2013 年全国硕士研究生入学统一考试

数学(一)试卷

一、选择题(1-8 小题,每小题 4 分,共 32 分,下列每小题给出的四个选项中,只有一项符合题目要求,把所选项前的字母填在题后的括号内.)

1. 已知极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\arctan x}{x^k}=c$，其中 k，c 为常数，且 $c\neq 0$，则（　）

A. $k=2,c=-\dfrac{1}{2}$ B. $k=2,c=\dfrac{1}{2}$ C. $k=3,c=-\dfrac{1}{3}$ D. $k=3,c=\dfrac{1}{3}$

【考点分析】：无穷小的比较，同阶无穷小，洛必达法则的应用。

【求解过程】：D

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\arctan x}{x^k}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\dfrac{1}{1+x^2}}{kx^{k-1}}\text{（洛必达法则）}=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{x^2}{1+x^2}}{kx^{k-1}}=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{1}{1+x^2}}{kx^{k-3}}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{kx^{k-3}}$$

由于 c 为常数，则 k−3=0，即 k=3，因此 $c=\dfrac{1}{3}$。

【方法总结】：此类题目为典型的基础题，历年真题中出现若干次，也是一种经典的练习题目，此类题目解题方法比较固定，无非就是，洛必达法则，等价无穷小代换和泰勒公式的使用，读者对这类题目只要打好基础，多多练习即可；若此类问题解决不好，一定要充分的复习基础，考研数学基础第一。

2. 曲面 $x^2+\cos(xy)+yz+x=0$ 在点 $(0,1,-1)$ 处的切平面方程为（　）

A. $x-y+z=-2$ B. $x+y+z=0$ C. $x-2y+z=-3$ D. $x-y-z=0$

【考点分析】：切平面方程求法。

【求解过程】：A

一个曲面在某个点的切平面方程，核心就是该点处的法向量。法向量为（F_x，F_y，F_z）

$F_x=2x-y\sin(xy)+1=1$

$F_y=-x\sin(xy)+z=-1$

$F_z=y=1$

求得法向量为（1，-1，1），因此 $x-y+z=-2$。

【方法总结】：同样是考查基础的题目，详情见高数（同济版下册）98 页，关于切平面和切线的求法要熟练，教材中例题和本题十分相似，不再赘述。

3. 设 $f(x)=\left|x-\frac{1}{2}\right|$，$b_n=2\int_0^1 f(x)\sin n\pi x dx (n=1,2,\cdots)$，令 $S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\pi x$，则

$S(-\frac{9}{4})=$（ ）

A. $\frac{3}{4}$　　B. $\frac{1}{4}$　　C. $-\frac{1}{4}$　　D. $-\frac{3}{4}$

【考点分析】：傅里叶级数，收敛定理。

【求解过程】：C

注意观察本题目，和函数 $S(x)$ 形式为正弦级数，因此 $f(x)$ 是奇函数，同时观察 b_n 的形式，

得知周期为 2，$S(-\frac{9}{4})=S(-\frac{1}{4})=-S(\frac{1}{4})$，$\frac{1}{4}$ 为连续点，因此 $-S(\frac{1}{4})=-f(\frac{1}{4})=-\frac{1}{4}$

【方法总结】：傅里叶级数的题目类型比较单一，多数是考查和函数的求法和收敛定理的使用，收敛定理内容见高数（同济版下册）306 页，和函数求法见 316 页。

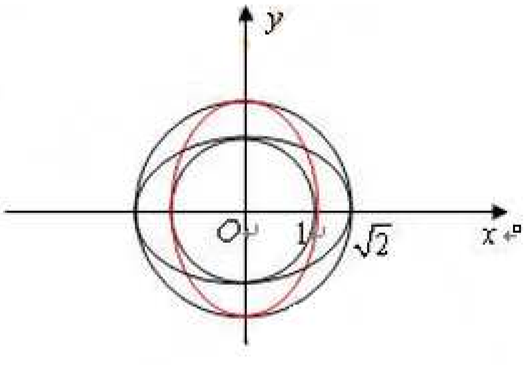
4. 设 $L_1: x^2+y^2=1$，$L_2: x^2+y^2=2$，$L_3: x^2+2y^2=2$，$L_4: 2x^2+y^2=2$ 为四条逆时针方向的平面曲线，记 $I_i=\int_{L_i}(y+\frac{y^3}{6})dx+(2x-\frac{x^3}{3})dy (i=1,2,3,4)$，则 $\max\{I_1,I_2,I_3,I_4\}=$

