begin{vmatrix} 0 & a & 5 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & a & 5 \\ 0 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a & 5 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -(a-15) = 0, a = 15$$

例 9 给定向量组(Ⅰ)α_1 =(1, 0, 2)，α_2 =(1, 1, 3)，α_3=(1, −1, a+2)和(Ⅱ)β_1=(1, 2, a+3)，β_2=(2, 1 , a+6)，β_3=(2, 1, a+4)．当 a 为何值时(Ⅰ)和(Ⅱ)等价? a 为何值时(Ⅰ)和(Ⅱ)不等价?(03 四)

$$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3 \cong \beta_1,\beta_2,\beta_3 \quad \Leftrightarrow r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3) = r(\beta_1,\beta_2,\beta_3) = r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1,\beta_2,\beta_3)$$

$$(\alpha_1^T,\alpha_2^T,\alpha_3^T|\beta_1^T,\beta_2^T,\beta_3^T) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & a+2 & a+3 & a+6 & a+4 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & a & a+1 & a+2 & a \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & a+1 & a-1 & a+1 & a-1 \end{array}\right)$$

当 $a=-1$ 时，$r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=2$

$r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1,\beta_2,\beta_3)=3$

当 $a \neq -1$ 时，$r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3) = r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1,\beta_2,\beta_3) = 3$

而 $(\beta_1,\beta_2,\beta_3) \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ a+1 & a+2 & a \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

$r(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=3$

结论：$a=-1$ 时不等价，$a \neq -1$ 时等价

例 8 求常数 a, 使得向量组 α_1=(1, 1, a)，α_2 =(1, a, 1)，α_3 =(a, 1, 1) 可由向量组 β_1=(1, 1, a)，β_2 =(−2, a, 4)，β_3 =(−2, a, a) 线性表示, 但是 β_1,β_2,β_3 不可用 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示. (2005 年数学二)

$$r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3) < r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1,\beta_2,\beta_3) = r(\beta_1,\beta_2,\beta_3) \le 3$$

于是 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \\ a & 1 & 1 \end{vmatrix} = -(a-1)^2(a+2)$

$a=1$ 或−2

$a=1$ 时，$\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=\beta_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$，$\beta_2=\begin{pmatrix}-2\\1\\4\end{pmatrix}$，$\beta_3\begin{pmatrix}-2\\1\\1\end{pmatrix}$

$a=-2$ 时：$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}$，$\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$，$a_3=\begin{pmatrix}-2\\1\\1\end{pmatrix}$　$r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=2$

$\beta_1=\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}$，$\beta_2=\begin{pmatrix}-2\\-2\\4\end{pmatrix}$，$\beta_1,\beta_2$ 相关，$r\left(\beta_1,\beta_2,\beta_3\right)<3$

（看题解）

3．秩的计算，有相同线性关系的向量组

两个向量个数相同的向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 和 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 称为有相同线性关系，如果向量方程

$$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_s\alpha_s=0 \text{ 和 } x_1\beta_1+x_2\beta_2+\cdots+x_s\beta_s=0$$

同解，即齐次线性方程组（$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$）X=0 和（$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$）X=0 同解.

当 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 和 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 有相同线性关系时，

(1)它们的对应部分组有一致的线性相关性.

$\alpha_1,\alpha_3,\alpha_4$ 和 β_1,β_3,β_4 相对应.

如果 α_1,α_3,α 相关，比如 $3\alpha_1-\alpha_3+5\alpha_4=$，则（3,0,−1,5,0,　…,0）是 $x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_s\alpha_s=0$ 的解，从而也是 $x_1\beta_1+x_2\beta_2+\cdots+x_s\beta_s=0$ 的解，就得到 $3\beta_1-\beta_3+5\beta_4=0$，$\beta_1,\beta_3,\beta_4$ 相关.

(2)它们的极大无关组相对应，从而它们的秩相等.

(3)它们有相同的内在线性表示关系.

$$\alpha_2=2\alpha_1+\alpha_3-\alpha_4 \Leftrightarrow \beta_2=2\beta_1+\beta_3-\beta_4$$

例如，当 A 经过初等行变换化为 B 时，AX=0 和 BX=0 同解，从而 A 的列向量组和 B 的列向量组有相同线性关系．于是它们的极大无关组相对应，秩相等.

问题：为什么阶梯形矩阵的非零行数就是它的列向量组的秩?

新东方在线 www.koolearn.com 网络课堂电子教材系列

$$\begin{pmatrix}1&0&3&1&2\\-1&3&0&-2&1\\2&1&7&2&5\\4&2&14&0&10\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&3&1&2\\0&3&3&-1&3\\0&0&0&-1&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&3&0&2\\0&1&1&0&1\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5$ $\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4,\beta_5$ $\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3,\gamma_4,\gamma_5$

显然$\gamma_1,\gamma_2,\gamma_4$无关， $3\gamma_1+\gamma_2=\gamma_3$，$2\gamma_1+\gamma_2=\gamma_5$

$\gamma_1,\gamma_2,\gamma_4$是$\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3,\gamma_4,\gamma_5$的一个极大无关组.

这样,就产生了计算一个向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$的秩和极大无关组的方法:把此向量组作为列向量组构造矩阵($\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$),用初等行变换把它化为阶梯形矩阵B,则B的非零行数就是 r($\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$)， B 的各台角所在列号对应的部分组是$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$的的一个极大无关组.

如果A经过初等列变换化为B,则A的列向量组和B的列向量组是等价关系,秩也相等,但是极大无关组并没有对应关系.

例 6 设α_1=(1, 2, 0, 1)， α_2=(1, 1, -1, 0)， α_3=(0, 1, a, 1)，

γ_1=(1, 0, 1, 0)，γ_2 =(0, 1, 0, 2). a 和 k 取什么值时，$\gamma_1+k\gamma_2$可用$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表示?写出表示式.

（看题解）

解：

$$\left(\alpha_1^T,\alpha_2^T,\alpha_3^T\middle|\gamma_1^T+k\gamma_2^T\right)=\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&0&1\\2&1&1&k\\0&-1&a&1\\1&0&1&2k\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&0&1\\0&-1&1&k-2\\0&0&a-1&3-k\\0&0&0&k+1\end{array}\right)=B$$

得 k= −1， $r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\gamma_1+k\gamma_2)=3\Rightarrow a\neq1$

$$B=\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&0&1\\0&-1&1&-3\\0&0&a-1&4\\0&0&0&0\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&0&(-2a-2)/(a-1)\\0&1&0&(3a+1)/(a-1)\\0&0&1&4/(a-1)\\0&0&0&0\end{array}\right)$$

例 10 设α_1=(1+a, 1, 1, 1)，α_2=(2, 2+a, 2, 2)，α_3=(3, 3, 3+a, 3)，

新东方在线 www.koolearn.com 网络课堂电子教材系列

α_4=(4,4,4,4+a).问 a 为什么数时$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$线性相关?在$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$线性相关时求其一个极大线性无关组,并且把其余向量用该极大线性无关组线性表出.

(看题解)

解：显然 a=0 时，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$线性相关，并且秩为 1

可得α_1为极大无关组，$\alpha_2=2\alpha_1$，$\alpha_3=3\alpha_1$，$\alpha_4=4\alpha_1$

若$a\neq0$:

$$\left(\alpha_1^T,\alpha_2^T,\alpha_3^T,\alpha_4^T\right)=\begin{pmatrix}1+a&2&3&4\\1&2+a&3&4\\1&2&3+a&4\\1&2&3&4+a\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}a&0&0&-a\\0&a&0&-a\\0&0&a&-a\\1&2&3&4+a\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&-1\\0&1&0&-1\\0&0&1&-1\\0&0&0&a+10\end{pmatrix}$$ 则当

$a=-10$ 时，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha$ 线性相关，秩为 3，取 α_1,α_2,α 为极大无关组，

$\alpha_4=-\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3$

例 11 设

α_1=(1,-1,2,4),α_2=(0,3,1,2),α_3=(3,0,7,14),α_4=(1,-2,2,0),α_5=(2,1,5,10).它们的下列部分组中,是极大无关组的有哪几个?

(1)$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ (2)$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$ (3)$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_5$ (4)$\alpha_1,\alpha_3,\alpha_4$

解：
$$\begin{pmatrix}1&0&3&1&2\\-1&3&0&-2&1\\2&1&7&2&5\\4&2&14&0&10\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&3&1&2\\0&3&3&-1&3\\0&0&0&-1&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&3&0&2\\0&1&1&0&1\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5$ $\qquad$ $\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4,\beta_5$ $\qquad$ $\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3,\gamma_4,\gamma_5$

$$\left(\alpha_1^T,\alpha_2^T,\alpha_3^T,\alpha_4^T,\alpha_5^T\right)\to\begin{pmatrix}1&0&3&0&2\\0&1&1&0&1\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$ 是极大无关组的有（2），（4）

四.矩阵的秩

1. 定义

一个矩阵 A 的行向量组的秩和列向量组的秩相等,称此数为矩阵 A 的秩,记作 r(A).

$$A=\begin{pmatrix}1&0&3&1&2\\-1&3&0&-2&1\\2&1&7&2&5\\4&2&14&0&10\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&3&1&2\\0&3&3&-1&3\\0&0&0&-1&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&3&0&2\\0&1&1&0&1\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}=C,$$

A 的行向量组的秩=C 的行向量组的秩= C 的列向量组的秩=A 的列向量组的秩

如果 A 是 m×n 矩阵,则

$0\le r(A)\le Min\{m,n\}$.

新东方在线 www.koolearn.com 网络课堂电子教材系列

r(A)=0⇔ A=0.

当 r(A)=m 时,称 A 为行满秩的;

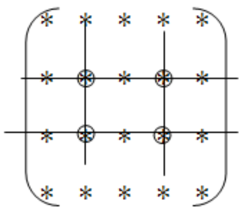
当 r(A)=n 时,称 A 为列满秩的.

对于 n 阶矩阵 A,则行满秩和列满秩是一样的,此时就称 A 满秩.于是:

n 阶矩阵 A 满秩⇔r(A)=n⇔A 的行(列)向量组无关⇔|A|≠0⇔A 可逆.

命题 r(A)就是 A 的非 0 子式的阶数的最大值.(即 A 的每个阶数大于 r(A)的子式的值都为 0,但是 A 有阶数等于 r(A)的非 0 子式.)

A 的 r 阶子式:任取 A 的 r 行和 r 列,在它们的交叉位置上的元素所构成的行列式,如果它的值不为 0,就称为非 0 子式.



2. 计算

命题 ① 初等变换保持矩阵的秩.

② 阶梯形矩阵的秩等于它的非零行的个数.

矩阵秩的计算:用初等变换将其化为阶梯形矩阵,则此阶梯形矩阵的非零行数就是原矩阵的秩.

3.矩阵秩的性质

① $r(A^T)=r(A)$.

② 如果 c 不为 0,则 r(cA)=r(A).

③ r(A±B)≤r(A)+r(B).

④ r(AB)≤Min{r(A),r(B)}.

AB 的列向量组可用 A 的列向量组线性表示,⇒ r(AB)≤ r(A).

$B^TA^T=(AB)^T$,

$r(AB)=r((AB)^T)\le r(B^T)=r(B)$.

⑤ 当 A(或 B)可逆时,r(AB)=r(B)(或 r(A)).

$A^{-1}(AB)=B$, $r(B)\le r(AB)$.

⑥ 如果 AB=0,n 为 A 的列数(B 的行数),则 r(A)+r(B)≤n.

⑦ 设 A*为 n 阶矩阵 A 的伴随矩阵,则

$$r(A^*)=\begin{cases} n, & 若r(A)=n, \\ 1, & 若r(A)=n-1, \\ 0, & 若r(A)<n-1. \end{cases}$$

见例 30

证明

$$r(A^*)=0\Leftrightarrow A^*=0\Leftrightarrow 每个A_{ij}=0\Leftrightarrow$$

$$每个M_{ij}=0(即A的每个n-1阶子式都为0)\Leftrightarrow r(A)<n-1$$

当 $r(A)=n-1$ 时,存在(n-1)阶余子式不为 0,即存在 $M_{ij}\neq 0$

新东方在线 www.koolearn.com 网络课堂电子教材系列

则 $A^*\neq 0$，$r(A^*)>0$

又 A 不满秩，$|A|=0$, 则 $AA^*=0$

$r(A)+r(A^*)\leq n\Rightarrow r(A^*)=1$

例 28 设 A 是 m×n 矩阵，证明 r(A)=1⇔存在 m 维非零列向量 $\alpha=(a_1,a_2,\cdots,a_m)^T$ 和 n 维非零列向量 $\beta=(b_1,b_2,\cdots,b_n)^T$，使得 A=$\alpha\beta^T$.

证明："⇐" 设 $A=\alpha\beta^T$，其中 $\alpha\neq 0,\beta\neq 0$. 则 $A\neq 0, r(A)>0$

$r(A)\leq r(\alpha)=1$ 得 $r(A)=1$

"⇒"设 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$，由 $r(A)=1$ 得 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 中的每个非零向量构成极大无关组。此时，每个 $\alpha_i\to\alpha$，证 $\alpha_i=b_i\alpha$，

设 $\beta=(b_1,b_2,\cdots,b_n)^T$，则

$$\alpha\beta^T=\alpha(b_1,b_2,\ldots,b_n)=(b_1\alpha,b_2\alpha,\ldots,b_n\alpha)=(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)=A$$

08 年的一个考题 设 α,β 都是 3 维列向量, A=$\alpha\alpha^T+\beta\beta^T$. 证明

(1) r(A)≤2.

(2) 如果 α,β 线性相关, 则 r(A)<2.

方法一（1） $r(A)\leq r(\alpha\alpha^T)+r(\beta\beta^T)\leq 1+1=2$

（2）不妨设 $\beta=c\alpha$，则 $\beta^T=c\alpha^T,\beta\beta^T=c^2\alpha\alpha^T$, 则 $A=(1+c^2)\alpha\alpha^T$

$r(A)=r(\alpha\alpha^T)<2$

方法二：设 $\alpha=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix},\beta=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}$,

则 $\alpha\alpha^T=(a_1\alpha,a_2\alpha,a_3\alpha),\beta\beta^T=(b_1\beta,b_2\beta,b_3\beta)$,

A=（$a_1\alpha+b_1\beta,a_2\alpha b_2\beta,a_3\alpha+b_3\beta)=(\alpha,\beta)\begin{pmatrix}a_1&a_2&a_3\\b_1&b_2&b_3\end{pmatrix}$

（1） $r(A)\leq r(\alpha,\beta)\leq 2$

（2） α,β 相关时 $r(\alpha,\beta)<2$ 所以 $r(A)<2$

新东方在线 www.koolearn.com 网络课堂电子教材系列

例 18　n 阶矩阵 A= $\begin{pmatrix} 1 & a & a & \ldots & a \\ a & 1 & a & \ldots & a \\ a & a & 1 & \ldots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & a & \ldots & 1 \end{pmatrix}$ 的秩为 n-1, 求 a. (98 三)

(看题解)

$$A \to \begin{pmatrix} 1+(n-1)a & a & a & \cdots & a \\ 1+(n-1)a & 1 & a & \cdots & a \\ 1+(n-1)a & a & 1 & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1+(n-1)a & a & a & \cdots & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1+(n-1)a & a & a & \cdots & a \\ 0 & 1-a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1-a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & & 1-a \end{pmatrix}$$

$1+(n-1)a \neq 0$，$a \neq 1$ 时，$r(A)=n$

$a=1$ 时，$r(A)=1$

$1+(n-1)a=0$ 时，即 $a=-\dfrac{1}{n-1}$ 时，$r(A)=n-1$

例 19　设 A= $\begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}$ ，已知 r(A)+r(A^*)=3, 求 a, b 应该满足的关系. (03 三)

解：　$r(A)+r(A^*)=3 \Rightarrow r(A)=2$　(原题的条件：$r(A^*)=1$)

$$\text{A} = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a+2b & b & b \\ 0 & a-b & 0 \\ 0 & 0 & a-b \end{pmatrix}$$

$a \neq b$，且 $a+2b=0$ 时　$r(A)=2$

例 20　设 A= $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}$，　B= $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ，求 r(BA+2A).

解：BA+2A=(B+2E)A,　B+2E 可逆. r(BA+2A)= r(A)=2.

