2013年全国硕士研究生入学统一考试数学农试题

三、解答题：15～23 小题，共 94 分. 请将解答写在答题纸指定位置上. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(15) 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\ln(1+2x)}-\dfrac{1}{\sin 2x}\right)$.

(16) 设函数 $f(x)=e^{-\frac{x^2}{2}}+1$，求曲线的凹凸区间，拐点和渐近线.

(17) 计算定积分 $\int_0^{\frac{1}{2}}\dfrac{x\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx$.

(18) 计算二重积分 $\iint\limits_D (x-1)y\,dxdy$，其中区域 D 由曲线 $x=1+\sqrt{y}$ 和直线 $y=1-x$ 及 $y=1$ 围成.

(19) 设函数 $f(x)$ 对任意的 x,y 恒有 $f(x+y)=e^y f(x)+e^x f(y)$，且 $f'(0)=e$，求 $f(x)$.

(20) (本题满分 11 分)

$$\begin{cases} x_1-x_2+2x_3+x_4=1 \\ 2x_1-x_2+x_3+2x_4=3 \\ x_1 \qquad -x_3+x_4=2 \\ 3x_1-x_2 \qquad +x_5=5 \end{cases}$$

(I) 求方程组的通解 (II) 求使 $x_1=x_2$ 的全部解.

(21) (本题满分 11 分)

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(I)求可逆矩阵 P 和 Λ，使 $P^{-1}AP=\Lambda$ (II) 求 A^{101}.

(22) 设箱中有5件产品，其中3件是优质品，从该箱中任取2件，以 X 表示所取的2件产品中的优质品数，Y 表示3件剩余产品中的优质品件数.

(I) 求 (X,Y) 的概率分布；

(II) 求 $Cov(X,Y)$

(23) 设随机变量 X 的分布函数 $F(x)=\begin{cases} 1-(1+x)e^{-x}, x\geq 0, \\ 0 \quad ,\text{其他} \end{cases}$

(I) 求 X 的概率密度 $f(x)$；

(II) 求 $P\{|X|>1\}$；

（Ⅲ）求 $E(e^{-X})$.

2013年全国硕士研究生入学统一考试数学农试题答案

三、解答题：15～23小题，共94分．请将解答写在答题纸指定位置上．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

(15) 求极限$\lim\limits_{x\to 0}(\frac{1}{\ln(1+2x)}-\frac{1}{\sin 2x})$.

【解析】$\frac{1}{2}$

【解析】

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\ln(1+2x)}-\frac{1}{\sin 2x}\right)$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x-\ln(1+2x)}{\ln(1+2x)\sin 2x}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x-\ln(1+2x)}{2x2x}$$
$$\because \sin 2x=2x-\frac{1}{3!}(2x)^3+o(x^3)$$
$$\ln(1+2x)=2x-\frac{1}{2}(2x)^2+o\left(x^2\right)$$
$$\therefore 原式=\lim_{x\to 0}\frac{2x-\frac{1}{3!}(2x)^3+o(x^3)-\left(2x-\frac{1}{2}(2x)^2+o\left(x^2\right)\right)}{2x2x}$$
$$=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$$

(16) 设函数$f(x)=e^{-\frac{x^2}{2}}+1$，求曲线的凹凸区间，拐点和渐近线.

【答案】曲线的凹区间为:$(-\infty,-1)$及$(1,+\infty)$；曲线的凸区间为:$(-1,1)$拐点为：x=1,x=-1

水平渐近线：y=1

【解析】

$$f'(x)=e^{-\frac{x^2}{2}}(-x)=-xe^{-\frac{x^2}{2}}，f''(x)=-e^{-\frac{x^2}{2}}+x^2e^{-\frac{x^2}{2}}=\left(x^2-1\right)e^{-\frac{x^2}{2}}$$

令$f''(x)>0$,得$x>1$或$x<-1$,

令$f''(x)<0$,得$-1<x<1$,

由函数在$(-\infty,+\infty)$上n阶可导，得:

曲线的凹区间为:$(-\infty,-1)$及$(1,+\infty)$；曲线的凸区间为:$(-1,1)$

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\left(e^{-\frac{1}{2}x^2}+1\right)=1,$

$y=1$为函数$f(x)$的水平渐近线。

$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^{-\frac{1}{2}x^2}+1}{x}=0,$无斜渐近线。

又函数无间断点，因此函数没有垂直渐近线。

（17）计算定积分$\int_0^{\frac{1}{2}}\dfrac{x\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx$.

【解析】$\int_0^{\frac{1}{2}}\dfrac{x\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x\overset{\text{令}\arcsin x=t}{\underset{x=\sin t}{=}}\int_0^{\frac{\pi}{6}}\dfrac{t\sin t}{\cos t}\cos t\mathrm{d}t=\int_0^{\frac{\pi}{6}}t\sin t\mathrm{d}t$

$=\left[-t\cos t+\sin t\right]_0^{\frac{\pi}{6}}=\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{12}\pi$.