A. I_1　　B. I_2　　C. I_3　　D I_4

【考点分析】：格林公式。

【求解过程】：D

$I_i=\int_{L_i}(y+\frac{y^3}{6})dx+(2x-\frac{x^3}{3})dy (i=1,2,3,4)=\iint_{Di}(2-x^2-1-\frac{y^2}{2})(i=1,2,3,4)$（格林公式）$=\iint_{Di}(1-x^2-\frac{y^2}{2})(i=1,2,3,4)$，其中 D_i 表示 L_i 所围成的部分。如下图，红色部分（D_4）内部被积函数均为正值



可以发现被积函数在 D_4 内均为正值，且 D_4 面积大于 D_1，因此 $I_4>I_1$。

同时 D_2 的面积大于 D_4，并且包括 D_4 所有部分，而除去 D_4 的其他部分被积函数均为负值，

因此 $I_4 > I_2$。

并且 D_1 的面积小于 D_3，而 D_3 包括 D_1 所有部分，而除去 D_1 其他部分被积函数均为负值，

因此 $I_1 > I_3$。

综上，最大为 I_4。

【方法总结】：本题考察格林公式的使用，转化为二重积分后亦可直接算出四个积分的值然后比较，但明显增加了计算量。关于格林公式的定义见高数（同济版下册）202 页。

5.设 A,B,C 均为 n 阶矩阵，若 AB=C，且 B 可逆，则（　　）
A.矩阵 C 的行向量组与矩阵 A 的行向量组等价
B 矩阵 C 的列向量组与矩阵 A 的列向量组等价
C 矩阵 C 的行向量组与矩阵 B 的行向量组等价
D 矩阵 C 的列向量组与矩阵 B 的列向量组等价

【考点分析】：向量组等价定义。

【求解过程】：B
两个向量组等价，那说明他们列向量可以互相表示。

设 A，C 的列向量组为 a_i, c_i（$i=1,\ldots n$）。

$A(b_1,\ldots,b_n)=(c_1,\ldots,c_n)$,对于每一个向量 c_i，$c_i = Ab_i$，C 中各个列向量均可由 A 中列向量表示；由于 B 可逆，$A=CB^{-1}$，同理。两个向量组的任何一个列向量向量都可以由对方列向量线性表示。

【方法总结】：本题考察列向量组等价的定义。

6.矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ a & b & a \\ 1 & a & 1 \end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 相似的充分必要条件为（　　）

A. $a=0,b=2$　　B. $a=0,b$ 为任意常数

C. $a=2,b=0$　　D. $a=2,b$ 为任意常数

【考点分析】：相似矩阵。

【求解过程】：B
两个矩阵相似，他们拥有相同的特征值，分别为 2，b，0.设

A=$\begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ a & b & a \\ 1 & a & 1 \end{pmatrix}$,则$\left|\lambda E - A\right| = \begin{vmatrix} \lambda-1 & -a & -1 \\ -a & \lambda-b & -a \\ -1 & -a & \lambda-1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda+a & b-\lambda & a-\lambda \\ -a & \lambda-b & -a \\ -1 & -a & \lambda-1 \end{vmatrix} =$

$$\begin{vmatrix} \lambda & 0 & -\lambda \\ -a & \lambda-b & -a \\ -1 & -a & \lambda-1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ -a & \lambda-b & -2a \\ -1 & -a & \lambda-2 \end{vmatrix} = \lambda\left[(\lambda-b)(\lambda-2)-2a^2\right]$$

很明显只要满足 a=0 即可使 A 的特征值满足上述条件。

【方法总结】: 本题考察列相似矩阵的定义。

7. 设 X_1, X_2, X_3 是随机变量，且 $X_1 \quad N(0,1)$，$X_2 \quad N(0,2^2)$，$X_3 \quad N(5,3^2)$，