例 21　3 阶矩阵 A= $\begin{pmatrix} a & b & -3 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ ，B= $\begin{pmatrix} b-1 & a & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$，已知 r(AB) 小于 r(A) 和 r(B), 求 a, b 和 r(AB).

$$AB = \begin{pmatrix} ab-a-b & a^2+b-6 & a-3 \\ 2b-2 & 2a+4 & 4 \\ 3b-5 & 3a & 2 \end{pmatrix}$$

$r(AB)<r(A), r(B) \Rightarrow A, B$ 都不可逆，于是 $r(AB)<r(A) \le 2 \Rightarrow r(AB)=1$

新东方在线 www.koolearn.com 网络课堂电子教材系列

$$\begin{cases} 2a+4=6a \\ 2b-2=6b-10 \end{cases}$$ 求出 $a=1,b=2$

或 $|A|=0,|B|=0$

$$\begin{cases} -4a+8b-12=0 \\ a+b-3=0 \end{cases} \Rightarrow a=1,b=2$$

(看题解)

例 25　设 A 是 m×n 矩阵，B 是 n×m 矩阵，则(　)

(A) 当 m>n 时，|AB|≠0.　(B)　当 m>n　时，　|AB|=0.

(C) 当 n>m　时，　|AB|≠0.　(D) 当 n>m　时，　|AB|=0.　(99)

(看题解)

AB 是 m 阶矩阵，问 $r(AB)=m$?

$m>n$ 时：

$$r(AB)\le r(A)\le \min\{m,n\}=n<m$$

$$\Rightarrow r(AB)<m，\ |AB|=0$$

选（B）

$m<n$ 时　$r(AB)\le r(A)\le \min\{m,n\}=m$

例 26　AB　=0, A,B 是两个非零矩阵,则

(A) A 的列向量组线性相关.B 的行向量组线性相关.

(B) A 的列向量组线性相关.B 的列向量组线性相关.

(C) A 的行向量组线性相关.B 的行向量组线性相关.

(D) A 的行向量组线性相关.B 的列向量组线性相关.　(04)

解：AB　=0,则 r(A)+r(B)≤n,n 为 A 的列数,B 的行数.

又 r(A)>0,r(B)>0,得 r(A)< n,r(B)<n.

例 16　已知 n 维向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性无关,则 n 维向量组 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 也线性无关的充分必要条件为

(A) $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 可用 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 线性表示.

(B) $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 可用 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 用线性表示.

(C) $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 与 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 等价.

(D) 矩阵($\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$)和($\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$)等价.

解：矩阵等价，即可用初等变换互化

A 与 B 等价 ⇔ A 与 B 行，列数对应相等，且 $r(A)=r(B)$

（A）　是充分条件，不必要

（B）　既不充分，又不必要

（C）　是充分条件，不必要

新东方在线 www.koolearn.com 网络课堂电子教材系列

选（D）

矩阵的等价 两个矩阵如果可以用初等变换互相转化,就称它们等价. 矩阵的等价的充分必要条件为它们类型相同,秩相等.

(看题解)

例 17 设$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$都是 n 维向量，A 是 m×n 矩阵，下列选项中正确的是（ ）.

(A) 若$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性相关,则$A\alpha_1,A\alpha_2,\cdots,A\alpha_s$线性相关.

(B) 若$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性相关,则$A\alpha_1,A\alpha_2,\cdots,A\alpha_s$线性无关.

(C) 若$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性无关,则$A\alpha_1,A\alpha_2,\cdots,A\alpha_s$线性相关.

(D) 若$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性无关,则$A\alpha_1,A\alpha_2,\cdots,A\alpha_s$线性无关. (06)

解：设 $c_1,c_2,\cdots,c_s$不全为 0 使得$c_1\alpha_1+c_2\alpha_2+c_s\alpha_s=0$则$c_1A\alpha_1+c_2A\alpha_2+c_sA\alpha_s=0$

$(A\alpha_1,A\alpha_2,\cdots,A\alpha_s)=A(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)\Rightarrow$

$r(A\alpha_1,A\alpha_2,\cdots,A\alpha_s)\le r(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)$

07 年考题

设$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关，则( )线性相关：

(A) $\alpha_1-\alpha_2,\alpha_2-\alpha_3,\alpha_3-\alpha_1$

(B) $\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_1$

(c) $\alpha_1-2\alpha_2,\alpha_2-2\alpha_3,\alpha_3-2\alpha_1$

(D) $\alpha_1+2\alpha_2,\alpha_2+2\alpha_3,\alpha_3+2\alpha_1$

例 22 设$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关，则( )线性无关：

(A) $\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3-\alpha_1$

(B) $\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_1+2\alpha_2$

(C) $\alpha_1+2\alpha_2,2\alpha_2+3\alpha_3,3\alpha_3+\alpha_1$

(D) $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3,2\alpha_1-3\alpha_2+22\alpha_3,5\alpha_2-5\alpha_3+3\alpha_1$. (97 三)

(看题解)

新东方在线 www.koolearn.com 网络课堂电子教材系列

解：看出（A)，（B）两组向量线性相关，从（C）（D）中

（C） $(\alpha_1+2\alpha_2,2\alpha_2+3\alpha_3,3\alpha_3+\alpha_1)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}1&0&1\\2&2&0\\0&3&3\end{pmatrix}$

令 $C=\begin{pmatrix}1&0&1\\2&2&0\\0&3&3\end{pmatrix}$

若$|C|\neq 0$,即 C 可逆，则

$r(\alpha_1+2\alpha_2,2\alpha_2+3\alpha_3,3\alpha_3+\alpha_1)=r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=3$，

$\Rightarrow\alpha_1+2\alpha_2,2\alpha_2+3\alpha_3,3\alpha_3+\alpha_1$无关

若 $|C|=0$，则$r(C)<3$，所以$r(\alpha_1+2\alpha_2,2\alpha_2+3\alpha_3,3\alpha_3+\alpha_1)<3,$

$\Rightarrow\alpha_1+2\alpha_2,2\alpha_2+3\alpha_3,3\alpha_3+\alpha_1$相关

（C）矩阵法：

若$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性无关，$\beta_1,\cdots,\beta_s\to\alpha_1,\cdots,\alpha_s$ 看 $\beta_1,\cdots,\beta_s$的线性相关性

设$(\beta_1,\cdots,\beta_s)=(\alpha_1,\cdots,\alpha_s)C$

则 C 可逆$\Leftrightarrow$ $\beta_1,\cdots,\beta_s$线性无关

例 31　设 A 为 n 阶矩阵, α 为 n 维列向量. 正整数 k 使得 $A^k\alpha=0$, 但是 $A^{k-1}\alpha\neq 0$, 证明α，$A\alpha$，…，$A^{k-1}\alpha$ 线性无关.

(看题解)

解：设$c_1\alpha+c_2A\alpha+\cdots+c_kA^{k-1}\alpha=0$　（1）

$A^{k-1}(1)$ 得 $c_1A^{k-1}\alpha=0\Rightarrow c_1=0$

$A^{k-2}(1)$ 得 $c_2A^{k-1}\alpha=0\Rightarrow c_2=0$

依次类推，得到 Ci=0，所以α，$A\alpha$，…，$A^{k-1}\alpha$ 线性无关.

例 32　证明 r$(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s,\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t,)\leq$r$(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)$+r$(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t)$.

(看题解)

解：取$\alpha_1,\cdots,\alpha_s,\beta_1,\cdots,\beta_t$的一个极大无关组（I）

设 $(I)_\alpha$ 是（I）在$\alpha_1,\cdots,\alpha_s$中的部分

新东方在线 www.koolearn.com 网络课堂电子教材系列

$(I)_\beta$ 是（I）在 $\beta_1,\cdots,\beta_t$ 中的部分

则 $(I)_\alpha \cup (I)_\beta$ =（I）$\Rightarrow$ $r(I)_\alpha + r(I)_\beta \geq r(I) = r(\alpha_1,\cdots,\alpha_s,\beta_1,\cdots,\beta_t)$

$(I)_\alpha$ 是（I）在 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s$ 中的部分，$\geq r(I)$ $(I)_\alpha \leq r(\alpha_1,\cdots,\alpha_s)$

$r(I)_\beta \leq r(\beta_1,\cdots,\beta_t)$

所以 $r(\alpha_1,\cdots,\alpha_s,\beta_1,\cdots,\beta_t) \leq r(\alpha_1,\cdots,\alpha_s) + r(\beta_1,\cdots,\beta_t)$

例 33　证明 r(A+B)≤r(A)+r(B).
(看题解)

证 $A = (\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$, $B = (\beta_1,\cdots,\beta_n)$

则 $A + B = (\alpha_1+\beta_1,\cdots,\alpha_n+\beta_n)$

$\alpha_1+\beta_1,\alpha_2+\beta_2,\cdots,\alpha_n+\beta_n \to \alpha_1,\cdots,\alpha_n,\beta_1,\cdots,\beta_n$

$r(A+B) = r(\alpha_1+\beta_1,\cdots,\alpha_n+\beta_n) \leq r(\alpha_1,\cdots,\alpha_n,\beta_1,\cdots,\beta_n)$

$\leq r(\alpha_1,\cdots,\alpha_n) + r(\beta_1,\cdots,\beta_n) = r(A) + r(B)$

例 34　证明矩阵方程 AX=B 有解⇔r(A|B)=r(A).
(看题解)

解：$Ax = B$ 有解 $\Leftrightarrow$ 存在矩阵 C，使得 AC=B

$\Leftrightarrow$ B 的列向量 $\beta_1,\cdots,\beta_n$ 可用 A 的列向量组 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 线性表示

$\Leftrightarrow r(\alpha_1,\cdots,\alpha_n,\beta_1,\cdots,\beta_n) = r(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$

即 $r(A|B) = r(A)$

第五讲 线性方程组

一. 线性方程组解的情况的判别

$AX = \beta$，即 $x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_n\alpha_n = \beta$,

$AX = \beta$ 有解

$\Leftrightarrow \beta \to \alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n \Leftrightarrow r(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n,\beta) = r(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n) \Leftrightarrow r(A|\beta) = r(A)$

$AX = \beta$ 有唯一解 $\Leftrightarrow r(A|\beta) = r(A) = n.$

判别其解的情况用三个数:未知数的个数 n，$r(A)$，$r(A|\beta)$

新东方在线 www.koolearn.com 网络课堂电子教材系列

① 无解 $\Leftrightarrow r(A)<r(A|\beta)$.

② 有唯一解 $\Leftrightarrow r(A)=r(A|\beta)=n$.

（当 A 是方阵时，就推出克莱姆法则.）

③ 有无穷多解 $\Leftrightarrow r(A)=r(A|\beta)<n$.

例 11 设 A 是 m×n 矩阵，r(A)=r. 则方程组 $AX=\beta$

(A)在 r=m 时有解.
(B)在 m=n 时有唯一解.
(C)在 r<n 时有无穷多解.
(D)在 r=n 时有唯一解.

解：

(B) A 是 n×n 矩阵，缺 A 可逆的条件.

(C) 缺 r(A)=r($A|\beta$)的条件.

(D) 缺 r(A)= r($A|\beta$)的条件.

(A) m=r(A)≤ r($A|\beta$) ≤m, 则 m=r(A)=r($A|\beta$)=m.

方程的个数 m 虽然在判别公式中没有出现，但它是 r(A)和 r($A|\beta$)的上界，因此

当 r(A)=m 时，$AX=\beta$ 一定有解.

当 m<n 时，一定不是唯一解.

对于齐次方程组 $AX=0$，判别解的情况用两个数：n, r(A).
r(A)=n⇔只有零解
r(A)<n⇔有非零解.
A 列满秩⇔ $AX=0$ 只有零解.

推论 1 当 A 列满秩时，A 在矩阵乘法中有左消去律：
$AB=0\Rightarrow B=0$；$AB=AC\Rightarrow B=C$

证明 设 $B=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t)$，$AB=(A\beta_1,A\beta_2,\cdots,A\beta_t)$ 则

$AB=0\Leftrightarrow A\beta_i=0,\quad i=1,2,\cdots,s.\Leftrightarrow \beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$，都是 $AX=0$ 的解
而 A 列满秩，$AX=0$ 只有零解，$\beta_i=0, i=1,2,\cdots,s$，即 $B=0$.

推论 2 如果 A 列满秩，则 r(AB)=r(B).
证明 只用证明齐次方程组 ABX=0 和 BX=0 同解.（此时矩阵 AB 和 B 的列向量组有相同的线性关系，从而秩相等.）

新东方在线 www.koolearn.com 网络课堂电子教材系列

η 是 ABX=0 的解⇔$AB\eta$=0⇔$B\eta$=0⇔η 是 BX=0 的解.

应用：可以对 C-矩阵法作更加直接的解释：

$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 可以用线性无关向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性表示时，$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 可以用线性相关性的判断：写出 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$ 对 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 的表示矩阵 C，则

$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 线性无关⇔ C 可逆.

解释：因为 $(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s)=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)C$,

矩阵 $(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)$ 列满秩,用推论 2, $r(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s)=r(C)$.

并且可以扩大 C-矩阵法的应用范围:β 向量组的向量个数可小于α 向量组的向量个数.如 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关,则 $\alpha_2-\alpha_1,\alpha_3-\alpha_1$ 也线性无关,因为 $\alpha_2-\alpha_1,\alpha_3-\alpha_1$ 对 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 的表示矩阵为 $\begin{pmatrix}-1 & -1\\ 1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$,秩为 2.

二. 线性方程组的通解

1. 齐次方程组 AX=0

(1) 解的性质:如果 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_s$ 是齐次方程组 AX=0 的一组解,则它们的任何线性组合

$c_1\eta_1+c_2\eta_2+\cdots+c_s\eta_s$ 也都是解.

$$A(c_1\eta_1+c_2\eta_2+\cdots+c_s\eta_s)=c_1A\eta_1+c_2A\eta_2+\cdots+c_sA\eta_s=0$$

(2) 齐次方程组的基础解系和通解

如果齐次方程组 AX=0 有非零解,则它的解集 J(全部解的集合)是无穷集,称 J 的每个极大无关组为 AX=0 的**基础解系.**

判别一组向量 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_s$ 是 AX=0 的基础解系的条件为

① $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_s$ 是 AX=0 的一组解.

② $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_s$ 线性无关.

③ AX=0 的每个解 $\eta\to\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_s$ 于是，当 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_s$ 是 AX=0 的基础解系时:

向量 η 是 AX=0 的解⇔η 可用 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_s$ 线性表示.

AX=0 的通解为:

$$c_1\eta_1+c_2\eta_2+\cdots+c_s\eta_s \qquad c_i \text{ 任意.}$$

定理 设 AX=0 有 n 个未知数,则 $r(J)=n-r(A)$.即它的基础解系中包含解的个数为 $s=n-r(A)$.

于是“③ AX=0 的每个解 $\eta\to\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_s$”可换成

新东方在线 www.koolearn.com 网络课堂电子教材系列

③ s=n-r(A).

例 14 $\begin{cases} x_1+x_3=0 \\ 2x_2+x_4=0 \end{cases}$ 的一个基础解系为

(A) $(0,-1,0,2)^T$. (B) $(0,-1,0,2)^T$, $(0,1/2,0,1)^T$.

(C) $(1,0,-1,0)^T$, $(-2,0,2,0)^T$. (D) $(0,-1,0,2)^T$, $(1,0,-1,0)^T$.

例 13 当 A=( )时，(0，1，-1)和(1，0，2)构成齐次方程组 AX=0 的基础解系. (92)

(A) $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$. (B) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

(C) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ (D) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

例 15 已知$(1,a,2)^T$, $(-1,4,b)^T$构成齐次线性方程组

$$\begin{cases} sx_1+x_2-2x_3=0 \\ 2x_1-tx_2-2x_3=0 \end{cases}$$

的一个基础解系, 求 a, b, s, t.

方法一：把两个解$(1,a,2)^T$和$(-1,4,b)^T$代入方程得

$$\begin{cases} s+a-4=0 \\ at+2=0 \\ -s+4-2b=0 \\ -2-4t-2b=0 \end{cases}$$

解出

a	b	s	t
2	1	2	-1
-4	-2	8	$\frac{1}{2}$

方法二：s=2，n=3，则 r(A)=1

于是 $r\begin{pmatrix} s & 1 & -2 \\ 2 & -t & -2 \end{pmatrix}=1$

S=2, t=-1

例 AX=0 和 BX=0 都是 n 元方程组，判断下列断言的正确性.

(1) AX=0 和 BX=0 同解⇒ r(A)=r(B).

(2) r(A)=r(B)⇒ AX=0 和 BX=0 同解.

(3) AX=0 的解都是 BX=0 的解⇒ r(A)≤r(B).

(4) AX=0 的解都是 BX=0 的解⇒ r(A)≥r(B).

(5) r(A)≥r(B)⇒ AX=0 的解都是 BX=0 的解.

