

2014考研数学一真题

一、选择题:11~18 小题,每小题 4 分,共 32 分.下列每题给出的四个选项中,只有一个选项符合题目要求的,请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上.

(1) 下列曲线有渐近线的是 ( )

(A)  $y = x + \sin x$  (B)  $y = x^2 + \sin x$

(C)  $y = x + \sin \frac{1}{x}$  (D)  $y = x^2 + \sin \frac{1}{x}$

(2) 设函数  $f(x)$  具有二阶导数,  $g(x) = f(0)(1-x) + f(1)x$ , 则在区间  $[0,1]$  上 ( )

(A) 当  $f''(x) \geq 0$  时,  $f(x) \geq g(x)$  (B) 当  $f''(x) \geq 0$  时,  $f(x) \leq g(x)$

(C) 当  $f''(x) \leq 0$  时,  $f(x) \geq g(x)$  (D) 当  $f''(x) \leq 0$  时,  $f(x) \leq g(x)$

(3) 设  $f(x)$  是连续函数, 则  $\int_0^1 dy \int_{\sqrt{1-y}}^{1-y} f(x, y) dx =$  ( )

(A)  $\int_0^1 dx \int_0^{x-1} f(x, y) dy + \int_{-1}^0 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy$

(B)  $\int_0^1 dx \int_0^{1-x} f(x, y) dy + \int_{-1}^0 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^0 f(x, y) dy$

(C)  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\frac{1}{\cos\theta + \sin\theta}} f(r \cos \theta, r \sin \theta) dr + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} d\theta \int_0^1 f(r \cos \theta, r \sin \theta) dr$

(D)  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\frac{1}{\cos\theta + \sin\theta}} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} d\theta \int_0^1 f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr$

(4) 若  $\int_{-\pi}^{\pi} (x - a_1 \cos x - b_1 \sin x)^2 dx = \min_{a, b \in \mathbb{R}} \left\{ \int_{-\pi}^{\pi} (x - a \cos x - b \sin x)^2 dx \right\}$ , 则

$a_1 \cos x + b_1 \sin x =$  ( )

(A)  $2 \sin x$  (B)  $2 \cos x$  (C)  $2\pi \sin x$  (D)  $2\pi \cos x$

(5) 行列式  $\begin{vmatrix} 0 & a & b & 0 \\ a & 0 & 0 & b \\ 0 & c & d & 0 \\ c & 0 & 0 & d \end{vmatrix} =$  ( )

- (A)  $(ad - bc)^2$  (B)  $-(ad - bc)^2$  (C)  $a^2d^2 - b^2c^2$  (D)  $b^2c^2 - a^2d^2$

(6) 设  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  是 3 维向量, 则对任意常数  $k, l$ , 向量  $\alpha_1 + k\alpha_3, \alpha_2 + l\alpha_3$  线性无关是向量

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  线性无关的

- (A) 必要非充分条件 (B) 充分非必要条件  
(C) 充分必要条件 (D) 既非充分又非必要条件

(7) 设随机事件  $A$  与  $B$  相互独立, 且  $P(B) = 0.5, P(A - B) = 0.3$ , 则  $P(B - A) =$  ( )

- (A) 0.1 (B) 0.2 (C) 0.3 (D) 0.4

(8) 设连续性随机变量  $X_1$  与  $X_2$  相互独立, 且方差均存在,  $X_1$  与  $X_2$  的概率密度分别为  $f_1(x)$  与

$f_2(x)$ , 随机变量  $Y_1$  的概率密度为  $f_{Y_1}(y) = \frac{1}{2}[f_1(y) + f_2(y)]$ , 随机变量  $Y_2 = \frac{1}{2}(X_1 + X_2)$ , 则 ( )

- (A)  $EY_1 > EY_2, DY_1 > DY_2$  (B)  $EY_1 = EY_2, DY_1 = DY_2$   
(C)  $EY_1 = EY_2, DY_1 < DY_2$  (D)  $EY_1 = EY_2, DY_1 > DY_2$

二、填空题: 9~14 小题, 每小题 4 分, 共 24 分. 请将答案写在答题纸指定位置上.

(9) 曲面  $z = x^2(1 - \sin y) + y^2(1 - \sin x)$  在点  $(1, 0, 1)$  处的切平面方程为\_\_\_\_\_.

(10) 设  $f(x)$  是周期为 4 的可导奇函数, 且  $f'(x) = 2(x - 1), x \in [0, 2]$ , 则  $f(7) =$ \_\_\_\_\_.

