2014 年全国硕士研究生入学统一考试

数学三试题

一、选择题：1～8 小题，每小题 4 分，共 32 分，下列每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求的，请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上.

（1）设 $\lim a_n = a,$ 且 $a \neq 0,$ 则当 n 充分大时有（　　）

（A）$|a_n| > \frac{|a|}{2}$

（B）$|a_n| < \frac{|a|}{2}$

（C）$a_n > a - \frac{1}{n}$

（D）$a_n < a + \frac{1}{n}$

（2）下列曲线有渐近线的是（　　）

（A）$y = x + \sin x$

（B）$y = x^2 + \sin x$

（C）$y = x + \sin\frac{1}{x}$

（D）$y = x^2 + \sin\frac{1}{x}$

（3）设 $P(\mathrm{x}) = \mathrm{a} + bx + cx^2 + dx^3$，当 $x \to 0$ 时，若 $P(\mathrm{x}) - \tan\mathrm{x}$ 是比 x^3 高阶的无穷小，则下列试题中错误的是

（A）$a = 0$

（B）$b = 1$

（C）$c = 0$

（D）$d = \frac{1}{6}$

（4）设函数 $f(x)$ 具有二阶导数，$g(x) = f(0)(1-x) + f(1)x$，则在区间 $[0,1]$ 上（　　）

（A）当 $f'(x) \geq 0$ 时，$f(x) \geq g(x)$

（B）当 $f'(x) \geq 0$ 时，$f(x) \leq g(x)$

（C）当 $f'(x) \leq 0$ 时，$f(x) \geq g(x)$

（D）当 $f'(x)\le 0$ 时，$f(x)\ge g(x)$

（5）行列式 $\begin{vmatrix} 0 & a & b & 0 \\ a & 0 & 0 & b \\ 0 & c & d & 0 \\ c & 0 & 0 & d \end{vmatrix} =$

（A）$(ad-bc)^2$

（B）$-(ad-bc)^2$

（C）$a^2d^2-b^2c^2$

（D）$b^2c^2-a^2d^2$

（6）设 a_1,a_2,a_3 均为 3 维向量，则对任意常数 k,l，向量组 $\alpha_1+k\alpha_3,\alpha_2+l\alpha_3$ 线性无关是向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关的

（A）必要非充分条件
（B）充分非必要条件
（C）充分必要条件
（D）既非充分也非必要条件
（7）设随机事件 A 与 B 相互独立，且 P（B）=0.5，P(A-B)=0.3，求 P（B-A）=（　　）
（A）0.1
（B）0.2
（C）0.3
（D）0.4
（8）设 X_1,X_2,X_3 为来自正态总体 $N(0,\sigma^2)$ 的简单随机样本，则统计量 $\dfrac{X_1-X_2}{\sqrt{2}|X_3|}$ 服从的分布为
（A）F（1,1）
（B）F（2,1）
（C）t(1）
（D）t(2)

二、填空题：9–14 小题，每小题 4 分，共 24 分，请将答案写在答题纸指定位置上.

(9)设某商品的需求函数为 $Q=40-2P$（P 为商品价格），则该商品的边际收益为_________。

(10)设 D 是由曲线 $xy+1=0$ 与直线 $y+x=0$ 及 y=2 围成的有界区域，则 D 的面积为_________。

(11)设 $\int_0^a xe^{2x}dx=\dfrac{1}{4}$，则 $a=$______.

(12) 二次积分 $\int_0^1 dy\int_y^1 (\frac{e^{x^2}}{x}-e^{y^2})dx =$ ________.

（13）设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2-x_2^2+2ax_1x_3+4x_2x_3$ 的负惯性指数为 1，则 a 的取值范围是________

（14）设总体 X 的概率密度为 $f(x;\theta)=\begin{cases}\frac{2x}{3\theta^2} & \theta<x<2\theta \\ 0 & 其它\end{cases}$，其中 θ 是未知参数，$X_1,X_2,...,X_n$，为来自总体 X 的简单样本，若 $c\sum_{i=1}^{n}x_i^2$ 是 θ^2 的无偏估计，则 c = ________

三、解答题：15—23 小题，共 94 分.请将解答写在答题纸指定位置上.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

（15）（本题满分 10 分）

求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\int_1^x\left[t^2\left(e^{\frac{1}{t}}-1\right)-t\right]dt}{x^2\ln(1+\frac{1}{x})}$