AX=0 的解都是 BX=0 的解⇒$J_A \subset J_B$ ⇒. r(J_A)≤r(J_B)即 n-r(A)≤n-r(B).

推论 如果 AB=0, n 为 A 的列数(B 的行数), 则 r(A)+r(B)≤n.

证 记 B=($\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$), 则 AB=($A\beta_1, A\beta_2,\cdots, A\beta_s$),

新东方在线 www.koolearn.com 网络课堂电子教材系列

于是 $AB=0\Leftrightarrow A\beta_i=0$, i=1, 2, … , s, 即每个 β_i 都是齐次方程组 $AX=0$ 的解. 即 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 是 J 的部分组。

则 r(B)= r($\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$)≤ r($J$)=n−r($A$), 即 r($A$)+r($B$)≤n.

例 1 $\begin{cases} 3x_1+2x_2-2x_3+x_4 \qquad\quad =0 \\ 6x_1+4x_2+5x_3+2x_4+3x_5=0 \\ 9x_1+6x_2 \qquad\ +3x_4+2x_5=0 \end{cases}$ 求此齐次方程组的一个基础解系和通解.

① $A=\begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 & 1 & 0 \\ 6 & 4 & 5 & 2 & 3 \\ 9 & 6 & 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 6 & 0 & 2 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{9} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

② 取定自由未知量 x_2,x_4,x_5 写出同解方程组

$$\begin{cases} x_1=-\frac{2}{3}x_2-\frac{1}{3}x_4-\frac{2}{9}x_5 \\ x_3=-\frac{1}{3}x_5 \end{cases}$$

③ 对自由未知量赋值（轮流地取值 1），得基础解系

$$(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)$$

$$\eta_1=\left(-\frac{2}{3},1,0,0,0\right)^T$$

$$\eta_2=\left(-\frac{1}{3},0,0,1,0\right)^T$$

$$\eta_3=\left(-\frac{2}{9},0,-\frac{1}{3},0,1\right)^T$$

④ 写出通解：$c_1\eta_1+c_2\eta_2+c_3\eta_3, c_i$ 任意

2007 考题

已知方程组

$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=0 \\ x_1+2x_2+ax_3=0 \\ x_1+4x_2+a^2x_3=0 \end{cases}$ 和 $x_1+2x_2+x_3=a-1$ 有公共解, 求 a 和全部公共解.

有公共解 $\Leftrightarrow$ 联立方程组

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=0 \\ x_1+2x_1+ax_3=0 \\ x_1+4x_1+a^2x_3=0 \\ x_1+2x_2+x_3=a-1 \end{cases}$$

有解

新东方在线 www.koolearn.com 网络课堂电子教材系列

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & a & 0 \\ 1 & 4 & a^2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & a-1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & a-1 & 0 \\ 0 & 0 & 1-a & a-1 \\ 0 & 0 & 0 & a^2-3a+2 \end{array}\right)$$

当 a=1 时，$r\left(A|\beta\right)=r(A)=2$，有公共解

当 a=2 时，$r\left(A|\beta\right)=r(A)=3$，有公共解

当 a≠1，2 时，$r\left(A|\beta\right)=4, r(A)=3$，无公共解

当 a=1 时，联立方程组是齐次方程组，有非零解

$$A \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{cases} x_1 = -x_3 \\ x_2 = 0 \end{cases}$$

基础解系：$\alpha = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

通解（即公共解的一般形式）：$c\alpha$，c 任意
a=2 时，唯一解：

$$\left(A|\beta\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

求出解为：$(0, 1, -1)^T$

2. 非齐次方程组 $AX=\beta$
(1) 非齐次方程组解的性质

如果 $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_s$ 是 $AX=\beta$ 的一组解, 则

$$A\left(c_1\xi_1 + c_2\xi_2 + \cdots + c_s\xi_s\right) = c_1A\xi_1 + c_2A\xi_2 + \cdots + c_sA\xi_s = (c_1 + c_2 + \cdots + c_s)\beta \quad .$$

命题 1 如果 $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_s$ 是 $AX=\beta$ 的一组解, 则

① 它们的线性组合 $c_1\xi_1 + c_2\xi_2 + \cdots + c_s\xi_s$ 也是 $AX=\beta$ 解的⇔$c_1+c_2+\cdots+c_s=1$.

② 它们的线性组合 $c_1\xi_1 + c_2\xi_2 + \cdots + c_s\xi_s$ 是 $AX=0$ 的解⇔ $c_1+c_2+\cdots+c_s=0$.

例如 $AX=\beta$ 的两个解的差一定是 $AX=0$ 的解.

新东方在线 www.koolearn.com 网络课堂电子教材系列

命题 2 如果ξ_0是 $AX=\beta$ 的一个解, 则:

向量ξ也是解$\Leftrightarrow \xi-\xi_0$是导出齐次方程组 $AX=0$ 的解.

(左边ξ是解, 即 $A\xi=\beta$，右边$\xi-\xi_0$是 $AX=0$ 的解, 即 $A(\xi-\xi_0)=0$,

即 $A\xi=A\xi_0$.)

命题 2 也就是说, ξ也是解$\Leftrightarrow \xi$是ξ_0与导出组 $AX=0$ 的一个解的和.

(2) 非齐次方程组的通解

如果ξ_0是非齐次方程组 $AX=\beta$ 的解, $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_s$是导出组 $AX=0$ 的基础解系, 则 $AX=\beta$ 的通解(一般解)为

$\xi_0+c_1\eta_1+c_2\eta_2+\cdots+c_s\eta_s$其中 c_1，c_2, …, c_s 可取任何常数.

例 16 线性方程组

$$\begin{cases}2x_1+x_2+x_3-x_4=1\\ x_1+x_2+x_3-2x_4=0\end{cases}$$ 的通解可以表示为

(A) $(1,-1,0,0)^T+c(0,1,-1,0)^T$, c 任意.

(B) $(0,1,1,1)^T+c_1(0,-2,2,0)^T+c_2(0,1,-1,0)^T$, c_1,c_2任意.

(C) $(1,-2,1,0)^T+c_1(-1,2,1,1)^T+c_2(0,1,-1,0)^T$, c_1,c_2任意.

(D) $(1,-1,0,0)^T+c_1(1,-2,1,0)^T+c_2(0,1,-1,0)^T$, c_1,c_2任意.

例 12 设ξ_1，ξ_2是非齐次方程组 $AX=\beta$ 的两个不同的解, η_1,η_2为它的导出组 $AX=0$ 的一个基础解系，则它的通解为（）

(A) $k_1\eta_1+k_2\eta_2+(\xi_1-\xi_2)/2$

(B) $k_1\eta_1+k_2(\eta_1-\eta_2)+(\xi_1+\xi_2)/2$

(C) $k_1\eta_1+k_2(\xi_1-\xi_2)+(\xi_1-\xi_2)/2$

(D) $k_1\eta_1+k_2(\xi_1-\xi_2)+(\xi_1+\xi_2)/2$

2009 年考题

$$A=\begin{pmatrix}1&-1&-1\\-1&1&1\\0&-4&-2\end{pmatrix},\quad \alpha_1=\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}$$

新东方在线 www.koolearn.com 网络课堂电子教材系列

① 求满足 $A\alpha_2=\alpha_1$ 和 $A^2\alpha_3=\alpha_1$ 的所有向量 α_3 和 α_2.

② 证明：在满足①的情况下，任意一对 α_2 和 α_3 与 α_1 放在一起线性无关

① 即求 AX=α_1 和 A^2X=α_1 的通解

解 AX=α_1：

$$(A\mid\alpha_1)=\left(\begin{array}{ccc|c}1&-1&-1&1\\-1&1&1&-1\\0&-4&-2&2\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&-1&-1&1\\0&2&1&-1\\0&0&0&0\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\0&1&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\\0&0&0&0\end{array}\right)$$

同解方程组：

$$\begin{cases}x_1=\frac{1}{2}x_3+\frac{1}{2}\\x_2=-\frac{1}{2}x_3-\frac{1}{2}\end{cases}$$

令 $x_3=0$ 求得特解

$\xi_0=(\frac{1}{2}\quad -\frac{1}{2}\quad 0)^T$

AX=0 的同解方程组：

$$\begin{cases}x_1=\frac{1}{2}x_3\\x_2=-\frac{1}{2}x_3\end{cases}$$

基础解系由 $\eta=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&1\end{pmatrix}^T$ 构成

α_2 的一般形式为 $\xi_0+c\eta$，c 任意

A^2X=α_1 ： $A^2=\begin{pmatrix}2&2&0\\-2&-2&0\\4&4&0\end{pmatrix}$

$$\left(A^2\middle|\alpha_1\right)=\left(\begin{array}{ccc|c}2&2&0&1\\-2&-2&0&-1\\4&4&0&2\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&0&\frac{1}{2}\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{array}\right)$$

同解方程组 $x_1=-x_2+\frac{1}{2}$

求出特解 $\xi_1=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\0\\0\end{pmatrix}$

$A^2X=0$ 的同解方程组 $x_1=-x_2$

基础解系 $\eta_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix},\eta_2=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

α_3 的一般形式：$\xi_1+c_1\eta_1+c_2\eta_2$，$c_i$ 任意

例 2 讨论 p,t 的取值对下面方程组解的影响,并在有无穷多解时求通解.(96 四)

$$\begin{cases}x_1+x_2-2x_3+3x_4=0\\2x_1+x_2-6x_3+4x_4=-1\\3x_1+2x_2+px_3+7x_4=-1\\x_1-x_2-6x_3-x_4=t\end{cases}$$

(1) $(A\mid\beta)=\left(\begin{array}{cccc|c}1&1&-2&3&0\\2&1&-6&4&-1\\3&2&p&7&-1\\1&-1&-6&-1&t\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cccc|c}1&1&-2&3&0\\0&-1&-2&-2&-1\\0&0&p+8&0&0\\0&0&0&0&t+2\end{array}\right)$

$t\neq 2$ 时无解

$t=-2$ 时无穷多解

(2) 求通解

① $p=-8$ 时，$(A\mid\beta)\to\left(\begin{array}{cccc|c}1&0&-4&1&-1\\0&1&2&2&1\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{array}\right)$

得同解方程组

$$\begin{cases}x_1=4x_3-x_4-1\\x_2=-2x_3-2x_4+1\end{cases}$$

令 $x_3=x_4=0$ 得特解 $\xi_0=\begin{pmatrix}-1&1&0&0\end{pmatrix}^T$

AX=0 与 $\begin{cases}x_1=4x_3-x_4\\x_2=-2x_3-2x_4\end{cases}$ 同解

求得基础解系：

$\eta_1=\begin{pmatrix}4&-2&1&0\end{pmatrix}^T$，$\eta_2=\begin{pmatrix}-1&-2&0&1\end{pmatrix}^T$

通解为 $\xi_0+c_1\eta_1+c_2\eta_2$，$c_i$ 任意

新东方在线 www.koolearn.com 网络课堂电子教材系列

② $p\neq 8$ 时，$(A|\beta)\to\left(\begin{array}{cccc|c}1&0&0&1&-1\\0&1&0&2&1\\0&0&1&0&0\\0&0&0&0&0\end{array}\right)$

同解方程组

$$\begin{cases}x_1=-x_4-1\\x_2=-2x_4+1\\x_3=0\end{cases}$$

特解：$\xi_0=\begin{pmatrix}-1&1&0&0\end{pmatrix}^T$

AX=0 的基础解系：$\eta_2=\begin{pmatrix}-2&-1&0&1\end{pmatrix}^T$

通解为 $\xi_0+c\eta_2$，c 任意

例 4 线性方程组的增广矩阵为

$$(A|\beta)=\left(\begin{array}{cccc|c}1&a&b&1&0\\2&1&1&2&0\\3&2+a&4+b&4&1\end{array}\right),$$

又已知 $(1,-1,1,-1)^T$ 是它的一个解.

(1) 用导出组的基础解系表示通解.

(2) 写出满足 $x_2=x_3$ 的全部解. (04 四)

以 $\xi_0=(1,-1,1,-1)^T$ 代入，得 a=b

(1) 已有了特解 ξ_0，只用再求 AX=0 的基础解系

$$A=\begin{pmatrix}1&a&a&1\\2&1&1&2\\3&2+a&4+a&4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}2&1&1&2\\0&2a-1&2a-1&0\\0&1&3&1\end{pmatrix}=B$$

① 当 $2a-1=0$ 时

$$B\to\begin{pmatrix}2&1&1&2\\0&1&3&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&-1&\frac{1}{2}\\0&1&3&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

得 AX=0 的同解方程组

$$\begin{cases}x_1=x_3-\frac{1}{2}x_4\\x_2=-3x_3-x_4\end{cases}$$

求出基础解系：$\eta_1=(1,-3,1,0)^T$ 和 $\eta_2=\left(-\frac{1}{2},-1,0,1\right)^T$

通解为 $\xi_0+c_1\eta_1+c_2\eta_2$，$c_i$ 任意

新东方在线 www.koolearn.com 网络课堂电子教材系列

② 当 $2a-1\neq 0$ 时

$$B\to\begin{pmatrix}2&1&1&2\\0&1&1&0\\0&1&3&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&1&1&0\\0&0&1&\frac{1}{2}\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&-\frac{1}{2}\\0&0&1&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

得 AX=0 的同解方程组

$$\begin{cases}x_1=-x_4\\x_2=\frac{1}{2}x_4\\x_3=-\frac{1}{2}x_4\end{cases}$$

求出基础解系：$\eta=\left(-1,\frac{1}{2},-\frac{1}{2},1\right)^T$

通解为 $\xi_0+c\eta$，c 任意

(2) 从原方程中找出满足 $x_2=x_3$ 的解

① $2a-1=0$ 时：

$x_2=-1-3c_1-c_2$

$x_3=1+c_1$

$x_2=x_3$ 即 $2+4c_1+c_2=0,c_2=-2-4c_1$，

得通解：$\xi_0+c_1\eta_1+(-2-4c_1)\eta_2$

$=(2,1,1,-3)^T+c_1(3,1,1,-4)^T$

②当 $2a-1\neq 0$ 时

$x_2=-1+\frac{c}{2}$ $x_3=1-\frac{c}{2}$ $x_2=x_3$ 即 $c=2$

得唯一解：$(-1,0,0,1)^T$

例 29 已知线性方程组

$$\begin{cases}x_1+x_2+x_3+x_4=-1\\4x_1+3x_2+5x_3-x_4=-1\\ax_1+x_2+3x_3+bx_4=1\end{cases}$$

有 3 个线性无关的解.

① 证明此方程组的系数矩阵 A 的秩为 2.

② 求 a, b 的值和方程组的通解.

① $A=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\4&3&5&-1\\a&1&3&b\end{pmatrix}$ 显然 $r(A)\geq 2$

设 ξ_1,ξ_2,ξ_3 是此方程组的 3 个线性无关的解，则 $\xi_2-\xi_1,\xi_3-\xi_1$ 是 AX=0 的两个线性无关的解，

新东方在线 www.koolearn.com 网络课堂电子教材系列

于是 $r(J)=4-r(A)\geq 2$ 即 $r(A)\leq 2$ 得 $r(A)=2$

②$(A|\beta)=\left(\begin{array}{cccc|c}1&1&1&1&-1\\4&3&5&-1&-1\\a&1&3&b&1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cccc|c}1&1&1&1&-1\\0&-1&1&-5&3\\0&1-a&3-a&b-a&1+a\end{array}\right)$

$\to\left(\begin{array}{cccc|c}1&1&1&1&-1\\0&-1&1&-5&3\\0&0&4-2a&4a+b-5&4-2a\end{array}\right)=(B|r)$

由 $r(A)=2$ 得 $\begin{cases}4-2a=0\\4a+b-5=0\end{cases}$，求出 $a=2,b=-3$

$(B|r)=\left(\begin{array}{cccc|c}1&1&1&1&-1\\0&-1&1&-5&3\\0&0&0&0&0\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cccc|c}1&0&2&-4&2\\0&1&-1&5&-3\\0&0&0&0&0\end{array}\right)$

得同解方程组

$\begin{cases}x_1=-2x_3+4x_4+2\\x_2=x_3-5x_4-3\end{cases}$

令 $x_3=x_4=0$，得一特解 $\xi_0=(2,-3,0,0)^T$

AX=0 的同解方程组为

$\begin{cases}x_1=-2x_3+4x_4\\x_2=x_3-5x_4\end{cases}$

求出基础解系 $\eta_1=(-2,1,1,0)^T$， $\eta_2=(4,-5,0,1)^T$

通解为 $\xi_0+c_1\eta_1+c_2\eta_2$， c_i 任意

例 5 设线性方程组为

$$\begin{cases}x_1+a_1x_2+a_1^2x_3=a_1^3\\x_1+a_2x_2+a_2^2x_3=a_2^3\\x_1+a_3x_2+a_3^2x_3=a_3^3\\x_1+a_4x_2+a_4^2x_3=a_4^3\end{cases}$$

(1) 证明当 a_1, a_2, a_3, a_4 两两不相等时, 方程组无解.