$P_i = P\left\{-2 \le X_i \le 2\right\}(i=1,2,3)$，则（　　）

A. $P_1 > P_2 > P_3$　　B. $P_2 > P_1 > P_3$　　C. $P_3 > P_2 > P_2$　　D $P_1 > P_3 > P_2$

【考点分析】：标准正态分布性质。

【求解过程】: A

全部转化到标准正态分布上。

$$P_1 = P(-2 < X_1 < 2) = \Phi(2) - \Phi(-2) = 2\Phi(2) - 1$$

$$P_2 = P(-1 < \frac{X_2 - 0}{2} < 1) = 2\Phi(1) - 1$$

$$P_3 = P\left(-\frac{7}{3} < \frac{X_3 - 5}{3} < -1\right) = \Phi\left(\frac{7}{3}\right) - \Phi(1)$$

通过观察标准正态分布图像可知，$P_1 > P_2 > P_3$。

【方法总结】: 本题考察标准正态分布的定义和性质。

8.设随机变量 $X \quad t(n)$, $Y \quad F(1,n)$，给定 $a(0 < a < 0.5)$，常数 c 满足 $P\left\{X > c\right\} = \alpha$，则

$P\left\{Y > c^2\right\} = ($　　$)$

A. α　　B. $1-\alpha$　　C. 2α　　D.$1-2\alpha$

【考点分析】：数理统计三大分布。

【求解过程】: C

$X \quad t(n)$，$Y \quad F(1,n)$，设 $Z_1 \quad N(0,1), Z_2 \quad \chi^2(n)$,因此 $Z_1^2 \quad \chi^2(1)$。

$X = \dfrac{Z_1}{\sqrt{Z_2 / n}}, Y = \dfrac{Z_1 / 1}{Z_2 / n}$，因此，可以得知

$P\left\{Y>c^2\right\}$

$=P\left\{X^2>c^2\right\}$

$=P\left\{X>c\right\}+P\left\{X<-c\right\}$

$=2\alpha$

【方法总结】：牢记三大分布的形式和性质是解决本题的关键。

二、填空题(9-14 小题,每小题 4 分,共 24 分,请将答案写在答题纸指定位置上.)

9.设函数 $y=f(x)$ 由方程 $y-x=e^{x(1-y)}$ 确定，则 $\lim\limits_{n\to\infty}n[f(\frac{1}{n})-1]=$____。

【考点分析】：隐函数求导，极限。

【求解过程】：1

$\lim\limits_{n\to\infty}n[f(\frac{1}{n})-1]=\lim\limits_{m\to0}\frac{[f(m)-1]}{m}=\lim\limits_{m\to0}f'(m)=f'(0)$ (设 m 为 n 的倒数)

方程左右两边对 x 求导，得：

$y'-1=e^{x(1-y)}(1-y-xy')$，当 x=0 时，带入得 y=1,将他们一并带入上式，

得 $y'(0)=1$，因此极限的值为 1.

【方法总结】：$\lim\limits_{n\to\infty}n[f(\frac{1}{n})-1]$ 为 $0*\infty$ 型的极限，此类极限求法为先将其化作 $\frac{0}{0}$ 型或者 $\frac{\infty}{\infty}$ 型，然后使用洛必达法则，等价无穷小代换或者泰勒公式求得。

10.已知 $y_1=e^{3x}-xe^{2x}$，$y_2=e^{x}-xe^{2x}$，$y_3=-xe^{2x}$ 是某二阶常系数非齐次线性微分方程的 3 个解，则该方程的通解 $y=$____。

【考点分析】：二阶常系数微分方程求解。

【求解过程】：$y=c_1e^x+c_2e^{3x}-xe^{2x}$

容易得知 $y_3=-xe^{2x}$ 是该方程的一个特解，而 y_1-y_3,y_2-y_3 为该方程对应的齐次方程的两个线性无关的特解，根据二阶常系数非齐次线性微分方程解的结构得知，该方程通解为：

$y=c_1e^x+c_2e^{3x}-xe^{2x}$。

【方法总结】：二阶常系数微分方程求解方法重在记忆，其出题形式不多变，多多练习熟悉即可。关于其求法详解见高数（同济版上册）325，332 页

11.设 $\begin{cases}x=\sin t\\ y=t\sin t+\cos t\end{cases}$ (t为参数)，则 $\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=\frac{\pi}{4}}=$____。