(11) 微分方程  $xy' + y(\ln x - \ln y) = 0$  满足条件  $y(1) = e^3$  的解为  $y =$ \_\_\_\_\_.

(12) 设  $L$  是柱面  $x^2 + y^2 = 1$  与平面  $y + z = 0$  的交线, 从  $z$  轴正向往  $z$  轴负向看去为逆时针方向,

则曲面积分  $\iint_L z dx + y dz =$ \_\_\_\_\_.

(13) 设二次型  $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - x_2 + 2ax_1x_3 + 4x_2x_3$  的负惯性指数是 1, 则  $a$  的取值范围\_\_\_\_\_.

(14) 设总体  $X$  的概率密度为  $f(x, \theta) = \begin{cases} \frac{2x}{3\theta^2}, & \theta < x < 2\theta \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$ , 其中  $\theta$  是未知参数,  $X_1, X_2, \dots, X_n$  为来自

总体  $X$  的简单样本, 若  $c \sum_{i=1}^n x_i^2$  是  $\theta$  的无偏估计, 则  $c =$ \_\_\_\_\_.

**三、解答题: 15~23 小题, 共 94 分. 请将解答写在答题纸指定位置上. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.**

(15)(本题满分 10 分)

$$\text{求极限 } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_1^x \left[ t^2 \left( \frac{1}{e^t} - 1 \right) - t \right] dt}{x^2 \ln \left( 1 + \frac{1}{x} \right)}$$

(16)(本题满分 10 分)

设函数  $y = f(x)$  由方程  $y^3 + xy^2 + x^2y + 6 = 0$  确定, 求  $f(x)$  的极值.

(17)(本题满分 10 分)

设函数  $f(u)$  具有 2 阶连续导数,  $z = f(e^x \cos y)$  满足  $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 4(z + e^x \cos y)e^{2x}$ . 若

$f(0) = 0, f'(0) = 0$ , 求  $f(u)$  的表达式.

(18)(本题满分 10 分) 设  $\Sigma$  为曲面  $z = x^2 + y^2$  ( $z \leq 1$ ) 的上侧, 计算曲面积分

$$I = \iint_{\Sigma} (x-1)^3 dydz + (y-1)^3 dzdx + (z-1) dx dy$$

(19)(本题满分 10 分) 设数列  $\{a_n\}, \{b_n\}$  满足  $0 < a_n < \frac{\pi}{2}, 0 < b_n < \frac{\pi}{2}, \cos a_n - a_n = \cos b_n$ , 且

级数  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  收敛.

(I) 证明:  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ .

(II) 证明: 级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{b_n}$  收敛.

(20)(本题满分 11 分) 设  $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & -3 \end{pmatrix}$ ,  $E$  为 3 阶单位矩阵.

(I) 求方程组  $Ax = 0$  的一个基础解系; (II) 求满足  $AB = E$  的所有矩阵  $B$ .

(21)(本题满分 11 分) 证明  $n$  阶矩阵  $\begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}$  与  $\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 2 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & n \end{pmatrix}$  相似.

(22)(本题满分 11 分)

设随机变量  $X$  的概率分布为  $P\{X=1\} = P\{X=2\} = \frac{1}{2}$ , 在给定  $X=i$  的条件下, 随机变量  $Y$  服从均匀分布  $U(0, i)$  ( $i=1, 2$ .)

(I) 求  $Y$  的分布函数  $F_Y(y)$ ;

(II) 求  $E(Y)$ .

(23)(本题满分 11 分)

设总体  $X$  的分布函数为  $F(x, \theta) = \begin{cases} 1 - e^{-\frac{x^\theta}{\theta}}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$ , 其中  $\theta$  是未知参数且大于

零.  $X_1, X_2, \dots, X_n$  为来自总体  $X$  的简单随机样本.

(I) 求  $E(X)$  与  $E(X^2)$ ;

(II) 求  $\theta$  的最大似然估计量  $\hat{\theta}_n$ ;

(III) 是否存在实数  $a$ , 使得对任何  $\varepsilon > 0$ , 都有  $\lim_{n \rightarrow \infty} P\{|\hat{\theta}_n - a| \geq \varepsilon\} = 0$ ?