(2) 设 $a_1=a_3=-a_2=-a_4=k$, 并且 $(-1, 1, 1)^T$ 和 $(1, 1, -1)^T$ 都是解, 求此方程组的通解. (94)

(1) $(A|\beta)=\left(\begin{array}{ccc|c}1&a_1&a_1^2&a_1^3\\1&a_2&a_2^2&a_2^3\\1&a_3&a_3^2&a_3^3\\1&a_4&a_4^2&a_4^3\end{array}\right)$

$|A|\beta|$ 是范德蒙行列式， a_1,a_2,a_3,a_4 两两相减得到 6 个差相乘

$|A|\beta|\neq 0$

此时 $r(A|\beta)=4$， $r(A)=3$ 无解

(2)原方程简化为 $\begin{cases} x_1+kx_2+k^2x_3 &=k^3 \\ x_1-kx_2+k^2x_3 &=-k^3 \end{cases}$

思路一：用 $\xi_1=(-1,1,1,)^T$ 和 $\xi_2=(1,1,-1,)^T$ 代入，求出 $k^2=1$ 再求解

思路二：特解已有，又因为 $k\neq 0$， $r(A)=2$，AX=0 的基础解系由一个非零解构成，于是 $\xi_2-\xi_1=(2,0,-2,)^T$ 是 AX=0 的基础解系，通解为：

$\xi_1+c(\xi_2-\xi_1)$， c 任意

例 6 已知 $\xi_1=(0,1,0)^T$ 和 $\xi_2=(-3,2,2)^T$ 都是方程组

$$\begin{cases} x_1-x_2+2x_3=-1 \\ 3x_1+x_2+4x_3=1 \\ ax_1+bx_2+cx_3=d \end{cases}$$

的解，求通解.

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \\ a & b & c \end{pmatrix} \quad r(A)\geq 2$$

例8 设矩阵 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$，其中

$\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性无关， $\alpha_1=2\alpha_2-\alpha_3$ 又设 $\beta=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4$，求 $AX=\beta$ 的通解.(02 一，二)

做法一：设定 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 和 β ，满足条件，再求解

$$(A|\beta)=\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

做法二： $AX=\beta$ 即 $x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3+x_4\alpha_4=\beta$

由 $\beta=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4$ 得特解 $\xi_0=(1,1,1,1)^T$

$n=4$，$r(A)=3$，$n-r(A)=1$

由 $\alpha_1=2\alpha_2-\alpha_3$ 即 $\alpha_1-2\alpha_2+\alpha_3=0$，得 $(1,-2,1,0)^T$
AX=0 的一个解，构成基础解系

通解：$(1,1,1,1)^T+c(1,-2,1,0)^T$，c 任意

例 10 已知 3 阶矩阵 A 的第一行为(a,b,c)，a,b,c 不全为 0，矩阵

$B=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&4&6\\3&6&K\end{pmatrix}$ ，并且 $AB=0$，

求齐次线性方程组 $AX=0$ 的通解.（2005）

由 $AB=0$ 得，Ⅰ）$r(A)+r(B)\le 3$ Ⅱ）B 的 3 个列向量都是 $AX=0$ 的解

⑴ $k\ne 9$，则 $r(B)=2\Rightarrow r(A)=1$ $n-r(A)=2$

$(1,2,3)^T$ 和 $(3,6,k)^T$ 构成基础解系

（注：$(1,2,0)^T$ 和 $(0,0,1)^T$ 也构成基础解系！

由于 $(3,6,k)^T-3(1,2,3)^T=(0,0,k-9)^T$ 是解，故 $(0,0,1)^T$ 也是解

$(1,2,0)^T=(1,2,3)^T-3(0,0,1)^T$ 也是解）

⑵ $k=9$，则 $r(B)=1$，得 $r(A)=1$ 或 2

① $r(A)=2$，则 $n-r(A)=1$，$(1,2,3)^T$ 是基础解系

② $r(A)=1$ 则 $n-r(A)=2$

$$A=\begin{pmatrix}a&b&c\\\times&\times&\times\\\times&\times&\times\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}a&b&c\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$AX=0$ 与 $ax_1+bx_2+cx_3=0$ 同解

$(b,-a,0)^T$，$(c,0,-a)^T$ 都是解，取其中非零解与 $(1,2,3)^T$ 构成基础解系

（注：因为 $(1,2,3)^T$ 是解，$a+2b+3c=0$, a, b, c 中不能有两个为 0

所以 $(b,-a,0)^T$，$(c,0,-a)^T$ 都非零解）

问题：是否可以用 $(b,-a,0)^T$，$(c,0,-a)^T$ 构成基础解系

答案：可能有危险

例 18 设(Ⅰ)和(Ⅱ)是两个四元齐次线性方程组,(Ⅰ)为 $\begin{cases}x_1+x_2=0\\x_3-x_4=0\end{cases}$

(Ⅱ)有一个基础解系 $(0,1,1,0)^T,(-1,2,2,1)^T$. 求(Ⅰ)和(Ⅱ)的全部公共解.

思路：用(Ⅱ)的基础解系

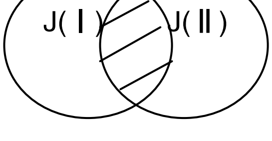
$c_1(0,1,1,0)^T+c_2(-1,2,2,1)^T=(-c_2,c_1+2c_2,c_1+2c_2,c_2)^T$

代入(Ⅰ)得 $c_1+c_2=0$

即公解为：$c_1(0,1,1,0)^T-c_1(-1,2,2,1)^T=c_1(1,-1,-1,-1)^T$

用(Ⅱ)的基础解系,写出方程组，然后联立(Ⅰ)求解

例 19 设(Ⅰ)和(Ⅱ)是两个四元齐次线性方程组,(Ⅲ)是将它们合并而得到的方程组. 已知 $(1,0,1,1)^T,(-1,0,1,0)^T,(0,1,1,0)^T$ 是(Ⅰ)的一个基础解系, $(0,1,0,1)^T,(1,1,-1,0)^T$ 是(Ⅱ)的一个基础解系. 求(Ⅲ)的通解.



新东方在线 www.koolearn.com 网络课堂电子教材系列

思路：从(Ⅱ)的通解$\eta = c_1\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}1\\1\\-1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}c_2\\c_1+c_2\\-c_2\\c_1\end{pmatrix}$,$c_1,c_2$任意

η是公共解$\Leftrightarrow$ $\eta\to$(Ⅰ)的基础解系

$\eta_1,\eta_2,\eta_3 \Leftrightarrow r(\eta_1,\eta_2,\eta_3,\eta)=r(\eta_1,\eta_2,\eta_3)=3$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&-1&0&c_2\\0&0&1&c_1+c_2\\1&1&1&-c_2\\1&0&0&c_1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&0&c_1\\0&1&0&c_1-c_2\\0&0&1&c_1+c_2\\0&0&0&-c_2-3c_1\end{array}\right)$$

公解为$c_1\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix}-3c_1\begin{pmatrix}1\\1\\-1\\0\end{pmatrix}=c_1\begin{pmatrix}-3\\-2\\3\\1\end{pmatrix}$， c_1任意

例 17 设(Ⅰ)和(Ⅱ)是两个四元齐次线性方程组,(Ⅰ)的系数矩阵为

$$\begin{pmatrix}2&3&-1&0\\1&2&1&-1\end{pmatrix}$$

(Ⅱ)的一个基础解系为(2, −1, a+2, 1)^T, (−1, 2, 4, a+8)^T. 已知(Ⅰ)和(Ⅱ)有公共非零解,求 a, 并求出它们的全部公共解. (02 四)

设$\eta_1=(2,-1,a+2,1)^T$， $\eta_2=(-1,2,4,a+8)^T$

(Ⅰ)和(Ⅱ)有公共非零解

$\Leftrightarrow$ 存在c_1， c_2不全为 0，使得$c_1\eta_1+c_2\eta_2$ 也是(Ⅰ)的解

$\Leftrightarrow$ 存在c_1， c_2不全为 0，使得$A(c_1\eta_1+c_2\eta_2)=0$

$\Leftrightarrow$ 存在c_1， c_2不全为 0，使得$c_1A\eta_1+c_2A\eta_2=0$

$\Leftrightarrow$ $A\eta_1$， $A\eta_2$线性相关

$$A\eta_1=\begin{pmatrix}2&3&-1&0\\1&2&1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\-1\\a+2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-(a+1)\\a+1\end{pmatrix}$$

$$A\eta_2=\begin{pmatrix}2&3&-1&0\\1&2&1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\2\\4\\a+8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\-(a+1)\end{pmatrix}$$

$A\eta_1$与$A\eta_2$相关$\Leftrightarrow$ $a=-1$

即$A\eta_1=0$， $A\eta_2=0$，则(Ⅱ)的解都满足(Ⅰ)

公共解为： $c_1\eta_1+c_2\eta_2,c_i$任意

例 23 已知齐次方程组

$$\begin{cases}x_1+2x_2+3x_3=0\\2x_1+3x_2+5x_3=0\\x_1+x_2+ax_3=0\end{cases}\text{ 和 }\begin{cases}x_1+bx_2+cx_3=0\\2x_1+b^2x_2+(c+1)x_3=0\end{cases}$$

新东方在线 www.koolearn.com 网络课堂电子教材系列

同解, 求 a, b, c.

解出没有参数的方程组的解，代入到另外一个方程中

两个齐次方程组同解应满足什么条件?

两个系数矩阵的秩一样 $r(A)=r(B)$

思路一：求出一个方程组的解代入另一个，决定 a, b, c

先决定系数矩阵的秩，$2\le r(A)=r(B)\le 2$，$r(A)=r(B)=2$

求 a

思路二：$AX=0$ 与 $BX=0$ 同解 $\Rightarrow \begin{cases} AX=0 \\ BX=0 \end{cases}$ 与原方程也同解

$$r\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}=2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & a \\ 1 & b & c \\ 2 & b^2 & c+1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & a-3 \\ 0 & b-2 & c-3 \\ 0 & b^2-4 & c-5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & a-2 \\ 0 & 0 & c-b-1 \\ 0 & 0 & c-b^2-1 \end{pmatrix}$$

得 $a=2$，$c=b+1$，$b=b^2$

$a=2$，$b=0$，$c=1$，此时 $r(B)=1$ 排除

$a=2$，$b=1$，$c=2$，此时 $r(B)=2$ √

第六讲 特征向量和特征值 相似和对角化

一. 特征向量和特征值

1. 定义

设 A 是 n 阶矩阵. 一个非零 n 维向量 η 称为 A 的**特征向量**，如果 $A\eta$ 与 η 线性相关. 此时，存在唯一数 λ，使得

$$A\eta=\lambda\eta,$$

称 λ 为 η 的**特征值**.

$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$，$\alpha_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$，$\alpha_2=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$，$\alpha_3=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$，$\alpha_4=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$，

$A\alpha_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$，$A\alpha_2=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$，$A\alpha_3=\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$，$A\alpha_4=\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$，

例如对于数量矩阵 λE，任何非零向量都是它的特征向量，特征值都是 λ.

2006 考题

设 3 阶实对称矩阵 A 的各行元素之和都为 3, 向量 $\alpha_1=(-1,2,-1)^T$，$\alpha_2=(0,-1,1)^T$ 都是齐次线性方程组 $AX=0$ 的解. 求 A 的特征值和特征向量.

令 $\alpha_3=(1,1,1)^T$, 则 $A\alpha_3=(3,3,3)^T=3\alpha_3$.

2008 考题

新东方在线 www.koolearn.com 网络课堂电子教材系列

A 是 2 阶矩阵, α_1,α_2 线性无关, $A\alpha_1=0, A\alpha_2=2\alpha_1+\alpha_2$. 则 A 的非零特征值为______.

$A(2\alpha_1+\alpha_2)=2\alpha_1+\alpha_2$

2009 考题

3 维列向量 α,β, 满足 $\alpha^T\beta=2$, 则矩阵 $\beta\alpha^T$ 的非 0 特征值为________.

$$\beta\alpha^T\beta=\beta\left(\alpha^T\beta\right)=2\beta.$$

2. 特征向量的性质

命题 1 如果 η 是 A 的特征向量，特征值为 λ，即 $A\eta=\lambda\eta$，则

① $\boldsymbol{\eta}$ 也是 A 的任何多项式 $f(A)$ 的特征向量，特征值为 $f(\lambda)$；

② 如果 A 可逆，则 $\lambda\neq0$, 并且 $\boldsymbol{\eta}$ 也是 A^{-1} 和 A^* 的特征向量，特征值分别为 $1/\lambda$ 和 $|A|/\lambda$.

① A 是 3 阶称矩阵, $\alpha=(1,-1,1)^T$ 是 A 的属于 λ 的特征向量. 记 $B=A^5-4A^3+E$

验证 α 也是 B 的特征向量.

$A\alpha=\lambda\alpha$,

$B\alpha=A^5\alpha-4A^3\alpha+\alpha=\lambda^5\alpha-4\lambda^3\alpha+\alpha=\left(\lambda^5-4\lambda^3+1\right)\alpha$,

② $A\boldsymbol{\eta}=\lambda\boldsymbol{\eta}\Rightarrow\boldsymbol{\eta}=\lambda A^{-1}\boldsymbol{\eta}\Rightarrow A^{-1}\boldsymbol{\eta}=\boldsymbol{\eta}/\lambda$.

$A^*\boldsymbol{\eta}=|A|A^{-1}\boldsymbol{\eta}=(|A|/\lambda)\boldsymbol{\eta}$.

A 可逆时, A, A^{-1} 和 A^* 的特征向量完全一样.

命题 2 设 $\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2$ 都是 A 的特征向量, 特征值为 λ_1, λ_2，证明:

①如果 $\lambda_1=\lambda_2$，则 $\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2$ 的任何非零线性组合都是 A 的特征向量, 特征值也为 λ_1.

②如果 $\lambda_1\neq\lambda_2$，则 $\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2$ 线性无关.

①$A(c_1\boldsymbol{\eta}_1+c_2\boldsymbol{\eta}_2)=c_1A\boldsymbol{\eta}_1+c_2A\boldsymbol{\eta}_2=\lambda_1c_1\boldsymbol{\eta}_1+\lambda_2c_2\boldsymbol{\eta}_2)=\lambda_1(c_1\boldsymbol{\eta}_1+c_2\boldsymbol{\eta}_2)$.

②否则, 设 $\boldsymbol{\eta}_2=c\boldsymbol{\eta}_1$, 则 $A\boldsymbol{\eta}_2=cA\boldsymbol{\eta}_1=\lambda_1c\boldsymbol{\eta}_1=\lambda_1\boldsymbol{\eta}_2$,

定理 A 的一组特征向量 $\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2, \cdots, \boldsymbol{\eta}_s$ 线性无关 $\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2, \cdots, \boldsymbol{\eta}_s$ 的每个属于同一特征值的部分组都线性无关.

$\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2(\lambda_1)$, $\boldsymbol{\eta}_3, \boldsymbol{\eta}_4, \boldsymbol{\eta}_5(\lambda_2)$, $\lambda_1\neq\lambda_2$.

例 22 设 λ_1, λ_2 是 A 的两个不同特征值, α_1,α_2 分别是对应的特征向量, 则 α_1, $A(\alpha_1+\alpha_2)$ 线性无关的充分必要条件为

(A) $\lambda_1\neq0$. (B) $\lambda_2\neq0$. (C) $\lambda_1=0$. (D) $\lambda_2=0$. (2005 年)

(看题解)

解: $A(\alpha_1+\alpha_2)=\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2$

$$\begin{pmatrix}1 & \lambda_1\\ 0 & \lambda_2\end{pmatrix}$$

2008 年

已知 α_1, α_2 都是 3 阶矩阵 A 的特征向量, 特征值分别为-1 和 1, 又 3 维向量 α_3 满足 $A\alpha_3=\alpha_2+\alpha_3$. 证明 α_1, α_2, α_3 线性无关.

新东方在线 www.koolearn.com 网络课堂电子教材系列

例 3

已知$\alpha=(1,1,-1)^T$是 $\begin{pmatrix}2&-1&2\\5&a&3\\-1&b&-2\end{pmatrix}$的特征向量 ，求 a, b 和$\alpha$的特征值.