（18）计算二重积分$\iint\limits_D(x-1)ydxdy$，其中区域D由曲线$x=1+\sqrt{y}$和直线$y=1-x$及$y=1$围成.

【解析】$\iint\limits_D(x-1)y\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1\mathrm{d}y\int_{1-y}^{1+\sqrt{y}}(x-1)y\mathrm{d}x=\int_0^1\dfrac{1}{2}(y^2-y^3)\mathrm{d}y$

$=\left[\dfrac{1}{2}(\dfrac{1}{3}y^3-\dfrac{1}{4}y^4)\right]_0^1=\dfrac{1}{24}$.

（19）设函数$f(x)$对任意的x,y恒有$f(x+y)=e^yf(x)+e^xf(y)$，且$f'(0)=e$，求$f(x)$.

【答案】$f(x)=\dfrac{e}{2}\left(e^x-e^{-x}\right)$

【解析】令$x=y=0$则有$f(0)=2f(0)$即$f(0)=0$。另外

$$\begin{aligned}f'(x)&=\lim_{y\to0}\frac{f(x+y)-f(x)}{y}=\lim_{y\to0}\frac{e^yf(x)-e^xf(y)-f(x)}{y}\\&=\lim_{y\to0}\frac{e^y-1}{y}f(x)+\lim_{y\to0}\frac{f(y)}{y}e^x\\&=f(x)+f'(0)e^x\\&=f(x)+e^{x+1}\end{aligned}$$

可得微分方程$\dfrac{df(x)}{x}-f(x)=e^{x+1}$故可解的

$$f(x)=e^{\int(-1)dx}\left(\int e^{x+1}\cdot e^{\int dx}dx+C\right)$$
$$=e^{-x}\left(\int e^{2x+1}dx+C\right)$$
$$=\frac{1}{2}e^{x+1}+\frac{C}{e^{x}}$$

由 $f'(x)=\frac{1}{2}e^{x+1}-\frac{C}{e^{x}}$ 则由 $f'(0)=\frac{e}{2}-C=e$ 可知 $C=-\frac{e}{2}$

故 $f(x)=\frac{e}{2}\left(e^{x}-e^{-x}\right)$。

(20)（本题满分 11 分）

$$\begin{cases} x_1-x_2+2x_3+x_4=1 \\ 2x_1-x_2+x_3+2x_4=3 \\ x_1\qquad -x_3+x_4=2 \\ 3x_1-x_2\qquad +x_5=5 \end{cases}$$

（I）求方程组的通解 （II）求使 $x_1=x_2$ 的全部解.

【答案】方程通解为 $y=k\begin{pmatrix}2\\3\\1\\0\end{pmatrix}$，使得 $x_1=x_2$ 的全部解为 $y=\begin{pmatrix}5/2\\5/2\\1/2\\0\end{pmatrix}$

【解析】初等变换方程组有

$$\left(\begin{array}{cccc|c}1&-1&2&1&1\\2&-1&1&2&3\\1&0&-1&1&2\\3&-1&0&1&5\end{array}\right)\xrightarrow[r_4-3r_1]{\substack{r_2-2r_1\\r_3-r_1}}\left(\begin{array}{cccc|c}1&-1&2&1&1\\0&1&-3&0&1\\0&1&-3&0&1\\0&2&-6&-2&2\end{array}\right)\xrightarrow[r_4-2r_2]{r_3-r_2}\left(\begin{array}{cccc|c}1&-1&2&1&1\\0&1&-3&0&1\\0&0&0&0&0\\0&0&0&-2&0\end{array}\right)$$

可得 $x_4=0$，另外得到方程组的通解为 $y=k\begin{pmatrix}2\\3\\1\\0\end{pmatrix}$。

将 $x_1=x_2$ 带人原方程组消去 x_2 即有方程组 $\begin{cases}2x_3-x_4=1\\x_1+x_3+2x_4=3\\x_1-x_3+x_4=2\\2x_1+x_4=5\end{cases}$

故有 $\left(\begin{array}{ccc|c}0&2&1&1\\1&1&2&3\\1&-1&1&2\\2&0&1&5\end{array}\right)\xrightarrow[r_4-2r_2]{r_3-r_2}\left(\begin{array}{ccc|c}0&2&1&1\\1&1&2&3\\0&-2&-1&-1\\0&-2&-1&-1\end{array}\right)\xrightarrow[r_4+r_1]{r_3+r_1}\left(\begin{array}{ccc|c}0&2&1&1\\1&1&2&3\\0&0&0&0\\0&0&-2&0\end{array}\right)$

即可得 $x_4=0,x_3=\dfrac{1}{2},x_1=\dfrac{5}{2}$。此时有解 $y=\begin{pmatrix}5/2 & 5/2 & 1/2 & 0\end{pmatrix}^T$。

(21)(本题满分 11 分)

$$A=\begin{pmatrix}1&2&0\\2&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$$

(I)求可逆矩阵 P 和 Λ ，使 $P^{-1}AP=\Lambda$ (II) 求 A^{101}.