## 2014 考研数学真题答案（数一）

一、选择题

1、C    2、C    3、D    4、A  
5、B    6、A    7、B    8、D

二、填空题

9、 $2x - y - z - 1 = 0$                   10、1

11、 $y = xe^{2x+1}$                           12、 $\pi$

13、 $[-2, 2]$  14、 $\frac{2}{5n}$

三、解答题

15、解析：

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\int_1^x (t^2(e^{\frac{1}{t}} - 1) - t) dt}{x^2 \ln(1 + \frac{1}{x})} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\int_1^x (t^2(e^{\frac{1}{t}} - 1) - t) dt}{x^2 \cdot \frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2(e^{\frac{1}{x}} - 1) - x}{1} = \lim_{x \rightarrow \infty} x^2(e^{\frac{1}{x}} - 1 - \frac{1}{x})$$

$$\underline{\underline{\text{令}} \frac{1}{x} = t} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^t - 1 - t}{t^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + t + \frac{1}{2}t^2 + o(t^2) - 1 - t}{t^2} = \frac{1}{2}$$

16.解析：

$$y^3 + xy^2 + x^2y + 6 = 0(1)$$

(1)式两端对x求导得：

$$(3y^2 + 2xy + x^2)y' + y^2 + 2xy = 0(2)$$

当 $y' = 0$ 时,解得 $y = 0$ (舍) 或 $y = -2x$

把 $y = -2x$ 代入(1)式,得 $x = 1, y = -2$

(2)式两端对x求导得

$$(6yy' + 2y + 2xy' + 2x)y' + (3y^2 + 2xy + x^2)y'' + 2yy' + 2y + 2xy' = 0$$

$$\text{代入 } x = 1, y = -2, y' \Big|_{x=1} = 0, \text{得 } y'' \Big|_{x=1} = \frac{4}{9} > 0$$

所以当 $x = 1$ 时, $f(x)$ 有极小值 $f(1) = -2$

17、

解析：

$$\frac{\partial z}{\partial x} = f' \cdot e^x \cdot \cos y,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \cos y \cdot (f'' \cdot e^x \cdot \cos y \cdot e^x + f' \cdot e^x) = f'' \cdot (e^x \cdot \cos y)^2 + f' \cdot e^x \cdot \cos y$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = f' \cdot e^x \cdot (-\sin y),$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -e^x [f'' \cdot e^x \cdot (-\sin y) + f' \cdot \cos y] = (e^x)^2 \sin y^2 f'' - f' \cdot \cos y \cdot e^x$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f'' \cdot e^{2x} = (4z + e^x \cdot \cos y) e^{2x}$$

$$\therefore f''(e^x \cdot \cos y) = 4f(e^x \cdot \cos y) + e^x \cdot \cos y$$

$$\text{令 } t = e^x \cdot \cos y, \therefore f''(t) = 4f(t) + t$$

$$\therefore y'' - 4y = x$$

求特征值:

$$\lambda^2 - 4 = 0 \quad \therefore \lambda = \pm 2 \quad \therefore \widetilde{y(x)} = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x}$$

再求非其次特征值。

$$y^* = (ax + b) \quad \text{代入} \quad \therefore y^* = -\frac{1}{4}x$$

$$\therefore y = \widetilde{y(x)} + y^* = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x} - \frac{1}{4}x$$

$$y(0) = 0 = C_1 + C_2$$

$$y'(0) = 0 = 2C_1 - 2C_2 - \frac{1}{4}$$

$$\therefore \begin{cases} C_1 + C_2 = 0 \\ 2C_1 - 2C_2 = \frac{1}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = \frac{1}{16} \\ C_2 = -\frac{1}{16} \end{cases}$$

$$\therefore f(\mu) = \frac{1}{16} e^{2\mu} - \frac{1}{16} e^{-2\mu} - \frac{1}{4} \mu$$

18、解析:

设曲面,  $\Sigma_1: \begin{cases} x^2 + y^2 \leq 1 \\ z = 1 \end{cases}$ , 方向向上.

$$\oiint_{\Sigma^{-1} + \Sigma_1} (x-1)^3 dydz + (y-1)^3 dzdx + (z-1) dxdy$$

$$= \iiint_{\Omega} (3(x-1)^2 + 3(y-1)^2 + 1) dxdydz = \iiint_{\Omega} (3x^2 + 6x + 3 + 3y^2 + 6y + 3 + 1) dxdydz$$

$$= \iiint_{\Omega} (3x^2 + 3y^2 + 7) dx dy dz = \int_0^1 dz \iint_{D(z)} (3x^2 + 3y^2 + 7) dx dy$$

$$= \int_0^1 dz \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{z}} (3r^2 + 7) r dr = 4\pi$$