解：$\begin{pmatrix}2&-1&2\\5&a&3\\-1&b&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\2+a\\1+b\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$，

得$\begin{cases}-1=\lambda\\2+a=\lambda\\1+b=-\lambda\end{cases}$

求出 $\lambda=-1$，$a=-3$，$b=0$

例 4

已知$\alpha=\begin{pmatrix}1\\b\\1\end{pmatrix}$是可逆矩阵$A=\begin{pmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&a\end{pmatrix}$的伴随矩阵特征向量，特征值$\lambda$. 求 a, b, λ.（03）

解：α**也是**$A=\begin{pmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&a\end{pmatrix}$的特征向量。

$A\alpha=\begin{pmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\b\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3+b\\2+2b\\1+a+b\end{pmatrix}$，它和$\begin{pmatrix}1\\b\\1\end{pmatrix}$线性相关，得

$\begin{cases}3+b=1+a+b\\3+b=(2+2b):b\end{cases}$，

得$a=2, b^2+3b=2+2b,\qquad b=1$或$-2$

$A=\begin{pmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&2\end{pmatrix},|A|=4$

$b=1$**时，** $A\alpha=\begin{pmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\4\\4\end{pmatrix}=4\alpha,\quad \lambda=\frac{|A|}{4}=1.$

$b=-2$ **时，** $A\alpha=\begin{pmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}=\alpha,\quad \lambda=\frac{|A|}{1}=4.$

新东方在线 www.koolearn.com 网络课堂电子教材系列

例 6 设 3 阶矩阵 A 有 3 个特征向量 $\eta_1=(1,2,2)^{\mathrm T}$，$\eta_2=(2,-2,1)^{\mathrm T}$，$\eta_3=(-2,-1,2)^{\mathrm T}$，它们的特征值依次为 1, 2, 3, 求 A.（97 四）

解：建立矩阵方程：

$$A(\eta_1,\ \eta_2,\ \eta_3)=(A\eta_1,\ A\eta_2,\ A\eta_3)=(\eta_1,2\eta_2,3\eta_3).$$

$$A\begin{pmatrix}1&2&-2\\2&-2&-1\\2&1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&4&-6\\2&-4&-3\\2&2&6\end{pmatrix}\to\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&\frac{7}{3}&0&-\frac{2}{3}\\0&1&0&0&\frac{5}{3}&-\frac{2}{3}\\0&0&1&-\frac{2}{3}&-\frac{2}{3}&2\end{array}\right)$$

$$A=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}7&0&-2\\0&5&-2\\-2&-2&6\end{pmatrix}$$

例 7　设 3 阶矩阵 A 有 3 个特征向量 $\eta_1=(1,1,1)^T$，$\eta_2=(1,2,4)^T$，$\eta_3=(1,3,9)^T$，它们的特征值依次为 1, 2, 3. 又设 $\alpha=(1,1,3)^T$，将 α 用 η_1,η_2,η_3 线性表示，并且求 $A^n\alpha$.

解：$x_1\eta_1+x_2\eta_2+x_3\eta_3=\alpha$

$$(\eta_1,\eta_2,\eta_3|\alpha)=\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&1\\1&2&3&1\\1&4&9&3\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&1\\0&1&2&0\\0&2&6&2\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&0&2\\0&1&0&-2\\0&0&1&1\end{array}\right)$$

$$\alpha=2\eta_1-2\eta_2+\eta_3$$

$$A^n\alpha=2A^n\eta_1-2A^n\eta_2+A^n\eta_3=2\eta_1-2^{n+1}\eta_2+3^n\eta_3=\begin{pmatrix}2-2^{n+1}+3^n\\2-2^{n+2}+3^{n+1}\\2-2^{n+3}+3^{n+2}\end{pmatrix}$$

3. 计算特征值和特征向量的一般公式

$\boldsymbol\eta$ 是 A 的特征向量, 特征值为 $\lambda\Leftrightarrow A\boldsymbol\eta=\lambda\boldsymbol\eta$, $\boldsymbol\eta\neq0$

$\Leftrightarrow(A-\lambda E)\boldsymbol\eta=0$, $\boldsymbol\eta\neq0$

$\Leftrightarrow\eta$ 是齐次方程组 $(A-\lambda E)X=0$ 的非零解.

命题　①λ 是 A 的特征值 $\Leftrightarrow|A-\lambda E|=0$，即 $(A-\lambda E)$ 不可逆.

②$\boldsymbol\eta$ 是属于 λ 的特征向量 $\Leftrightarrow\boldsymbol\eta$ 是齐次方程组 $(A-\lambda E)X=0$ 的非零解.

规定 A 的**特征多项式**为 $|\lambda E-A|$，则 A 的特征值就是它的特征多项式的根.

计算特征值和特征向量的具体步骤为：

i. 计算 A 的特征多项式.

ii. 求出它的根，即 A 的特征值.

新东方在线 www.koolearn.com 网络课堂电子教材系列

iii. 然后对每个特征值λ_i，求齐次方程组$(A-\lambda_i E)X=0$的非零解，即属于λ_i的特征向量.

说明 ① n阶矩阵的特征多项式是一个n次多项式，一般来说求它的根是困难的，因此上述计算步骤 ii 并不总是可行的，只能用在少数特殊矩阵上. 例如用于对角矩阵和三角矩阵，得出它们的特征值就是对角线上的元素.

$A=\begin{pmatrix}\lambda_1 & * & * \\ 0 & \lambda_2 & * \\ 0 & 0 & \lambda_3\end{pmatrix}$，则

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-\lambda_1 & -* & -* \\ 0 & \lambda-\lambda_2 & -* \\ 0 & 0 & \lambda-\lambda_3\end{vmatrix}=(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)(\lambda-\lambda_3),$$

②n 阶矩阵A的特征值共有 n 个(其中有的相同，有的是虚数)，规定特征值λ的**重数**：即λ作为特征多项式的根的重数. A的全体不同特征值的重数和等于 n.

③ λ不是A的特征值$\Leftrightarrow|A-\lambda E|\neq 0\Leftrightarrow A-\lambda E$可逆.

0 不是A的特征值$\Leftrightarrow A$可逆.

4. 特征值的性质和计算

设A是 n 阶矩阵，记 A的全体特征值为$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$. 则

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-a_{11} & -a_{12} & -a_{13} \\ -a_{21} & \lambda-a_{22} & -a_{23} \\ -a_{31} & -a_{32} & \lambda-a_{33}\end{vmatrix}=(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)(\lambda-\lambda_3)$$

命题 1 ① $\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n=|A|$.

② $\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n=a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn}=tr(A)$ (A的迹数).

①令$\lambda=0$，左$=|-A|=(-1)^n|A|$，右$=(-1)^n|\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n|$.

②比较两边λ^{n-1}的系数.

命题 2 设λ是 n 阶矩阵A的特征值，则它的重数$\geq n-r(A-\lambda E)$.

应用：如果 n 阶矩阵A的秩 $r(A)=1$，$(n>1)$，则 0 是A的特征值，并且重数$\geq n-r(A)=n-1$. 于是A的特征值为 0, 0, …, 0, $tr(A)$.

$$\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\end{pmatrix}$$

命题 3 ①$f(A)$的特征值是$f(\lambda_1)$，$f(\lambda_2)$，…，$f(\lambda_n)$.

②如果A可逆，则A^{-1}的特征值是$\frac{1}{\lambda_1}$，$\frac{1}{\lambda_2}$，…，$\frac{1}{\lambda_n}$；

新东方在线 www.koolearn.com 网络课堂电子教材系列

$$A^*\text{的特征值是}\frac{|A|}{\lambda_1},\frac{|A|}{\lambda_2},\cdots,\frac{|A|}{\lambda_n}.$$

③ A^T 的特征值也是 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$.

$$|A^T-\lambda E|=|(A-\lambda E)^T|=|A-\lambda E|.$$

例如 $A+cE$ 的特征值是 λ_1+c，λ_2+c，$\cdots$，λ_n+c.

例 2

求矩阵 $\begin{pmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a \end{pmatrix}$ 的特征值和特征向量.（92）

解：$\begin{pmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}+(a-1)E$.

例 12

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}+E.$$

例 16 设 n 阶矩阵

$$A=\begin{pmatrix} 1 & b & \cdots & b \\ b & 1 & \cdots & b \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b & b & \cdots & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} b & b & \cdots & b \\ b & b & \cdots & b \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b & b & b & b \end{pmatrix}+(1-b)E.$$

求 A 的特征值和特征向量.

2009 年题

$$A=\begin{pmatrix} a & 0 & 1 \\ 0 & a & -1 \\ 1 & -1 & a-1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}+aE.$$

例 1

设 $A=\begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & -2 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$，求 A 和 $A^{-1}+E$ 的特征值.

新东方在线 www.koolearn.com 网络课堂电子教材系列

解：设 $A=\begin{pmatrix}\Delta & 2 & 2\\ 2 & \Delta & -2\\ 2 & -2 & \Delta\end{pmatrix}+\Delta E$，

推论

如果 A 的一个多项式 $f(A)=0$，则 A 的每个特征值 λ 都满足 $f(\lambda)=0$.

$$A^2-A+5E=0 \qquad \lambda^2-\lambda+5=0$$

2008 题

1. 设 A 是 n 阶非零矩阵，E 是 n 阶单位矩阵，若 $A^3=0$，则（　　）.

(A) $E-A$ 不可逆，$E+A$ 不可逆.

(B) $E-A$ 不可逆，$E+A$ 可逆.

(C) $E-A$ 可逆，$E+A$ 可逆.

(D) $E-A$ 可逆，$E+A$ 不可逆.

5. 设 3 阶矩阵 A 的特征值为 2, 3, λ. 如果 $|2A|=-48$，则 $\lambda=$______.

解：$|2A|=8|A|$，$|A|=-6$

$\therefore 2\times3\times\lambda=-6$，$\lambda=-1$

6. A 是 3 阶矩阵，特征值为 1, 2, 2. 则 $|4A^{-1}-E|=$______.

解：A 的特征值为 1、2、2，则 A^{-1} 的特征值为 1、$\frac{1}{2}$、$\frac{1}{2}$，$4A^{-1}-E$ 的特征值为 3、1、1，$|4A^{-1}-E|=3$。（或用 $A(4A^{-1}-E)=4E-A$，$4E-A$ 的特征值为 3、2、2，$|A||4A^{-1}-E|=|4E-A|=12$，$|4A^{-1}-E|=\frac{12}{|A|}=\frac{12}{4}=3$。）

7. A 是 3 阶矩阵，它的特征值互不相等，并且 $|A|=0$，则 $r(A)=$________.

解：0 是 A 的一重特征值，则 $1\geq 3-r(A)$，$1=3-r(A)\Rightarrow r(A)=2$

例 8　已知 3 阶矩阵 A 满足 $|A+E|=|A-E|=|4E-2A|=0$，求 $|A^3-5A^2|$.

解：条件说明 A 的特征值为−1、1、2，A^3-5A^2 的特征值为

−1−5=−6，1−5=−4，8−20=−12，$|A^3-5A^2|$=−288.

例 9　设 $\alpha=(1,2,-1)^T$，$\beta=(-2,1,-2)^T$，$A=E-\alpha\beta^T$. 求 $|A^2-2A+2E|$.

解：$\alpha\beta^T$ 的秩为 1，其特征值为 0，0，$\beta^T\alpha=2$

$A=E-\alpha\beta^T$ 的特征值为 1，1，−1

$A^2-2A+2E$ 的特征值为 1，1，5

$|A^2-2A+2E|=5$。

新东方在线 www.koolearn.com 网络课堂电子教材系列

例 10　设 4 阶矩阵 A 满足 $A^3 = A$.

(1)证明 A 的特征值不能为 0, 1, 和−1 以外的数.

(2)如果 A 还满足$|A+E|=8$, 求$|A^2+E|$.

解：(1)A 的特征值λ满足$\lambda^3=\lambda$，即在 0、1、-1 中取；

(2)A+E 的特征值在 1、2、0 中取，

$|A+E|=8 \Rightarrow$ A+E 的特征值为 1、2、2、2，

A 的特征值为 0、1、1、1，

A^2+E 的特征值也是 1、2、2、2，

$|A^2+E|=8$。

例 11 已知 n 阶矩阵 A 满足 $A^3 = E$.

(1)证明 $A^2-2A-3E$ 可逆.

(2)证明 A^2+A+2E 可逆.

解：A 的特征值满足 $\lambda^3=1$

(1) $A^2-2A-3E=(A-3E)(A+E)$, 3 和−1 都不满足 $\lambda^3=1$, 都不是 A 的特征值, 从而 A-3E, A+E 都可逆， $A^2-2A-3E$ 可逆。

(2)思路：说明 A^2+A+2E 的特征值都不为 0，

记 A 的特征值为λ_1，λ_2，$\cdots\lambda_n$，则 A^2+A+2E 的特征值为$\lambda_i^2+\lambda_i+2$，i=1，2，…n，

$\lambda_i^3=1 \Leftrightarrow \lambda_i=1$ 或满足 $\lambda_i^2+\lambda_i+1=0 \Rightarrow \lambda_i^2+\lambda_i+2=4$ 或 1.

二. n 阶矩阵的相似关系

设 A, B 是两个 n 阶矩阵, 如果存在 n 阶可逆矩阵 P, 使得 $P^{-1}AP=B$, 则称 A 与 B 相似, 记作 $A \sim B$.

矩阵的相似关系有对称性和传递性, 即 $A \sim B \Leftrightarrow B \sim A$； 如果 $A \sim B$, $B \sim C$, 则 $A \sim C$.

当 P 和 A 乘积不可交换时, B 不等于 A;但是如果 A 是数量矩阵, 则只和自己相似.

当 $A \sim B$ 时， $f(A) \sim f(B)$，在 A 可逆时 $A^{-1} \sim B^{-1}$， $A^* \sim B^*$.（事实上，如果 $P^{-1} f(A) P= f($, 则 $P^{-1}A^{-1}P=B^{-1}$， $P^{-1}A^*P=B^*$.）

当两个矩阵 A, B 相似时, 它们有许多相同的性质:

①$|A|=|B|$.

$|B|=|P^{-1}AP|=|P^{-1}||A||P|=|A|$.

② r(A)=r(B).

③ A, B 有相同的特征多项式, 从而特征值完全相同.

$|\lambda E-B|=|\lambda E-P^{-1}AP|=|P^{-1}(\lambda E-A)P|=|P^{-1}||\lambda E-A||P|=|\lambda E-A|$.

新东方在线 www.koolearn.com 网络课堂电子教材系列

④ η是 A 的特征向量⇔ $P^{-1}\eta$是 B 的特征向量.

$A\eta=\lambda\eta \Leftrightarrow BP^{-1}\eta=P^{-1}APP^{-1}\eta=\lambda P^{-1}\eta$.

例 12

设 $A=\begin{pmatrix}3&2&2\\2&3&2\\2&2&3\end{pmatrix}$, $U=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&1\\0&0&1\end{pmatrix}$, $B=U^{-1}A^{*}U$. 求 $B+2E$ 的特征值和特征向量. (03)

解：(1)求特征值 $A=\begin{pmatrix}3&2&2\\2&3&2\\2&2&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&2&2\\2&2&2\\2&2&2\end{pmatrix}+E$

则 A 的特征值为 1、1、7，$|A|=7$

A^{*}的特征值为 7、7、1，

B 的特征值为 7、7、1，

B+2E 的特征值为 9、9、3.

(2)求特征向量

属于 9 的：和 A 属于 1 的特征向量的关系：

$A\eta=\eta \Leftrightarrow A^{*}\eta=7\eta \Leftrightarrow B(U^{-1}\eta)=7(U^{-1}\eta) \Leftrightarrow (B+2E)U^{-1}\eta=9U^{-1}\eta$

属于 3 的和 A 属于 7 的关系同上

求 A 属于 1 的特征向量：$A-E\to\begin{pmatrix}1&1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$，$(A-E)X=0$ 的基础解系 $\eta_1=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$，

$\eta_2=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$，$c_1\eta_1+c_2\eta_2$，$c_1$，$c_2$ 不全为 0，则 B+2E 的属于 9 的特征向量为 $c_1U^{-1}\eta_1+c_2U^{-1}\eta_2$，$c_1$，$c_2$ 不全为 0；

求 A 属于 7 的特征向量：$A-7E=\begin{pmatrix}-4&2&2\\2&-4&2\\2&2&-4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&-1\\0&0&0\end{pmatrix}$

$(A-7E)X=0$ 的基础解系：$\eta_3=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$，

B+2E 属于 3 的特征向量为 $cU^{-1}\eta_3$，$c\neq 0$ 。

附：求 $U^{-1}\eta_1$，$U^{-1}\eta_2$，$U^{-1}\eta_3$ 的方法：

记 $r_i=U^{-1}\eta_i$，即 $Ur_i=\eta_i$，

新东方在线 www.koolearn.com 网络课堂电子教材系列

建立矩阵方程$U(r_1,r_2,r_3)=(\eta_1,\eta_2,\eta_3)$

$$(U\mid\eta_1,\eta_2,\eta_3)=\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&-1&1&0\\0&1&0&1&1&1\\0&0&1&0&-1&1\end{array}\right)$$

$$r_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix},\quad r_2=\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix},\quad r_3=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}。$$

三. n 阶矩阵的对角化问题

如果一个 n 阶矩阵相似于一个对角矩阵,就说它可以**对角化**.