【考点分析】：参数方程求导。

【求解过程】：$\sqrt{2}$

先求一阶导数，$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{\sin t+t\cos t-\sin t}{\cos t}=t$，

$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d(\frac{dy}{dx})}{dx}=\frac{d(\frac{dy}{dx})}{dt}\bullet\frac{dt}{dx}=\sec t$，带入 t 的值，原式=$\sqrt{2}$。

【方法总结】：对于参数方程求导和反函数求导的题目，需要掌握求导的过程，特别对于其中二阶倒数甚至更高阶导数的求法，更需认真对待。

12. $\int_1^{+\infty}\frac{\ln x}{(1+x)^2}dx=$______。

【考点分析】：反常积分，分部积分法。

【求解过程】：$\ln 2$

$$
\begin{aligned}
&\int_1^{+\infty}\frac{\ln x}{(1+x)^2}dx=-\int_1^{+\infty}\ln x d\frac{1}{1+x}\\
&=-\frac{\ln x}{1+x}\Big|_1^{+\infty}+\int_1^{+\infty}\frac{dx}{(1+x)x}\\
&=\lim_{x\to\infty}(-\frac{\ln x}{1+x})-0+\int_1^{+\infty}d(\ln x-\ln(1+x))\\
&=0-0+0-(-\ln 2)\\
&=\ln 2
\end{aligned}
$$

【方法总结】：分部积分法的应用是本题的关键，对于常见函数的微分积分公式的记忆也是不可或缺的。

13.设 A=(a_{ij})是 3 阶非零矩阵，$|A|$ 为 A 的行列式，A_{ij} 为 a_{ij} 的代数余子式.若 $a_{ij}+A_{ij}=0(i,j=1,2,3)$，则｜A｜＝______。

【考点分析】：伴随矩阵。

【求解过程】：-1

从题目条件 $a_{ij}+A_{ij}=0$ 得知 $A_{ij}=-a_{ij}$，根据 A 和它的伴随矩阵之间的关系得知

$$A^*=-A^T \quad (1)$$

再根据公式 $AA^*=|A|E=-AA^T$，两边取行列式 $-|A|^2=|A|^3$ 解得：

$$|A|=0 \text{ 或} |A|=-1$$

而对于 A 对应的行列式如果为 0，由（1）得知与非零阵的条件矛盾。

因此 $|A|=-1$。

【方法总结】：$AA^*=|A|E$，该公式的使用极为广泛，需要熟练掌握。

14.设随机变量 Y 服从参数为 1 的指数分布，a 为常数且大于零，则 P{Y≤a+1|Y＞a}=_____

【考点分析】：贝叶斯公式，指数分布公式。

【求解过程】：$1-\dfrac{1}{e}$。

$$P\left\{Y\le a+1\middle|Y>a\right\}$$
$$=\frac{P\left\{a<Y\le a+1|\right\}}{P\left\{Y>a\right\}}$$
$$=\frac{F(a+1)-F(a)}{1-F(a)}$$
$$=\frac{e^{-a}-e^{-(a+1)}}{e^{-a}}$$
$$=1-\frac{1}{e}$$

【方法总结】：对于几个常见的分布函数的形式要牢记并熟练掌握。

三、解答题(15－23 小题,共 94 分.请将解答写在答题纸指定的位置上.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.)

（15）（本题满分 10 分）

计算 $\int_0^1\dfrac{f(x)}{\sqrt{x}}dx$，其中 $f(x)=\int_1^x\dfrac{\ln(t+1)}{t}dt.$

【考点分析】：换元积分法，分部积分法，积分上限函数求导。

【求解过程】：$8-2\pi-4\ln 2$。

被积函数带有积分号，要先想办法去掉积分号，先使用分部积分。

原式

$$=2\int_0^1 f(x)d\sqrt{x}$$
$$=2f(x)\sqrt{x}\Big|_0^1-2\int_0^1\sqrt{x}df(x)\text{......(分部积分）}$$
$$=2f(1)-2\int_0^1\sqrt{x}df(x)$$
$$=0-2\int_0^1\sqrt{x}\bullet\frac{\ln(1+x)}{x}dx\text{.......(积分上限函数求导)}$$
$$=-2\int_0^1\frac{\ln(1+x)}{\sqrt{x}}dx$$
$$=-4\int_0^1\ln(1+x)d\sqrt{x}\text{......(分部积分)}$$
$$=4\int_0^1\sqrt{x}d\ln(1+x)-4[\ln(1+x)\bullet\sqrt{x}]\Big|_0^1$$
$$=4\int_0^1\frac{\sqrt{x}}{1+x}dx-4\ln 2$$