其中  $\iiint_{\Omega} (6x + 6y) dx dy dz = 0$ ，因为积分区域关于  $xoz, yoz$  对称，积分函数

$f(x, y) = 6x + 6y$  分别是  $y, x$  的奇函数。

$$\text{在曲面 } \Sigma_1 \text{ 上, } \iint_{\Sigma_1} (x-1)^3 dy dz + (y-1)^3 dz dx + (z-1) dx dy = 0$$

$$\text{故 } \oiint_{\Sigma} (x-1)^3 dy dz + (y-1)^3 dz dx + (z-1) dx dy = -4\pi .$$

19、

(1) 证明:

$$\because \cos a_n - a_n = \cos b_n$$

$$\therefore a_n = \cos a_n - \cos b_n$$

$$\text{又 } 0 < a_n < \frac{\pi}{2}$$

$$\therefore \cos a_n - \cos b_n > 0$$

$$\Rightarrow a_n < b_n$$

$$\because a_n > 0, b_n > 0, \text{又 } \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ 收敛}$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ 收敛}$$

$$\text{故 } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$$

(2)

$$\begin{aligned} \frac{a_n}{b_n} &= \frac{\cos a_n - \cos b_n}{b_n} \\ &= \frac{-2 \sin \frac{a_n + b_n}{2} \sin \frac{a_n - b_n}{2}}{\frac{a_n + b_n}{2} \cdot \frac{a_n - b_n}{2}} \cdot \frac{a_n^2 - b_n^2}{4b_n} \\ &\leq \frac{b_n^2 - a_n^2}{2b_n} \\ &\leq \frac{b_n^2}{2b_n} = \frac{b_n}{2} \end{aligned}$$

$$\because 0 < a_n < \frac{\pi}{2}, 0 < b_n < \frac{\pi}{2}$$

且  $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$  收敛

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{b_n}$  收敛

20. 解析:

$$\begin{aligned} (A) &= \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{-r_1+r_3} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & -3 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{-4r_2+r_3} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} \\ &\xrightarrow{\substack{r_3+r_2 \\ -3r_3+r_1}} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{2r_2+r_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{cases} x_1 = -x_4 \\ x_2 = 2x_4 \\ x_3 = 3x_4 \\ x_4 = x_4 \end{cases} = c \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad c \text{ 为任意常数}$$

$$\text{设 } B = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{pmatrix}$$

$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 & \vdots & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & \vdots & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -3 & \vdots & 0 \end{pmatrix}$$



$$A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 & \vdots & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & \vdots & 1 \\ 1 & 2 & 0 & -3 & \vdots & 0 \end{pmatrix}$$

$$A \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 & \vdots & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & \vdots & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -3 & \vdots & 1 \end{pmatrix}$$

即

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 & \vdots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & \vdots & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -3 & \vdots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 & \vdots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & \vdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & -3 & 1 & \vdots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 & \vdots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & \vdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & \vdots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 5 & \vdots & 4 & 12 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & \vdots & -1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & \vdots & -1 & -4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & \vdots & 2 & 6 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & \vdots & -1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & \vdots & -1 & -4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} = c_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{pmatrix} = c_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\therefore B = \begin{pmatrix} -c_1+2 & -c_2+6 & -c_3-1 \\ 2c_1-1 & 2c_2-3 & 2c_3+1 \\ 3c_1-1 & 3c_2-4 & 3c_3+1 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}$$

$c_1, c_2, c_3$ 为任意常数

21、解析：

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & n \end{bmatrix}$$

设

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & \lambda - 1 & \cdots & -1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -1 & -1 & \cdots & \lambda - 1 \end{vmatrix} = (\lambda - n)\lambda^{n-1}$$

所以  $A$  的  $n$  个特征值为  $\lambda_1 = n, \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0$

又因为  $A$  是一个实对称矩阵, 所以  $A$  可以相似对角化, 且

$$A \sim \begin{bmatrix} n & & & \\ & 0 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 0 \end{bmatrix}, \quad |\lambda E - B| = \begin{vmatrix} \lambda & 0 & \cdots & 0 & -1 \\ 0 & \lambda & \cdots & 0 & -2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda - N \end{vmatrix} = (\lambda - n)\lambda^{n-1}$$

所以  $B$  的  $n$  个特征值为  $\lambda'_1 = n, \lambda'_2 = \cdots = \lambda'_n = 0$

$$\text{又 } |0E - B| = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -n \end{vmatrix}$$

所以  $r(0E - B) = 1$

故  $B$  的  $n-1$  重特征值  $0$  有  $n-1$  个线性无关的特征向量

$$\text{所以 } B \text{ 也可以相似对角化, 且 } B \sim \begin{bmatrix} n & & & \\ & 0 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 0 \end{bmatrix}$$