并不是每个矩阵都可以对角化的,

例 $\begin{pmatrix}1&2&2\\0&1&2\\0&0&1\end{pmatrix}$

我们的问题是:

(1)判断一个 n 阶矩阵 A 是否可对角化.(判断问题)

(2)如果可以,怎么构造可逆矩阵 P,使得 $P^{-1}AP$ 是对角矩阵?(实现方法)

可逆矩阵 $P=(\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_3)$使得 $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}\lambda_1&0&0\\0&\lambda_2&0\\0&0&\lambda_3\end{pmatrix}\Leftrightarrow$

$$AP=P\begin{pmatrix}\lambda_1&0&0\\0&\lambda_2&0\\0&0&\lambda_3\end{pmatrix}\Leftrightarrow$$

$$(A\eta_1,A\eta_2,A\eta_3)=(\lambda_1\eta_1,\lambda_2\eta_2,\lambda_3\eta_3)\Leftrightarrow A\eta_1=\lambda_1\eta_1,A\eta_2=\lambda_2\eta_2,A\eta_3=\lambda_3\eta_3。$$

判别法则 1 n 阶矩阵 A 可对角化$\Leftrightarrow A$ 有 n 个线性无关的特征向量.

实现方法 1 以 A 的 n 个线性无关的特征向量η_1, η_2, $\cdots$, η_n 为列向量,构造矩阵 $P=(\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n)$,则 $P^{-1}AP$ 是对角矩阵.

判别法则 2 A 可对角化$\Leftrightarrow$对于 A 的每个特征值λ_i,其重数 $k_i=n-r(A-\lambda_iE)$.

n=6, A 的特征值λ_1(二重), λ_2(三重), λ_3(一重).

求$(A-\lambda_1E)X=0$ 的基础解系$\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2$, 求$(A-\lambda_2E)X=0$ 的基础解系$\boldsymbol{\eta}_3,\boldsymbol{\eta}_4,\boldsymbol{\eta}_5$, 求$(A-\lambda_3E)X=0$ 的基础解系$\boldsymbol{\eta}_6$,则 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_3,\boldsymbol{\eta}_4,\boldsymbol{\eta}_5,\boldsymbol{\eta}_6$线性无关 .

实现方法 2 对 A 的每个特征值λ_i,求$(A-\lambda_iE)X=0$ 的基础解系,合在一起,就是 A 的 n 个线性无关的特征向量. 用它们构造矩阵 P.

新东方在线 www.koolearn.com 网络课堂电子教材系列

注意:当 $k_i=1$ 时, $k_i=n-r(A-\lambda_i E)$ 一定成立!

推论 如果 A 的特征值两两不相同,则 A 可以对角化.

2008 年题 A 是 3 阶矩阵,它的特征值互不相等,并且 $|A|=0$,则 $r(A)=$________.
解:A 可以对角化,并且对角线是的元素中有一个 0,两个非 0,秩为 2.

例 15 设 α, β 都是 n 维非零列向量, $A=\alpha\beta^T$,证明:

(1) A 的特征值为 $0,0,\cdots,0,\beta^T\alpha$.

(2) α 是 A 的属于特征值 $\beta^T\alpha$ 的特征向量.

(3) A 相似于对角矩阵 $\Leftrightarrow \beta^T\alpha\neq 0$.

$A\alpha=\alpha\beta^T\alpha=(\beta^T\alpha)\alpha$.

例 14 已知 3 阶矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&2&-3\\-1&4&-3\\1&a&5\end{pmatrix}$ 有一个二重特征值,求 a,并讨论 A 可否对角化.(04 一二)

解:$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1&-2&3\\1&\lambda-4&3\\-1&-a&\lambda-5\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda-2&2-\lambda&0\\1&\lambda-4&3\\-1&-a&\lambda-5\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda-2&0&0\\1&\lambda-3&3\\-1&-a-1&\lambda-5\end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-2)(\lambda^2-8\lambda+18+3a)$$

(1)求 a

i)2 是二重特征值,即 2 也是 $\lambda^2-8\lambda+18+3a$ 的根,得 a=-2;

ii)2 不是二重特征值,则 $\lambda^2-8\lambda+18+3a$ 是平方式 $(\lambda-4)^2$,a=$-\frac{2}{3}$.

(2)判断可否对角化

a=-2 时,对二重特征值 2 检查,

$A=\begin{pmatrix}1&2&-3\\-1&4&-3\\1&-2&5\end{pmatrix}$,2 是否=3-r(A-2E)即 r(A-2E)是否=1,

$A-2E=\begin{pmatrix}-1&2&-3\\-1&2&-3\\1&-2&3\end{pmatrix}$,r(A-2E)=1,此时可对角化;

a=$-\frac{2}{3}$ 时,对二重特征值 4 检查,

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -3\\ -1 & 4 & -3\\ 1 & -\frac{2}{3} & 5\end{pmatrix},\quad A-4E=\begin{pmatrix}-3 & 2 & -3\\ -1 & 0 & -3\\ 1 & -\frac{2}{3} & 1\end{pmatrix},\quad r(A-4E)>1，不可对角化。$$

(3) 在 a=−2 时，构造可逆矩阵 P，使 $P^{-1}AP$ 是对角矩阵，

对特征值 2：$A-2E\to\begin{pmatrix}1 & -2 & 3\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$

$(A-2E)X=0$ 与 $x_1-2x_2+3x_3=0$ 同解，求出基础解系 $\eta_1=\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}$，$\eta_2=\begin{pmatrix}0\\3\\2\end{pmatrix}$

对特征值 6：$A-6E\to\begin{pmatrix}-5 & 2 & -3\\ -1 & -2 & -3\\ 1 & -2 & -1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & -2 & -1\\ 0 & -4 & -4\\ 0 & -8 & -8\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$

$(A-6E)X=0$ 与 $\begin{cases}x_1+x_3=0\\ x_2+x_3=0\end{cases}$ 同解，求出一个非零解 $\eta_3=\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$，

令 $P=(\eta_1,\eta_2\eta_3)=\begin{pmatrix}2 & 0 & 1\\ 1 & 3 & 1\\ 0 & 2 & -1\end{pmatrix}$，则 $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 6\end{pmatrix}$。

例 21 设 A 为 3 阶矩阵，α_1，α_2，α_3 是线性无关的 3 维列向量组，满足 $A\alpha_1=\alpha_1+\alpha_2+\iota$，$A\alpha_2=2\alpha_2+\alpha_3$，$A\alpha_3=2\alpha_2+3\alpha_3$.

(1) 求 A 的特征值.

(2) 求作可逆矩阵 P, 使得 $P^{-1}AP$ 为对角矩阵. (2005 年数学四)

解：$A(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3,2\alpha_2+\alpha_3,2\alpha_2+3\alpha_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & 2 & 2\\ 1 & 1 & 3\end{pmatrix}$

令 $B=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & 2 & 2\\ 1 & 1 & 3\end{pmatrix}$，$U=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$，则 $U^{-1}AU=B$，A～B ；

（1）A～B 则 A 与 B 的特征值相同，求 B 的特征值

$$|\lambda E-B|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & 0 & 0\\ -1 & \lambda-2 & -2\\ -1 & -1 & \lambda-3\end{vmatrix}=(\lambda-1)(\lambda^2-5\lambda+4)=(\lambda-1)^2(\lambda-4)$$

特征值为 1、1、4，即 A 的特征值也为 1、1、4.

新东方在线 www.koolearn.com 网络课堂电子教材系列

（2）先把 B 对角化

对特征值 1：$B-E=\begin{pmatrix}0&0&0\\1&1&2\\1&1&2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&2\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$

$(B-E)X=0$ 与 $x_1+x_2+2x_3=0$ 同解，

求出基础解系：$\eta_1=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$，$\eta_2=\begin{pmatrix}2\\0\\-1\end{pmatrix}$；

对特征值 4：$B-4E=\begin{pmatrix}-3&0&0\\1&-2&2\\1&1&-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&-1\\0&0&0\end{pmatrix}$，

$(B-E)X=0$ 与 $\begin{cases}x_1=0\\x_2-x_3=0\end{cases}$ 同解，求出基础解系 $\eta_3=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$；

作可逆矩阵 $T=\begin{pmatrix}1&2&0\\-1&0&1\\0&-1&1\end{pmatrix}$，则 $T^{-1}BT=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&4\end{pmatrix}$，

用 $B=U^{-1}AU$ 代入，得 $T^{-1}U^{-1}AUT=\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&4\end{pmatrix}$，

令 $P=UT=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}1&2&0\\-1&0&1\\0&-1&1\end{pmatrix}=(\alpha_1-\alpha_2,2\alpha_1-\alpha_3,\alpha_2+\alpha_3)$

则 $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&4\end{pmatrix}$。

例 19

设 $A=\begin{pmatrix}3&2&-2\\-k&-1&k\\4&2&-3\end{pmatrix}$.

(1) 问 k 为何值时 A 可对角化?

(2) 此时作可逆矩阵 P, 使得 $P^{-1}AP$ 是对角矩阵. (99 四)

解：求 A 的特征值：

新东方在线 www.koolearn.com 网络课堂电子教材系列

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-3 & -2 & 2\\ k & \lambda+1 & -k\\ -4 & -2 & \lambda+3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda+1 & 0 & -\lambda-1\\ k & \lambda+1 & -k\\ -4 & -2 & \lambda+3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda+1 & 0 & 0\\ k & \lambda+1 & 0\\ -4 & -2 & \lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda+1)^2(\lambda-1)$$

特征值为 1、−1、−1，可对角化：$2=3-r(A+E)$，即 $r(A+E)=1$，

$$A+E=\begin{pmatrix}4 & 2 & -2\\ -k & 0 & k\\ 4 & 2 & -2\end{pmatrix}，\ k=0。$$

(2)略

四. 内积，正交矩阵和实对称矩阵的对角化

约定向量的分量和矩阵的元素都要求是实数(称为实向量和实矩阵).

1. 实向量的内积

定义 两个 n 维实向量 $\alpha=(a_1,a_2,\cdots a_n)^T$，$\beta=(b_1,b_2,\cdots,b_n)^T$ 的**内积**规定为：$(\alpha,\beta)=a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n=\alpha^T\beta$.

内积的性质:

(1) **正定性**: $(\alpha,\alpha)\ge 0$，并且 $(\alpha,\alpha)=0\Leftrightarrow\alpha=0$.

$$(\alpha,\alpha)=a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2.$$

(2)**对称性**: $(\alpha,\beta)=(\beta,\alpha)$.

(3) **线性性质**:

$(\alpha,\beta_1+\beta_2)=(\alpha,\beta_1)+(\alpha,\beta_2)$； $(\alpha_1+\alpha_2,\beta)=(\alpha_1,\beta)+(\alpha_2,\beta)$.

$(c\alpha,\beta)=c(\alpha,\beta)=(\alpha,c\beta)$.（c 为任意实数）

实向量 α 的**长度**: $\|\alpha\|=\sqrt{(\alpha,\alpha)}$.

显然 $\|c\alpha\|=|c|\|\alpha\|$，$\|\alpha\|=0\Leftrightarrow\alpha=0$.

如果 α 不是零向量，则 $\dfrac{\alpha}{\|\alpha\|}$ 是单位向量，称为 α 的单位化.

如果 $(\alpha,\beta)=0$，则说 α 和 β **正交.**

如果向量组 α_1，α_2，$\cdots\alpha_n$ 中的每个都是单位向量，并且两两正交，则称它们为**单位正交向量组**.

2. 正交矩阵

定义 n 阶矩阵 Q 称为**正交矩阵**，如果它是实矩阵，并且 $QQ^T=E$(即 $Q^{-1}=Q^T$).

命题 Q 是正交矩阵$\Leftrightarrow Q$ 的列向量组是单位正交向量组.

$\Leftrightarrow Q$ 的行向量组是单位正交向量组.

新东方在线 www.koolearn.com 网络课堂电子教材系列

$$Q=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad Q^TQ=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3. 施密特正交化

这是把线性无关向量组改造为单位正交向量组的方法.

以 3 个线性无关向量α_1，α_2，α_3为例.

(1)令$\beta_1=\alpha_1$，

$$\beta_2=\alpha_2-\frac{(\alpha_2,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1,\ \beta_3=\alpha_3-\frac{(\alpha_3,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1-\frac{(\alpha_3,\beta_2)}{(\beta_2,\beta_2)}\beta_2.$$

此时β_1，β_2，β_3是和α_1，α_2，α_3等价的正交非零向量组.

(2)作$\eta_1=\dfrac{\beta_1}{\|\beta_1\|}$, $\eta_2=\dfrac{\beta_2}{\|\beta_2\|}$, $\eta_3=\dfrac{\beta_3}{\|\beta_3\|}$, 则$\eta_1$，$\eta_2$，$\eta_3$是和$\alpha_1$，$\alpha_2$，$\alpha_3$等价的单位正交向量组.

4. 实对称矩阵的对角化

如果A是实对称矩阵,A的特征值和特征向量有以下特点:

(1) 特征值都是实数.

(2) 对每个特征值λ,其重数=n-r(A-λE).

即实对称矩阵可对角化,

(3) 属于不同特征值的特征向量互相正交.

可以用正交矩阵将实对称矩阵A对角化。

构造正交矩阵Q(使得$Q^{-1}AQ$是对角矩阵)的步骤:

(1)求出A的特征值;

(2)对每个特征λ,求(A-λE)X=0 的单位正交基础解系,合在一起得到A的 n 个单位正交的特征向量;

(3)用它们为列向量构造正交矩阵Q.

2007 年题

3 阶实对称矩阵 A 的特征值为 1,2,-2, $\alpha_1=(1,-1,1)^T$ 是 A 的属于 1 的特征向量.记$B=A^5-4A^3+E$.

(1)验证α_1也是B的特征向量.

(2)求B的特征值和特征向量.

(3)求B.

解：(2)B 为$A^5-4A^3+E=f(A)$， $f(x)=x^5-4x^3+1$，

A 的特征值 1、2、-2，B 的特征值-2、1、1， $B\alpha_1=-2\alpha_1$，

B 的属于-2 的特征向量为$c\alpha_1$， $c\neq 0$；

B 的属于 1 的特征向量是$(B-E)X=0$的非零解，它们又与α_1正交，从而满足$x_1-x_2+x_3=0$，$(B-E)X=0$与$x_1-x_2+x_3=0$同解，

基础解系：$\alpha_2=(1,1,0)^T$， $\alpha_3=(0,1,1)^T$，

B 的属于 1 的特征向量为$c_1\alpha_2+c_2\alpha_3$， c_1， c_2不全为 0.

新东方在线 www.koolearn.com 网络课堂电子教材系列

(3)由矩阵方程 $B(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=(-2\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ 求 B。（略）

例 23 设 3 阶实对称矩阵 A 的特征值为 1, 1, -1, $(0,1,1)^T$ 是属于-1 的特征向量, 求 A. (95 一)

例 24 设 3 阶实对称矩阵 A 的特征值为 1, 2, 3, $(1,1,-1)^T$ 和 $(-1,2,1)^T$ 分别是属于 1 和 2 的特征向量, 求属于 3 的特征向量, 并且求 A. (97 三)

例 25 设 3 阶实对称矩阵 A 的秩为 2, 又 6 是它的二重特征值, 向量 $(1,1,0)^T$ 和 $(2,1,1)^T$ 和 $(-1,2,-3)^T$ 都是属于 6 的特征向量.

(1)求 A 的另一个特征值与相应的特征向量.

(2)求 A. (04 四)

例 27 设 3 阶实对称矩阵 A 的各行元素之和都为 3, 向量 $\alpha_1=(-1,2,-1)^T$，$\alpha_2=(0,-1,1)^T$ 都是齐次线性方程组 $AX=0$ 的解.