通过计算后只需求得 $4\int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{1+x}dx$ 的值即可。

$$
\begin{aligned}
&4\int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{1+x}dx \\
&=4\int_0^1 \frac{t}{1+t^2}dt^2 (x=t^2) \\
&=4\int_0^1 \frac{2t^2}{1+t^2}dt \\
&=8\int_0^1 (1-\frac{1}{1+t^2})dt \\
&=8-8\arctan t|_0^1 \\
&=8-2\pi
\end{aligned}
$$

综上所述，原式值为 $8-2\pi-4\ln 2$ 。

【方法总结】：换元积分法和分部积分法要熟练掌握，在准确记忆的基础上多多练习计算积分，就可以熟能生巧，积分上下限函数求导方法要熟练掌握，其具体方法见高数(同济版上册)237 页。

(16)(本题 10 分)

设数列｛a_n｝满足条件：$a_0=3, a_1=1$，$a_{n-2}-n(n-1)a_n=0(n\ge 2)$. S（x）是幂级数

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$的和函数.

（1）证明：$S''(x)-S(x)=0$;

（2）求 $S(x)$的表达式.

【考点分析】：微分方程，幂级数。

【求解过程】：

（1）证明： $S(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$

求导得：$S'(x)=\sum_{n=1}^{\infty} na_n x^{n-1}=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^n$

求二阶导数：$S''(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)na_{n+1}x^{n-1}=\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n$

根据题目已知条件：$a_{n-2}-n(n-1)a_n=0$ 得知 $a_n-(n+2)(n+1)a_{n+2}=0$，易得知：

$$S''(x)-S(x)=0$$

证毕

（2）由（1）得知微分方程对应的特征方程为$r^2-1=0$,解得$r_1=1,r_2=-1$,因此$S(x)$为：

$$C_1e^x+C_2e^{-x}$$

带入$S(0)=a_0=3$，$S^{'}(0)=a_1=1$，解得C_1，C_2分别为2，1.。

综上所述，$S(x)=2e^x+e^{-x}$。

【方法总结】：幂级数求导和积分的性质要熟练掌握（同济高数下276页），几种常见的微分方程解法需牢记。

（17）（本题满分10分）

求函数$f(x,y)=(y+\frac{x^3}{3})e^{x+y}$的极值.

【考点分析】：多元函数极值及其求法。

【求解过程】：

根据二元函数极值的必要条件，得到方程组：

$$\begin{cases} f_x(x,y)=(y+\frac{x^2}{3}+x^2)e^{x+y}=0 \\ f_y(x,y)=(y+\frac{x^2}{3}+1)e^{x+y}=0 \end{cases}$$

求得驻点为$(-1,-\frac{2}{3}),(1,-\frac{4}{3})$。

根据取得极值的充分条件：

$$f_{xx}(x,y)=(2x+2x^2+y+\frac{x^3}{3})e^{x+y}$$

$$f_{xy}(x,y)=(1+x^2+y+\frac{x^3}{3})e^{x+y}$$

$$f_{yy}(x,y)=(1+1+y+\frac{x^3}{3})e^{x+y}$$

在点$(-1,-\frac{2}{3})$上，$AC-B^2=-2e^{-\frac{10}{3}}<0$，所以函数在此点不存在极值。

在点$(1,-\frac{4}{3})$上，$AC-B^2=2e^{-\frac{2}{3}}>0,A>0$，所以函数在此点取得极小值，带入得函数值为$-e^{-\frac{1}{3}}$。