所以  $A$  与  $B$  相似。

22、

解析: (1)

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P(Y \leq y) \\ &= P(Y \leq y, X = 1) + P(Y \leq y, X = 2) \\ &= P(Y \leq y | X = 1)P(X = 1) + P(Y \leq y | X = 2)P(X = 2) \\ &= \frac{1}{2}P(Y \leq y | X = 1) + \frac{1}{2}P(Y \leq y | X = 2) \end{aligned}$$

① 当  $y < 0$  时,  $F_Y(y) = 0$

② 当  $0 \leq y < 1$  时,  $F_Y(y) = \frac{1}{2}y + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}y = \frac{3}{4}y$

③ 当  $1 \leq y < 2$  时,  $F_Y(y) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} y = \frac{1}{2} + \frac{y}{4}$

④ 当  $y \geq 2$  时,  $F_Y(y) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$

综上:  $F_Y(y) = \begin{cases} 0 & y < 0 \\ \frac{3}{4}y & 0 \leq y < 1 \\ \frac{1}{2} + \frac{y}{4} & 1 \leq y < 2 \\ 1 & y \geq 2 \end{cases}$

(2)

$$f_Y(y) = F'_Y(y) = \begin{cases} \frac{3}{4} & 0 < y < 1 \\ \frac{1}{4} & 1 \leq y < 2 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} EY &= \int_{-\infty}^{+\infty} y f_Y(y) dy = \frac{3}{4} \int_0^1 y dy + \frac{1}{4} \int_1^2 y dy \\ &= \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \times \frac{3}{2} = \frac{3}{4} \end{aligned}$$

23、

解析: (1)

$$F(x; \theta) = \begin{cases} 1 - e^{-\frac{x^2}{\theta}} & x \geq 0 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

$$\text{所以 } f(x; \theta) = F'(x; \theta) = \begin{cases} \frac{2x}{\theta} e^{-\frac{x^2}{\theta}} & x \geq 0 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

$$EX = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x; \theta) dx = \int_0^{+\infty} x \frac{2x}{\theta} e^{-\frac{x^2}{\theta}} dx = -\int_0^{+\infty} x d e^{-\frac{x^2}{\theta}} = -x e^{-\frac{x^2}{\theta}} \Big|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{\theta}} dx = \sqrt{\pi\theta}$$

$$EX^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x; \theta) dx = \int_0^{+\infty} x^2 \frac{2x}{\theta} e^{-\frac{x^2}{\theta}} dx \stackrel{\text{令 } x^2 = t}{=} \int_0^{+\infty} t \frac{2\sqrt{t}}{\theta} e^{-\frac{t}{\theta}} \frac{1}{2\sqrt{t}} dt = \int_0^{+\infty} t \frac{1}{\theta} e^{-\frac{t}{\theta}} dt = \theta$$

(2) 设  $x_1, x_2, \dots, x_n$  为样本的观测值

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^n f(x_{ij}, \theta) = \begin{cases} \frac{2^n \prod_{i=1}^n x_i}{\theta^n} e^{-\frac{1}{\theta} \sum_{i=1}^n x_i^2} & x_i \geq 0 (i = 1, 2, \dots, n) \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

$x_i \geq 0 (i=1, 2, \dots, n)$  时,

$$\text{当 } L(\theta) = \frac{2^n \prod_{i=1}^n x_i}{\theta^n} e^{-\frac{1}{\theta} \sum_{i=1}^n x_i^2}$$

$$\ln L(\theta) = n \ln 2 + \ln \prod_{i=1}^n x_i - n \ln \theta - \frac{1}{\theta} \sum_{i=1}^n x_i^2$$

$$\text{令: } \frac{d \ln L(\theta)}{d\theta} = -\frac{n}{\theta} + \frac{1}{\theta^2} \sum_{i=1}^n x_i^2 = 0$$

$$\Rightarrow \hat{\theta}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 \text{ 为 } \theta \text{ 的最大似然估计值}$$

(3)

$\because x_1, x_2, \dots, x_n$  独立同分布,  $\therefore x_1^2, x_2^2, \dots, x_n^2$  独立同分布

又  $E x_i^2 = \theta (i = 1, 2, \dots, n)$  由辛钦大数定理

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left\{ \left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 - E \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 \right| < \varepsilon \right\} = 1$$

$$E \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E x_i^2 = \theta$$

$\therefore$  存在实数  $a = \theta$ , st. 对于  $\forall \varepsilon > 0$ ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left\{ \left| \hat{\theta}_n - a \right| < \varepsilon \right\} = 1$$