【解析】 $|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1&-2&0\\-2&\lambda-1&0\\0&0&\lambda+1\end{vmatrix}=0$

$\therefore\ \lambda_1=3,\lambda_2=\lambda_3=-1$,

当 $\lambda_1=3$ 时，

$$3E-A=\begin{pmatrix}2&-2&0\\-2&2&0\\0&0&4\end{pmatrix}$$

所以 $\lambda_1=3$ 的特征向量是 $\xi_1=(1,1,0)^T$

$$-E-A=\begin{pmatrix}2&2&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

所以 $\lambda_2=\lambda_3=-1$ 的特征向量是 $\xi_2=(-1,1,0)$ 和 $\xi_3=(0,0,1)$

$$\therefore P=\begin{pmatrix}1&-1&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\text{使}P^{-1}AP=\wedge=\begin{pmatrix}3&&\\&-1&\\&&-1\end{pmatrix}$$

$$A^{101}=P\wedge^{101}P^{-1}=\begin{pmatrix}1&-1&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3^{101}&&\\&-1&\\&&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1/2&1/2&0\\-1/2&1/2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\dfrac{3^{101}-1}{2}&\dfrac{3^{101}+1}{2}&0\\\dfrac{3^{101}+1}{2}&-\dfrac{3^{101}+1}{2}&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$$

(22) 设箱中有 5 件产品，其中 3 件是优质品，从该箱中任取 2 件，以 X 表示所取的 2 件产品中的优质品数，Y 表示 3 件剩余产品中的优质品件数.

(I) 求 (X,Y) 的概率分布；

(II) 求 $Cov(X,Y)$

【解析】(I) 由题意知 $X+Y=3$，X 的可能取值为 $i=0,1,2$，Y 的可能取值为 $j=3-i$.

$P\{X=0,Y=0\}=0, P\{X=0,Y=1\}=0, P\{X=0,Y=2\}=0,$

$P\{X=0,Y=3\}=\dfrac{C_3^0C_2^2}{C_5^2}=\dfrac{1}{10},$

类似，$P\{X=1,Y=2\}=\dfrac{C_3^1C_2^1}{C_5^2}=\dfrac{6}{10}=\dfrac{3}{5}, P\{X=2,Y=1\}=\dfrac{C_3^2C_2^0}{C_5^2}=\dfrac{3}{10},$

所以，(X,Y) 的概率分布为

$X \backslash Y$	0	1	2	3
0	0	0	0	$\frac{1}{10}$
1	0	0	$\frac{3}{5}$	0
2	0	$\frac{3}{10}$	0	0

(II)

$$E(XY)=1\times2\times\frac{3}{5}+2\times1\times\frac{1}{10}=\frac{4}{5},$$
$$E(X)=0\times\frac{1}{10}+1\times\frac{3}{5}+2\times\frac{3}{10}=\frac{6}{5},$$
$$E(X)=1\times\frac{3}{10}+2\times\frac{3}{5}+3\times\frac{1}{10}=\frac{9}{5},$$
$$Cov(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=-3.6.$$

(23) 设随机变量 X 的分布函数 $F(x)=\begin{cases}1-(1+x)e^{-x}, & x\ge 0,\\ 0 & ,\text{其他}\end{cases}$

(I) 求 X 的概率密度 $f(x)$；

(II) 求 $P\{|X|>1\}$；

(III) 求 $E(e^{-X})$.

【解析】（Ⅰ） $f(x)=F'(x)=\begin{cases} xe^{-x}, & x>0 \\ 0, & 其他 \end{cases}$.

（Ⅱ） $P(|X|>1)=P(X>1)+P(X<-1)=1-F(1)+F(-1)=1-(1-2e^{-1})+0=2e^{-1}$.

（Ⅲ） $E(e^{-X})=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x}f(x)dx=\int_{0}^{\infty}e^{-x}xe^{-x}dx=\int_{0}^{\infty}xe^{-2x}dx=-\frac{1}{2}\int_{0}^{\infty}xde^{-2x}$

$=-\frac{1}{2}\left(xe^{-2x}\Big|_{0}^{+\infty}-\int_{0}^{\infty}e^{-2x}dx\right)=\frac{1}{2}\int_{0}^{\infty}e^{-2x}dx=\frac{1}{4}$.