① 求 A 的特征值和特征向量.

② 求作正交矩阵 Q 和对角矩阵 Λ，使得 $Q^TAQ=\Lambda$.

解：(1)A 的特征值为 0、0、3，属于 0 的特征向量：$c_1\alpha_1+c_2\alpha_2$，c_1，c_2 不全为 0，属于 3 的特征向量：$c\alpha_3$，$c\neq 0$。

(2) Q^TAQ 即 $Q^{-1}AQ$，对 α_1，α_2 作施密特正交化，α_1 先不动，修改 α_2，

$$\alpha_2'=\alpha_2-\frac{(\alpha_1,\alpha_2)}{(\alpha_1,\alpha_1)}\alpha_1=\alpha_2-\frac{-3}{6}\alpha_1=\alpha_2+\frac{1}{2}\alpha_1=\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}+\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1\\2\\-1\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix},$$

$$\frac{\alpha_1}{\|\alpha_1\|}=\begin{pmatrix}-\frac{\sqrt6}{6}\\ \frac{\sqrt6}{3}\\ -\frac{\sqrt6}{6}\end{pmatrix},\quad \frac{\alpha_2'}{\|\alpha_2'\|}=\begin{pmatrix}-\frac{\sqrt2}{2}\\ 0\\ \frac{\sqrt2}{2}\end{pmatrix},\quad \frac{\alpha_3}{\|\alpha_3\|}=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt3}{3}\\ \frac{\sqrt3}{3}\\ \frac{\sqrt3}{3}\end{pmatrix},$$

$$Q=\begin{pmatrix}-\frac{\sqrt6}{6} & -\frac{\sqrt2}{2} & \frac{\sqrt3}{3}\\ \frac{\sqrt6}{3} & 0 & \frac{\sqrt3}{3}\\ -\frac{\sqrt6}{6} & \frac{\sqrt2}{2} & \frac{\sqrt3}{3}\end{pmatrix},\quad Q^TAQ=Q^{-1}AQ=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&3\end{pmatrix}。$$

第七讲 二次型

一. 基本概念

1. 二次型

新东方在线 www.koolearn.com 网络课堂电子教材系列

n 个变量的二次型是它们的二次齐次多项式函数.

例如 3 元的二次型的一般形式为

$f(x_1, x_2, x_3)= a_{11}x_1^2+a_{22}x_2^2+a_{33}x_3^2+2a_{12}x_1x_2+2a_{13}x_1x_3+2a_{23}x_2x_3$.

平方项,交叉项

实二次型 如果二次型的系数都是实数,并且变量 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的变化范围也限定为实数,则称为实二次型.

标准二次型 交叉项的系数都为 0 的二次型.

规范二次型 形如 $x_1^2+\cdots+x_p^2-x_{p+1}^2\cdots-x_{p+q}^2$ 的二次型. $(p+q\le n)$

2. 二次型的矩阵

二次型可以用矩阵乘积的形式表示:

$$(x_1, \quad x_2, \quad x_3)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=$$

$$a_{11}x_1^2+a_{22}x_2^2+a_{33}x_3^2+(a_{12}+a_{21})x_1x_2+(a_{13}+a_{31})x_1x_3+(a_{23}+a_{32})x_2x_3$$

$$x_1^2+2x_2^2+2x_1x_2-2x_1x_3+2x_2x_3=(x_1 \quad x_2 \quad x_3)\begin{pmatrix} 1 & ? & ? \\ ? & 2 & ? \\ ? & ? & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

对角线外的元素不是唯一的,但是如果要求中间的矩阵对称,则是唯一确定的

$$(x_1 \quad x_2 \quad x_3)\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

把这个实对称矩阵称为**二次型的矩阵**. 并把它的秩称为二次型的秩,

如果二次型 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 的矩阵为 A, $X=(x_1, x_2, \cdots, x_n)^T$, 则

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n)= X^TAX.$$

标准二次型的矩阵为对角矩阵.

规范二次型的矩阵为规范对角矩阵.

$$\begin{pmatrix} E_p & 0 & 0 \\ 0 & -E_q & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3. 可逆线性变量替换和矩阵的合同关系

对二次型 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 引进新的变量 $y_1, y_2, \cdots, y_n$, 并且把 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 表示为它们的齐一次线性函数

$$\begin{cases} x_1 = c_{11}y_1+c_{12}y_2+\ldots+c_{1n}y_n \\ x_2 = c_{21}y_1+c_{22}y_2+\ldots c_{2n}y_n \\ \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n = c_{n1}y_1+c_{n2}y_2+\ldots c_{nn}y_n \end{cases}$$

新东方在线 www.koolearn.com 网络课堂电子教材系列

代入 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$得到 $y_1,y_2,\cdots,y_n$ 的二次型 $g(y_1,y_2,\cdots,y_n)$. 把上述过程称为对二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$作了线性变量替换,如果其中的系数矩阵

$$c=\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix}$$
是可逆矩阵,则称为**可逆线性变量替换**.

变换式可用矩阵乘积写出:

$X=CY$. 其中 $Y=(y_1,y_2,\cdots,y_n)^T$.

设 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$的矩阵为 A,则

$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=X^TAX=Y^TC^TACY$.

于是 $g(y_1,y_2,\cdots,y_n)$的矩阵为 C^TAC.

$(C^TAC)^T=C^TA^TC=C^TAC$.

定义 两个 n 阶实对称矩阵 A 和 B,如果存在可逆矩阵 C,使得 $B=C^TAC$,则称 A 和 B 合同. 记作 $A\approx B$.

二. 二次型的标准化和规范化

1.用可逆线性变量替换化把一个二次型化为标准二次型和规范二次型,称为二次型的标准化和规范化.

从矩阵的角度看,设 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=X^TAX$,就是要找逆矩阵 C,使得 C^TAC 为对角矩阵.

任何二次型都可用可逆线性变量替换化为标准二次型和规范二次型.

用矩阵的语言来表述即:任何实对称矩阵 A 都合同于对角矩阵和规范对角矩阵.

作正交矩阵 Q,使得 $Q^{-1}AQ=\Lambda$是对角矩阵.由于 $Q^{-1}=Q^T$, $Q^TAQ=\Lambda$. A 和Λ既相似又合同.

实对角矩阵总是合同于规范对角矩阵的.例如

$$\begin{pmatrix} 4&0&0&0\\0&9&0&0\\0&0&-4&0\\0&0&0&0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2&0&0&0\\0&3&0&0\\0&0&2&0\\0&0&0&1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2&0&0&0\\0&3&0&0\\0&0&2&0\\0&0&0&1 \end{pmatrix}$$

2. 标准化的方法

①**正交变换法** 对二次型的矩阵 A, 作正交矩阵 Q,使得 $Q^{-1}AQ=\Lambda$是对角矩阵,于是可逆线性变量替换 $X=QY$,把原二次型化为标准二次型.以上变换中变换矩阵 Q是正交矩阵,所以称为正交变换.

例 4 已知二次型 $2x_1^2+3x_2^2+3x_3^2+2ax_2x_3\,(a>0)$可用正交变换化为 $y_1^2+2y_2^2+5y_3^2$,求 a 和所作正交变换.(93 一)

$$A=\begin{pmatrix} 2&0&0\\0&3&a\\0&a&3 \end{pmatrix} \qquad Y=\begin{pmatrix} 1&0&0\\0&2&0\\0&0&5 \end{pmatrix}$$

$$|A|=2\left(9-a^2\right)=10, a^2=4, a=2$$

例 5 设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=X^TAX=ax_1^2+2x_2^2-2x_3^2+2bx_1x_3$, $(b>0)$其中 A 的特征值之和为 1,特征值之积为-12.

(1) 求 a,b.

(2) 用正交变换化 $f(x_1,x_2,x_3)$为标准型.(03 三)

新东方在线 www.koolearn.com 网络课堂电子教材系列

$$A=\begin{pmatrix} a & 0 & b \\ 0 & 2 & 0 \\ b & 0 & -2 \end{pmatrix} \quad a+2+(-2)=1, a=1$$

$$|A| = 2\left(-2-b^2\right) = -12, b^2 = 4, b = 2$$

求特征值;

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda-1 & 0 & 2 \\ 0 & \lambda-2 & 0 \\ 2 & 0 & \lambda+2 \end{vmatrix} = (\lambda-2)\left(\lambda^2+\lambda-6\right)$$

$$=(\lambda-2)^2(\lambda+3)$$

特征值为:2, 2, -3

例 6 已知二次型

$f(x_1, x_2, x_3)=a(x_1^2+x_2^2+x_3^2)+4x_1x_2+4x_1x_3+4x_2x_3$

可用正交变换化为 $6y_1^2$. 求 a, 并且作实现此转化的正交变换. (02 一)

$$A=\begin{pmatrix} a & 2 & 2 \\ 2 & a & 2 \\ 2 & 2 & a \end{pmatrix} \qquad Y=\begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow 3a=6, a=2$$

特征值为 6, 0, 0

求单位正交特征向量

对特征值 6 $(A-6E)X=0$

$$(A-6E)=\begin{pmatrix} -4 & 2 & 2 \\ 2 & -4 & 2 \\ 2 & 2 & -4 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$(A-6E)X=0$ 与 $\begin{cases} x_1 = x_3 \\ x_2 = x_3 \end{cases}$ 同解

$\eta_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ 为一非零解 $\quad \gamma_1 = \eta_1 / \|\eta_1\| = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} \end{pmatrix}^T$

对特征值 0 $AX=0$

$A \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad AX=0$ 与 $x_1+x_2+x_3=0$ 同解

求出基础解系 $\eta_2=\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \eta_3=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

新东方在线 www.koolearn.com 网络课堂电子教材系列

正交化 $\eta_3'=\eta_3-\dfrac{(\eta_2,\eta_3)}{(\eta_2,\eta_2)}\eta_2=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}-\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}=\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}$

单位化

$$\gamma_2=\eta_2/\|\eta_2\|=\begin{pmatrix}\dfrac{\sqrt{2}}{2} & -\dfrac{\sqrt{2}}{2} & 0\end{pmatrix}^T \quad \gamma_3=\eta_3'/\|\eta_3'\|=\begin{pmatrix}\dfrac{\sqrt{6}}{6} & \dfrac{\sqrt{6}}{6} & -\dfrac{\sqrt{6}}{3}\end{pmatrix}^T$$

令 $Q=(\gamma_1 \quad \gamma_2 \quad \gamma_3)$ 则 $Q^TAQ=Q^{-1}AQ=\begin{pmatrix}6&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$

做正交变换 $X=QY$ f 化为 $6y_1^2$

例 7 已知二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=(1-a)x_1^2+(1-a)x_2^2+2x_3^2+2(1+a)x_1x_2$ 的秩 2

(1)求 a.

(2)求作正交变换 $X=QY$, 把 $f(x_1,x_2,x_3)$ 化为标准形.

(3)求方程 $f(x_1,x_2,x_3)=0$ 的解. (2005 年数学一)

解: $A=\begin{pmatrix}1-a&1+a&0\\1+a&1-a&0\\0&0&2\end{pmatrix}$ $r(A)=2\Rightarrow a=0$

$A=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$ 求出特征值 2，2，0

求单位正交特征向量组

特征值 2 $A-2E=\begin{pmatrix}-1&1&0\\1&-1&0\\0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$

$(A-2E)X=0$ 与 $x_1-x_2=0$ 同解

基础解析 $\eta_1=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ $\eta_2=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

单位化 $\gamma_1=\eta_1/\|\eta_1\|=\begin{pmatrix}\dfrac{\sqrt{2}}{2} & \dfrac{\sqrt{2}}{2} & 0\end{pmatrix}^T$ $\gamma_2=\eta_2$

特征值 0 $A\to\begin{pmatrix}1&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$ $AX=0$ 与 $\begin{cases}x_1+x_2=0\\x_3=0\end{cases}$ 同解

新东方在线 www.koolearn.com 网络课堂电子教材系列

得非零解 $\eta_1=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$

单位化 $\gamma_3=\eta_3/\|\eta_3\|=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0\end{pmatrix}$

令 $Q=\begin{pmatrix}\gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3\end{pmatrix}$ 则 $Q^TAQ=Q^{-1}AQ=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&0\end{pmatrix}$

做正交变换 $X=QY$ f 化为 $2y_1^2+2y_2^2$

请注意：由于$\boldsymbol{\Lambda}=\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{AQ}$和$\boldsymbol{A}$相似，其对角线上的元素是$\boldsymbol{A}$特征值，因此一般地它只是对角矩阵，不是规范对角矩阵. 于是正交变换法只是将二次型标准化.

② 配方法.

例 3 用配方法化二次型为标准型

(1) $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2x_2^2+2x_1x_2-2x_1x_3+2x_2x_3$.

(2) $f(x_1,x_2,x_3)=x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3$.

(1) $f=x_1^2+2x_1(x_2-x_3)+(x_2-x_3)^2-(x_2-x_3)^2+2x_2^2+2x_2x_3$

$$=(x_1+x_2-x_3)^2+x_2^2+4x_2x_3-x_3^2$$
$$=(x_1+x_2-x_3)^2+(x_2+2x_3)^2-5x_3^2$$

令 $\begin{cases}y_1=x_1+x_2-x_3\\y_2=x_2+2x_3\\y_3=x_3\end{cases}$ 得 $\begin{cases}x_1=y_1-y_2+3y_3\\x_2=y_2-2y_3\\x_3=y_3\end{cases}$ $C=\begin{pmatrix}1&-1&3\\0&1&-2\\0&0&1\end{pmatrix}$

作 $X=CY$ 则 $f=y_1^2+y_2^2-5y_3^2$

(2) $\begin{cases}x_1=y_1+y_2\\x_2=y_1-y_2\\x_3=y_3\end{cases}$ $f=y_1^2-y_2^2+2y_1y_3=(y_1+y_3)^2-y_2^2-y_3^2$

令 $\begin{cases}z_1=y_1+y_3\\z_2=y_2\\z_3=y_3\end{cases}$ 即 $\begin{cases}y_1=z_1-z_3\\y_2=z_2\\y_3=z_3\end{cases}$ $\begin{cases}x_1=z_1+z_2-z_3\\x_2=z_1-z_2-z_3\\x_3=z_3\end{cases}$ $C=\begin{pmatrix}1&1&-1\\1&-1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}$

作 $X=CZ$ $f=z_1^2-z_2^2-z_3^2$

例 8 已知 3 是矩阵 $A=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&y&1\\0&0&1&2\end{pmatrix}$的特征值.

(1) 求 y.

(2) 求作可逆矩阵 P, 使得 $(AP)^{T}AP$ 是对角矩阵. (96)

(1) $y=2$

(2) $(AP)^T AP = P^T A^2 P$

$$A^2=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&5&4\\0&0&4&5\end{pmatrix}$$

$$X^T A^2 X = x_1^2+x_2^2+5x_3^2+5x_4^2+8x_3x_4 = x_1^2+x_2^2+5\left(x_3+\frac{4}{5}x_4\right)^2+\frac{9}{5}x_4^2$$

令 $\begin{cases} y_1=x_1\\ y_2=x_2\\ y_3=x_3+\frac{4}{5}x_4\\ y_4=x_4\end{cases}$ 即 $\begin{cases} x_1=y_1\\ x_2=y_2\\ x_3=y_3-\frac{4}{5}y_4\\ x_4=y_4\end{cases}$ $P=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&-\frac{4}{5}\\0&0&0&1\end{pmatrix}$ 则

$$P^T A^2 P=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&5&0\\0&0&0&\frac{9}{5}\end{pmatrix}$$

三. 惯性定理和惯性指数 合同的判断

惯性定理 一个二次型所化得的标准二次型不是唯一的,但是它们的平方项的系数中,正的个数和负的个数是确定的,把这两个数分别称为原二次型的**正惯性指数**和**负惯性指数**.

一个二次型所化得的规范二次型在形式上是唯一的,称为其**规范形**.

这个定理用矩阵的语言来表述即:与一个给定的实对称矩阵 A 合同的对角矩阵不是唯一的,但是其对角线元素中,正数的个数和负数的个数是确定的,称为 A 的**正惯性指数**和**负惯性指数**. 与一个给定的实对称矩阵 A 合同的规范对角矩阵是唯一的,对角线上 1 的个数和(-1)的个数就是 A 的正,负惯性指数.

命题 两个二次型可以用可逆线性变量替换互相转化的充分必要条件为它们的正,负惯性指数都相等.