综上所述，函数在$(1,-\frac{4}{3})$上取得极小值$-e^{-\frac{1}{3}}$。

【方法总结】：对于多元函数极值求法，教材叙述较为详细，同时提醒一下容易被同学们忽略的地方：

1) 极值问题除了要考虑函数的驻点外，也要考虑一些偏导数不存在的点。
2) 对于条件极值和拉格朗日乘数法也要熟练掌握。

在同济版高数下册 111 页对于函数极值问题的求法叙述十分详细，笔者认为只要练习几道题，这类问题完全可以解决。

(18)(本题满分 10 分)

设奇函数 $f(x)$ 在 $\left[-1,1\right]$ 上具有二阶导数，且 $f(1)=1$，证明：

（1） 存在 $\xi\in(0,1)$，使得 $f'(\xi)=1.$

（2） 存在 $\eta\in(-1,1)$，使得 $f''(\eta)+f'(\eta)=1.$

【考点分析】：中值定理。

【求解过程】：

（1） 构造函数 $F(x)=f(x)-x$。因为 $f(x)$ 是奇函数所以得到 $f(0)=0$，进而得到：

$$F(0)=f(0)-0=0=F(1)=f(1)-1=0$$

根据罗尔定理，存在 $\xi\in(0,1)$，使得 $F'(\xi)=f'(\xi)-1=0$ 即 $f'(\xi)=1$,证毕。

（2） 构造函数 $G(x)=f(x)+f'(x)-x$。因为 $f(x)$ 是奇函数得 $f(-1)=-f(1)=-1$，可以得到：

$$\begin{aligned}G(1)&=f(1)+f'(1)-1=f'(1)\\G(-1)&=f(-1)+f'(-1)-(-1)=f'(-1)\end{aligned}$$

根据 $f(x)$ 为奇函数得到 $f(x)=-f(-x)$，两边求导 $f'(x)=f'(-x)$ 也就得知

$$f'(1)=f'(-1)\Rightarrow G(1)=G(-1)$$

根据罗尔定理，存在 $\xi\in(-1,1)$，使得 $G'(\xi)=f''(\eta)+f'(\eta)-1=0$ 即

存在 $\eta\in(-1,1)$，使得 $f''(\eta)+f'(\eta)=1$,证毕。

【方法总结】：使用罗尔定理证明函数存在性问题，关键在于构造函数，构造函数的方法是求得要证明式的原函数，有时可能需要借助 e^x 等，如第二问中构造函数为 $e^x(f'(x)-1)$ 亦可，这时使用第一问的结论 $(-\xi,\xi)$ 内使用罗尔定理得到证明。

19.(本题满分 10 分)

设直线 L 过 A(1,0,0), B(0,1,1) 两点将 L 绕 z 轴旋转一周得到曲面 Σ，Σ 与平面 $z=0,z=2$

所围成的立体为Ω。

（1） 求曲面Σ的方程；

（2） 求Ω的形心坐标。

【考点分析】：直线旋转形成曲面的方程，立体的形心。

【求解过程】：

（1）求得 L 的方向向量为$\overline{AB}=\{-1,1,1\}$，因此直线 L 的方程为：

$$L:\frac{x-1}{-1}=\frac{y}{1}=\frac{z}{1}=t$$

绕 z 轴旋转所得到的旋转曲面的方程为：

$$\begin{cases} x=\sqrt{(1-t^2)+t^2}\cos\theta \\ y=\sqrt{(1-t^2)+t^2}\sin\theta \\ z=t \end{cases}$$

消去参数，因此 L 绕 z 轴旋转后得到的曲面方程为:

$x^2+y^2=(1-z)^2+z^2$ 即 $x^2+y^2=2z^2-2z+1$。

（2） 求型心坐标的关键为求$\overline{z}$，由于立体关于 x,y 轴对称，因此形心坐标为$(0,0,\overline{z})$。

根据形心坐标公式：

$$\overline{z}=\frac{\iiint\limits_{\Omega}zdv}{\iiint\limits_{\Omega}dv}=\frac{\int_0^2 zdz\iint\limits_{2z^2-2z+1}dxdy}{\int_0^2 dz\iint\limits_{2z^2-2z+1}dxdy}=\frac{\pi\int_0^2\left(2z^3-2z^2+z\right)dz}{\pi\int_0^2\left(2z^2-2z+1\right)dz}=\frac{\pi\left(8-\frac{16}{3}+2\right)}{\pi\left(\frac{16}{3}-4+2\right)}=\frac{\frac{14}{3}\pi}{\frac{10}{3}\pi}=\frac{7}{5}$$