（16）（本题满分 10 分）

设平面区域 $D=\{(x,y)|1\le x^2+y^2\le 4, x\ge 0, y\ge 0\}$，计算 $\iint\limits_D \frac{x\sin(\pi\sqrt{x^2+y^2})}{x+y}dxdy.$

（17）（本题满分 10 分）

设函数 $f(u)$ 具有 2 阶连续导数，$z=f(e^x\cos y)$ 满足 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=4(z+e^x\cos y)e^{2x}$，若 $f(0)=0, f'(0)=0$，求 $f(u)$ 的表达式。

（18）（本题满分 10 分）

求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+3)x^n$ 的收敛域及和函数。

（19）（本题满分 10 分）

设函数 $f(x),g(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，且 $f(x)$ 单调增加，$0\le g(x)\le 1$，证明：

（I）$0\le\int_a^x g(t)dt\le x-a, x\in[a,b]$;

（II）$\int_a^{a+\int_a^b g(t)dt} f(x)dx\le\int_a^b f(x)g(x)dx.$

（20）（本题满分 11 分）设 $A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 3 & -4\\ 0 & 1 & -1 & 1\\ 1 & 2 & 0 & -3\end{pmatrix}$，$E$ 为 3 阶单位矩阵。

①求方程组 $Ax=0$ 的一个基础解系；　　②求满足 $AB=E$ 的所有矩阵 B

（21）（本题满分 11 分）证明 n 阶矩阵 $\begin{pmatrix}1 & 1 & \dots & 1\\ 1 & 1 & \dots & 1\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1 & 1 & \dots & 1\end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix}0 & 0 & \dots & 1\\ 0 & 0 & \dots & 2\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \dots & n\end{pmatrix}$ 相似。

（22）（本题满分 11 分）

设随机变量 X 的概率分布为 P{X=1}=P{X=2}=$\frac{1}{2}$，在给定 $X=i$ 的条件下，随机变量 Y 服从均匀分布 $U(0,i)(i=1,2)$

（1）求 Y 的分布函数 $F_Y(y)$

（2）求 EY

（23）（本题满分 11 分）

设随机变量 X 与 Y 的概率分布相同，X 的概率分布为 $P\{X=0\}=\frac{1}{3},P\{X=1\}=\frac{2}{3}$，且 X 与 Y 的相关系数 $\rho_{XY}=\frac{1}{2}$

（1）　求（X，Y）的概率分布

（2）求 P{X+Y≤1}

2014 年全国硕士研究生入学统一考试

数学三试题答案

一、选择题：1～8 小题，每小题 4 分，共 32 分，下列每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求的，请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上.

（1）A

（2）C

（3）D

（4）C

（5）B

（6）A

（7）（B）

（8）（C）

二、填空题：9–14 小题，每小题 4 分，共 24 分，请将答案写在答题纸指定位置上.

（9）$\frac{dR}{dp}=40-4p$

（10）$\frac{3}{2}-ln2$

（11）$a=\frac{1}{2}$

（12）$\frac{1}{2}(e-1)$

（13）[-2,2]

（14）$\frac{2}{5n}$

三、解答题：15—23 小题，共 94 分.请将解答写在答题纸指定位置上.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

（15）【答案】

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_1^x[t^2(e^{\frac{1}{x}}-1)-t]dt}{x^2 ln(1+\frac{1}{x})}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{(e^{\frac{1}{x}}-1)\int_1^x t^2dt-\int_1^x tdt}{x}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}x^2(e-1)-x$$

令$u=\frac{1}{x}$,

则$\lim\limits_{x\to+\infty}x^2(e-1)-x$

$$=\lim_{u\to0^+}\frac{e^u-1-u}{u^2}$$

$$=\lim_{u\to0^+}\frac{e^u-1}{2u}=\frac{1}{2}$$

（16）【答案】

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_1^2\frac{\rho\cos\theta\sin\pi\rho}{\rho\cos\theta+\rho\sin\theta}\rho d\rho$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos\theta}{\cos\theta+\sin\theta}d\theta\int_1^2\rho\sin\pi\rho d\rho$$

$$=-\frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos\theta}{\cos\theta+\sin\theta}d\theta\int_1^2\rho d\cos\pi\rho$$

$$=-\frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos\theta}{\cos\theta+\sin\theta}d\theta(\rho\cos\pi\rho\Big|_1^2-\frac{1}{\pi}\int_1^2\cos\pi\rho d\pi\rho)$$

$$=-\frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos\theta}{\cos\theta+\sin\theta}d\theta\cdot(2+1)$$