两个实对称矩阵合同的充分必要条件为它们的正,负惯性指数都相等.

命题 实对称矩阵 A 的正(负)惯性指数就是它的正(负)特征值的个数.

于是, 两个实对称矩阵合同的充分必要条件是它们的正(负)特征值的个数都相等.

例 2(选择题)设

$$A=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\end{pmatrix}\qquad B=\begin{pmatrix}4&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

(A) A 与 B 既合同又相似.

(B) A 与 B 合同但不相似.

(C) A 与 B 不合同但相似.

新东方在线 www.koolearn.com 网络课堂电子教材系列

(D) A 与 B 既不合同又不相似.

2007 题

2．设 $A=\begin{pmatrix}2&-1&-1\\-1&2&-1\\-1&-1&2\end{pmatrix}$ $\quad B=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ 则

A. A 与 B 既合同又相似.
B. A 与 B 合同但不相似.
C. A 与 B 不合同但相似.
D. A 与 B 既不合同又不相似.

2008 题

1. $A=\begin{pmatrix}1&2\\2&1\end{pmatrix}$ ，则( )中矩阵在实数域上与 A 合同.

(A) $=\begin{pmatrix}-2&1\\1&-2\end{pmatrix}$ $\qquad$ (B) $=\begin{pmatrix}2&-1\\-1&2\end{pmatrix}$

(C) $=\begin{pmatrix}2&1\\1&2\end{pmatrix}$ $\qquad$ (D) $=\begin{pmatrix}1&-2\\-2&1\end{pmatrix}$

例 1 设 A 是一个可逆实对称矩阵，记 A_{ij} 是它的代数余子式. 二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\sum_{i,j=1}^{n}\frac{A_{ij}}{|A|}x_ix_j$.

(1)用矩阵乘积的形式写出此二次型.

(2) $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 的规范形和 X^TAX 的规范形是否相同?为什么?

(1) $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 的矩阵的(i, j)位元素是 $\frac{A_{ij}}{|A|}$ ，此矩阵为 $(\frac{A_{ij}}{|A|})=\frac{A^*}{|A|}=A^{-1}$.

(2) $A^{-1}\approx A$. ($A^TA^{-1}A=A$).

2009 题

二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=ax_1^2+ax_2^2+(a-1)x_3^2+2x_1x_3-2x_2x_3$.

① 求 $f(x_1,x_2,x_3)$ 的矩阵的特征值.

② 如果 $f(x_1,x_2,x_3)$ 的规范形为 $y_1^2+y_2^2$, 求 a.

① $A=\begin{pmatrix}a&0&1\\0&a&-1\\1&-1&a-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&-1\\1&-1&-1\end{pmatrix}+aE=B+aE$

$|\lambda E-B|=\lambda(\lambda-1)(\lambda+2)$. B 的特征值为 0, 1, -2⇒A 的特征值为 a, a+1, a-2.

② $f(x_1,x_2,x_3)$ 的规范形为 $y_1^2+y_2^2$, 说明 A 的特征值两个正, 一个 0, a=2.

四. 正定二次型和正定矩阵

1. **定义**

如果当 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 不全为 0 时, 一定有 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)>0$，二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 称为正定二次型.

如果实对称矩阵 A 所决定的二次型正定, 则称 A 为正定矩阵, 于是 A 为正定矩阵也就是满足性质: 当 $X\neq0$ 时, 一定有 $X^TAX>0$.

例如 $ax_1^2+bx_2^2+cx_3^2$ 正定⇔a, b, c 都大于 0.

新东方在线 www.koolearn.com 网络课堂电子教材系列

二次型的正定性是在可逆线性变量替换中保持不变的. 即实对称矩阵的正定性在合同变换时保持不变.

2. 性质与判断

实对称矩阵 A 正定⇔合同于单位矩阵.

⇔存在可逆矩 C, 使得 $A=C^TC$.

⇔A 的正惯性指数等于其阶数 n.

⇔A 的特征值都是正数.

⇔A 的顺序主子式全大于 0.

顺序主子式:一个 n 阶矩阵有 n 个顺序主子式,第 r 个(或称 r 阶)顺序主子式即 A 的左上角的 r 阶矩阵 A_r 的行列式$|A_r|$.

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{34} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44} \end{pmatrix}$$

判断正定性的方法:顺序主子式法,特征值法,定义法.

例 证明两个 n 阶正定矩阵 A 与 B 的和也是正定矩阵.

设 n 维列向量 $X\neq 0$, 则 $X^T(A+B)X=X^TAX+X^TBX>0$.

例 9 已知二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+4x_2^2+4x_3^2+2cx_1x_2-2x_1x_3+4x_2x_3.$$

当 c 满足什么条件时 $f(x_1,x_2,x_3)$ 正定?(91)

解:$A=\begin{pmatrix} 1 & c & -1 \\ c & 4 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$, $|A_1|=1$, $|A_2|=4-c^2$, $|A_3|=|A|=-4(c+2)(c-1)$

$$\begin{cases} 4-c^2>0 \\ (c+2)(c-1)<0 \end{cases} \Rightarrow -2<c<1$$

例 11 已知 A 是正定矩阵,证明$|A+E|>1$.

证明:设 A 的特征值为 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$, $\lambda_i>0$;A+E 的特征值为 $\lambda_1+1,\cdots,\lambda_n+1$, $\lambda_i+1>1$

$\therefore |A+E|=(\lambda_1+1)\cdots(\lambda_n+1)>1$.

例 15 设 A 是 3 阶实对称矩阵,满足 $A^2+2A=0$,并且 $r(A)=2$.

(1) 求 A 的特征值.

(2)当实数 k 满足什么条件时 $A+kE$ 正定?(02 三)

解:(1) A 的特征值满足 $\lambda^2+2\lambda=0$, 即λ 解是 0 或-2, r(A)=2⇒

λ =0 时的重数=n-r(A)=1, 特征值为 0, -2, -2.

(2)A+kE 的特征值为 k,k-2,k-2;当 k>2 时 A+kE 正定。

例 14 设 A 是 m 阶正定矩阵,B 是 m×n 实矩阵,证明:

B^TAB 正定⇔$r(B)=n$. (99 一)

解: “⇒” B^TAB 是 n 阶矩阵,它正定则可逆,

$r(B^TAB)=n\Rightarrow r(B)=n$;

“⇐”先说明 B^TAB 是实对称矩阵,用定义法:设 $\alpha\neq 0$,

看 $\alpha^TB^TAB\alpha$ 的值,∵B 列满秩,BX=0 上只有零解,

新东方在线 www.koolearn.com 网络课堂电子教材系列

则 $B\alpha \neq 0$，于是 $\alpha^T B^T AB\alpha = (B\alpha)^T AB\alpha > 0$.

例 13 设 A 和 B 都是 m×n 实矩阵，满足 $r(A+B)=n$，证明 A^TA+B^TB 正定.

解：$A^T A + B^T B$ 是 n 阶实矩阵，并且 $(A^T A + B^T B)^T = A^T A + B^T B$，即它对称。 设 n 阶列向量 $\alpha \neq 0$，

$\alpha^T (A^T A + B^T B)\alpha = \alpha^T A^T A\alpha + \alpha^T B^T B\alpha = (A\alpha, A\alpha) + (B\alpha, B\alpha)$，

由于 $r(A+B) = n$，$(A+B)X = 0$ 上有零解，于是
$(A+B)\alpha \neq 0$，则 $A\alpha$，$B\alpha$ 不都为 0，
$(A\alpha, A\alpha) + (B\alpha, B\alpha) > 0$。

例 10 已知二次型

$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = (x_1+a_1x_2)^2 + (x_2+a_2x_3)^2 + \cdots + (x_n+a_nx_1)^2$.

$a_1, a_2, \cdots, a_n$ 满足什么条件时 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 正定?(2000 三)

解：

$(x_1 + a_1x_2)^2 + (x_2 + a_2x_3)^2 + \cdots + (x_n + a_nx_1)^2 > 0 \Leftrightarrow x_1 + a_1x_2, x_2 + a_2x_3, \cdots x_n + a_nx_1$ 不全为 0，

看齐次方程组 $\begin{cases} x_1 + a_1x_2 = 0 \\ x_2 + a_2x_3 = 0 \\ \vdots \\ x_n + a_nx_1 = 0 \end{cases}$

当它没有非零解时，即 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 不全为 0 时，$f(x_1, \cdots x_n) > 0$；

如果它有非零解 $\alpha = (c_1, c_2, \cdots, c_n)^T$，则 $f(c_1, c_2, \cdots, c_n) = 0$；

f 正定 $\Leftrightarrow$ 此方程组没有非零解 $\Leftrightarrow$

$$\begin{vmatrix} 1 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \\ 0 & & \ddots & \ddots & a_{n-1} \\ a_n & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \Leftrightarrow 1 + (-1)^{n+1} a_1a_2\cdots a_n \neq 0 \Leftrightarrow a_1a_2\cdots a_n \neq (-1)^n$$

2011 年考试真题线性代数部分解答

矩阵部分

例 设 A 为 3 阶矩阵，将 A 的第 2 列加到第 1 列得矩阵 B，再交换 B 的第 2 行与第 3 行得单位矩阵，记

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

则 A=( ).

(A) P_1P_2. (B) $P_1^{-1}P_2$. (C) P_2P_1. (D) $P_2P_1^{-1}$.

解 选择(D).

新东方在线 www.koolearn.com 网络课堂电子教材系列

条件说明 $P_2AP_1=E$, 从而 $A=P_2^{-1}P_1^{-1}=P_2P_1^{-1}$.

向量组部分

例 设向量组$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,0,1)^T$, $\boldsymbol{\alpha}_2=(0,1,1)^T$, $\boldsymbol{\alpha}_3=(1,3,5)^T$不能由向量组$\boldsymbol{\beta}_1=(1,1,1)^T$, $\boldsymbol{\beta}_2=(1,2,3)^T$, $\boldsymbol{\beta}_3=(3,4,a)^T$线性表示.

(1)求 a 的值;

(2)将$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$用$\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$, $\boldsymbol{\alpha}_3$线性表示.

解 (1) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$不能由向量组$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$线性表示，则

$$r(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)<r(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\le 3,$$

于是$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$线性相关, $|\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3|=0$.

$$|\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3|=\begin{vmatrix}1&1&3\\1&2&4\\1&3&a\end{vmatrix}=a-5,\text{得 } a=5.$$

(2)求矩阵方程$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)X=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)$的解:

$$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3|\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)=\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&1&1&1&3\\0&1&3&1&2&4\\1&1&5&1&3&5\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&2&1&5\\0&1&0&4&2&10\\0&0&1&-1&0&-2\end{array}\right)$$

$$X=\begin{pmatrix}2&1&5\\4&2&10\\-1&0&-2\end{pmatrix},$$

则$\boldsymbol{\beta}_1=2\boldsymbol{\alpha}_1+4\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3$, $\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2$, $\boldsymbol{\beta}_1=5\boldsymbol{\alpha}_1+10\boldsymbol{\alpha}_2-2\boldsymbol{\alpha}_3$.

方程组部分

例 设 $A=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)$是 4 阶矩阵，$A^*$为 A 的伴随矩阵，若$(1,0,1,0)^T$是方程组 $AX=0$ 的一个基础解系，则 $A^*X=0$ 的基础解系可为 (　　).

(A) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_3$.　(B) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$.　(C) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$.　(D) $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$.

解 选择(D).

$AX=0$ 的基础解系含一个解说明 $r(A)=4-1=3$, 于是 $r(A^*)=1$, $A^*X=0$ 的基础解系含 3 个解. 排除(A)和(B). $(1,0,1,0)^T$是 $AX=0$ 的解, 则$\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_3=0$, 于是$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性相关, 排除(C).

又$|A|=0$, 则 $A^*A=0$, 从而$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$都是 $A^*X=0$ 的解. 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$的秩为 3, 它的极大无关组都是 $A^*X=0$ 的基础解系.

$$r(\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)=r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)=3,$$

$\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$无关, 构成 $A^*X=0$ 的基础解系.

例 设 A 为 4×3 矩阵，$\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_3$是非齐次线性方程组 $AX=\boldsymbol{\beta}$的 3 个线性无关的解，k_1,k_2为任意常数，则 $AX=\boldsymbol{\beta}$的通解为(　　)

(A) $(\boldsymbol{\eta}_2+\boldsymbol{\eta}_3)/2+k_1(\boldsymbol{\eta}_2-\boldsymbol{\eta}_1)$.　(B) $(\boldsymbol{\eta}_2-\boldsymbol{\eta}_3)/2+k_2(\boldsymbol{\eta}_2-\boldsymbol{\eta}_1)$.

(C) $(\boldsymbol{\eta}_2+\boldsymbol{\eta}_3)/2+k_1(\boldsymbol{\eta}_3-\boldsymbol{\eta}_1)+k_2(\boldsymbol{\eta}_2-\boldsymbol{\eta}_1)$.　(D) $(\boldsymbol{\eta}_2-\boldsymbol{\eta}_3)/2+k_1(\boldsymbol{\eta}_3-\boldsymbol{\eta}_1)+k_2(\boldsymbol{\eta}_2-\boldsymbol{\eta}_1)$.

解 选(C).

$(\boldsymbol{\eta}_2-\boldsymbol{\eta}_3)/2$ 不是 $AX=\boldsymbol{\beta}$的解, 排除(B)和(D).

$(\boldsymbol{\eta}_3-\boldsymbol{\eta}_1)$, $(\boldsymbol{\eta}_2-\boldsymbol{\eta}_1)$是 $AX=0$ 的两个线性无关的解, 排除(A).

特征部分

例

A 为三阶实对称矩阵，A 的秩为 2，且 $A\begin{pmatrix}1&1\\0&0\\-1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&1\\0&0\\1&1\end{pmatrix}$,

−1 1 1 1

求（1）A 的特征值与特征向量

（2）矩阵 A.

解（1）

由 $A\begin{pmatrix}1&1\\0&0\\-1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&1\\0&0\\1&1\end{pmatrix}$,得

$$A\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix},A\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},$$

于是$(1,0,-1)^T$和$(1,0,1)^T$都是 A 的特征向量,特征值分别为-1 和 1.

A 的秩为 2,则 0 是 A 的特征值. A 的特征值为 1,-1,0.

A 的属于特征值 1 的特征向量为 $c(1,0,1)^T$,其中 $c\neq0$.

A 的属于特征值-1 的特征向量为 $c(1,0,-1)^T$,其中 $c\neq0$.

A 的属于特征值 0 的特征向量和$(1,0,-1)^T$和$(1,0,1)^T$都正交,求得为 $c(0,1,0)^T$,其中 $c\neq0$.

(2)建立矩阵方程

$$A\begin{pmatrix}1&1&0\\0&0&1\\-1&1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&1&0\\0&0&0\\1&1&0\end{pmatrix},$$

两边转置得 $\begin{pmatrix}1&0&-1\\1&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}A=\begin{pmatrix}-1&0&1\\1&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$,

解得

$$A=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}.$$

二次型部分

例 若二次曲面的方程 $x^2+3y^2+z^2+2axy+2xz+2yz=4$,经直角坐标变换化为 $y_1^2+4z_1^2=4$. 则 $a=$________ .

解 $a=1$.

条件说明二次型 $x^2+3y^2+z^2+2axy+2xz+2yz$ 可用正交变换化为 $y_1^2+4z_1^2$,于是它们的矩阵 $\begin{pmatrix}1&a&1\\a&3&1\\1&1&1\end{pmatrix}$ 和 $\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&4\end{pmatrix}$ 相似,从而$\begin{vmatrix}1&a&1\\a&3&1\\1&1&1\end{vmatrix}=0$,求出 $a=1$.

例 二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+3x_2^2+x_3^2+2x_1x_2+2x_1x_3+2x_2x_3$,则 f 的正惯性指数为________ .

解 填 2.

方法一 求出二次型 $f(x_1,x_2,x_3)$的矩阵

$A=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&3&1\\1&1&1\end{pmatrix}$的特征值为 1,4,0, 正惯性指数为 2.

新东方在线 www.koolearn.com 网络课堂电子教材系列

方法二 用配方法.

$f(x_1,x_2,x_3)=(x_1+x_2+x_3)^2+2x_2^2=y_1^2+2y_2^2$，正惯性指数为 2.

例 设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=X^TAX$ 的秩为 1，A 中各行元素之和为 3，则 f 在正交变换 $X=QY$ 下的标准形为________ .

解 填 $3y_1^2$(或 $3y_2^2$, $3y_3^2$). 条件说明 A 的特征值为 3,0,0.

新东方在线 www.koolearn.com 网络课堂电子教材系列