综上，求Ω的形心坐标为$(0,0,\frac{7}{5})$。

【方法总结】：曲面参数方程求法是固定的，具体方法见同济版高数下册 34 页；而形心的求法为固定公式，记住并会应用即可，具体方法见同济版高数下册 170 页关于质心的求法。

20.（本题满分 11 分）

设$A=\begin{pmatrix}1 & a\\ 1 & 0\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & b\end{pmatrix}$，当 a,b 为何值时，存在矩阵 C 使得 AC-CA=B,并求所有矩阵 C。

【考点分析】：矩阵基本运算，线性方程组。

（本题有必要细说一下，笔者在考场第一次遇见这个题目时候，开始觉得是通过变换这个等式 AC-CA=B 来求解，导致浪费了一部分时间，实际上本题是解线性方程组的题目，而方法也是十分简单的设出 C 的四个未知数即可。）

【求解过程】：

设$C=\begin{pmatrix}x_1 & x_2\\ x_3 & x_4\end{pmatrix}$,通过运算 AC，CA 得：

$$AC=\begin{pmatrix}1 & a\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1 & x_2\\ x_3 & x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1+ax_3 & x_2+ax_4\\ x_1 & x_2\end{pmatrix},\ CA=\begin{pmatrix}x_1 & x_2\\ x_3 & x_4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & a\\ 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1+x_2 & ax_1\\ x_3+x_4 & ax_3\end{pmatrix}$$

$AC-CA=\begin{pmatrix}-x_2+ax_3 & -ax_1+x_2+ax_4\\ x_1-x_3-x_4 & x_2-ax_3\end{pmatrix}=B=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & b\end{pmatrix}$,问题转化为解线性方程组：

$$\begin{cases}-x_2+ax_3=0\\ -ax_1+x_2+ax_4=1\\ x_1-x_3-x_4=1\\ x_2-ax_3=b\end{cases}$$

$$\overline{A}=\begin{pmatrix}0 & -1 & a & 0 & 0\\ -a & 1 & 0 & a & 1\\ 1 & 0 & -1 & -1 & 1\\ 0 & 1 & -a & 0 & b\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}0 & -1 & a & 0 & 0\\ -a & 0 & a & a & 1\\ 1 & 0 & -1 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & b\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}0 & -1 & a & a & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & a+1\\ 1 & 0 & -1 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & b\end{pmatrix}$$

（此处$\to$代表初等行变换）

若此线性方程组有解，那么可知 a,b 分别为-1，0。带入，

$$\to\begin{pmatrix}1 & 0 & -1 & -1 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\text{解得 }X=k_1\begin{pmatrix}1\\ -1\\ 1\\ 0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 0\\ 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}k_1+k_2+1\\ -k_1\\ k_1\\ k_2\end{pmatrix}$$

综上所述 $C=\begin{pmatrix}k_1+k_2+1 & -k_1\\ k_1 & k_2\end{pmatrix}$,（其中$k_1,k_2$为任意常数）。

【方法总结】：本题是一个线性方程组十分基础的题目，唯一存在可以认为为难点的地方是，可能根据以前的经验，本题并不是一个线性方程组的题目。

21.（本题满分 11 分）

设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=2(a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3)^2+(b_1x_1+b_2x_2+b_3x_3)^2$，记 $\alpha=\begin{pmatrix}a_1\\ a_2\\ a_3\end{pmatrix}$，

$\beta=\begin{pmatrix}b_1\\ b_2\\ b_3\end{pmatrix}$。

（1） 证明二次型 f 对应的矩阵为$2\alpha\alpha^T+\beta\beta^T$；

（2） 若α,β正交且均为单位向量，证明 f 在正交变换下的标准形为$2y_1^2+y_2^2$。

【考点分析】：二次型。

【求解过程】:

（1） 证明：

$$f=2\left(x_1,x_2,x_3\right)\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}\left(a_1,a_2,a_3\right)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}+\left(x_1,x_2,x_3\right)\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}\left(b_1,b_2,b_3\right)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$$

$$=X^T\left(2\alpha\alpha^T\right)X+X^T\left(\beta\beta^T\right)X=X^T\left(2\alpha\alpha^T+\beta\beta^T\right)X$$

因此二次型 f 对应的矩阵为$2\alpha\alpha^T+\beta\beta^T$。证毕。

（2） 证明：设（1）中矩阵为A，$A\alpha=(2\alpha\alpha^T+\beta\beta^T)\alpha=2\alpha$求得 A 的一个特征值 2

$A\beta=(2\alpha\alpha^T+\beta\beta^T)\beta=\beta$求得 A 的另一个特征值为 1。

在三维空间内必存在一个向量γ，它和α,β都正交。

因此$A\gamma=(2\alpha\alpha^T+\beta\beta^T)\gamma=0\gamma$。

因此 f 在正交变换下的标准形为$2y_1^2+y_2^2$。

【方法总结】：二次型基础题，熟练掌握基本内容即可。

22.（本题满分 11 分）

设随机变量 X 的概率密度为$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{a}x^2, & 0<x<3,\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$令随机变量$Y=\begin{cases}2, & x\le 1,\\ x, & 1<x<2,\\ 1, & x\ge 2\end{cases}$

（1） 求 Y 的分布函数；

（2） 求概率$P\left\{X\le Y\right\}$.

【考点分析】：分布函数。

【求解过程】:

（1） 先求出a的值：$\int_0^3\frac{x^2}{a}dx=\int_0^3\frac{1}{a}d\frac{x^3}{3}=\frac{9}{a}=1$，解得$a=9$。

设 Y 的分布函数为$F_Y(y)$，可知：

$$y<1\text{时，}F_Y(y)=0;$$

$$1\le y<2\text{时},F_Y(y)=\int_2^3\frac{x^2}{9}dx+\int_1^y\frac{x^2}{9}dx=\frac{1}{27}(y^3+18);$$

$$y\ge 2\text{时，}F_Y(y)=1$$

综上所述，Y 的分布函数为 $F_Y(y)=\begin{cases}0, y<1\\ \dfrac{1}{27}(y^3+18),1\le y<2\\ 1, y\ge 2\end{cases}$。

（2）$P\{X\le Y\}=P\{X\le 1\}+P\{1<X\le 2\}=P\{X\le 2\}=\int_0^2\frac{x^2}{9}dx=\frac{8}{27}$

【方法总结】：熟练掌握分布函数定义是解决本题的关键。

23.(本题满分 11 分)

设总体 X 的概率密度为 $f(x;\theta)=\begin{cases}\dfrac{\theta^2}{x^3}e^{-\frac{\theta}{x}}, & x>0,\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$ 其中 θ 为未知参数且大于零，

$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自总体 X 的简单随机样本。

（1） 求 θ 的矩估计量；

（2） 求 θ 的最大似然估计量。

【考点分析】：矩估计和极大似然估计。

【求解过程】：

（1）$EX=\int_0^{+\infty}x\frac{\theta^2}{x^3}e^{-\frac{\theta}{x}}dx=\int_0^{+\infty}\theta de^{-\frac{\theta}{x}}=\theta(\lim\limits_{x\to+\infty}e^{-\frac{\theta}{x}}-\lim\limits_{x\to 0}e^{-\frac{\theta}{x}})=\theta$

因此 θ 的矩估计量 $\hat{\theta}=\bar{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$。

（2） 构造似然函数 $L=\dfrac{\theta^{2n}}{(\prod_{i=1}^{n}x_i)^3}e^{-\sum_{i=1}^{n}\frac{n}{x_i}}$，对似然函数取对数：

$$\ln L=2n\ln\theta-3\ln(x_1x_2\cdots x_n)-\sum_{i=1}^{n}\frac{\theta}{x_i}$$

令 $\frac{\partial\ln L}{\partial\theta}=\frac{2n}{\theta}-(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i})=0$，得到 θ 的最大似然估计量 $\hat{\theta}=\dfrac{2n}{\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}}$。

【方法总结】：矩估计和最大似然估计是常考的内容，并且解决的方法单一，一定要对此类题目掌握熟练，争取满分。