$$=-\frac{3}{\pi}\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta$$

$$=-\frac{3}{4}$$

（17）【答案】

$$\frac{\partial E}{\partial x}=f'(e^x\cos y)e^x\cos y$$

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2}=f''(e^x\cos y)e^{2x}\cos^2 y+f'(e^x\cos y)e^x\cos y$$

$$\frac{\partial E}{\partial y}=f'(e^x\cos y)e^x(-\sin y)$$

$$\frac{\partial^2 E}{\partial y^2}=f''(e^x\cos y)e^{2x}\sin^2 y+f'(e^x\cos y)e^x(-\cos y)$$

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 E}{\partial y^2}=f''(e^x\cos y)e^{2x}=(4E+e^x\cos y)e^{2x}$$

$$f''(e^x\cos y)=4f(e^x\cos y)+e^x\cos y$$

令 $e^x\cos y=u$，

则 $f''(u)=4f(u)+u$，

故 $f(u)=C_1e^{2u}+C_2e^{-2u}-\dfrac{u}{4},(C_1,C_2\text{为任意常数})$

由 $f(0)=0,f'(0)=0,$ 得

$$f(u)=\frac{e^{2u}}{16}-\frac{e^{-2u}}{16}-\frac{u}{4}$$

（18）【答案】

由 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+2)(n+4)}{(n+1)(n+3)}=1$，得 $R=1$

当 $x=1$ 时，$\sum\limits_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+3)$ 发散，当 $x=-1$ 时，$\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n+1)(n+3)$ 发散，

故收敛域为 $(-1,1)$。

$x\neq 0$ 时，

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+3)x^n=(\sum_{n=0}^{\infty}(n+3)\int_0^x(n+1)x^n dx)'$$

$$=(\sum_{n=0}^{\infty}(n+3)x^{n+1})'=(\frac{1}{x}\sum_{n=0}^{\infty}(n+3)x^{n+2})'$$

$$=(\frac{1}{x}(\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x(n+3)x^{n+2}dx)')'=(\frac{1}{x}(\sum_{n=0}^{\infty}x^{n+3})')'\quad 。$$

$$=(\frac{1}{x}(\frac{x^3}{1-x})')'=(\frac{3x-2x^2}{(1-x)^2})'=\frac{3-x}{(1-x)^3}=s(x)$$

$x=0$ 时，$s(x)=3$，故和函数 $s(x)=\dfrac{3-x}{(1-x)^3}$，$x\in(-1,1)$

（19）【答案】

证明：1）因为 $0\le g(x)\le 1$，所以有定积分比较定理可知，$\int_a^x 0dt\le\int_a^x g(t)dt\le\int_a^x 1dt$，即

$0\le\int_a^x g(t)dt\le x-a$。

2）令

$F(x)=\int_a^x f(t)g(t)dt-\int_a^{x+\int_a^x g(t)dt-} f(t)dt$

$F(a)=0$

$F'(x)=f(x)g(x)-f[a+\int_a^x g(t)dt]g(x)$

$=g(x)\{f(x)-f[a+\int_a^x g(t)dt]\}$

由 1）可知 $\int_a^x g(t)dt\le x-a$，

所以 $a+\int_a^x g(t)dt\le x$。

由 $f(x)$ 是单调递增，可知

$f(x)-f[a+\int_a^x g(t)dt]\ge 0$

由因为 $0\le g(x)\le 1$，所以 $F'(x)\ge 0$， $F(x)$ 单调递增，所以 $F(b)>F(a)=0$，得证。

（20）【答案】①$(-1,2,3,1)^T$ ②$B=\begin{pmatrix}-k_1+2 & -k_2+6 & -k_3-1\\ 2k_1-1 & 2k_2-3 & 2k_3+1\\ 3k_1-1 & 3k_2-4 & 3k_3+1\\ k_1 & k_2 & k_3\end{pmatrix}(k_1,k_2,k_3\in R)$

（21）【答案】利用相似对角化的充要条件证明。

（22）【答案】（1） $F_Y(y)=\begin{cases}0,y<0,\\ \frac{3}{4}y,0\le y<1,\\ \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}y\right),1\le y<2,\\ 1,y\ge 2.\end{cases}$

（2） $\frac{3}{4}$

（23）【答案】（1）

Y \ X	0	1
0	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$
1	$\frac{1}{9}$	$\frac{5}{9}$

（2） $\frac{4}{9}$