

2014 年全国硕士研究生入学统一考试农学门类联考

数学试题

一、选择题:1~8 小题,每小题 4 分,共 32 分.下列每题给出的四个选项中,只有一个选项符合题目要求的,请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上.

(1) 设 $f(x)$ 可导, $f'(x) = e^{-f(x)}$, $f(0) = 0$, 当 $n \geq 1$ 时, $f^{(n)}(0) =$ ()

(A) $(-1)^{n-1}(n-1)!$

(B) $(-1)^{n-1}n!$

(C) $(-1)^n(n-1)!$

(D) $(-1)^nn!$

(2) 设函数 $f(x)$ 满足 $f''(x) - 2f'(x) = \int_a^{x+1} e^{-kt} dt$, 且 $f(a) = 0$, 则 $f(x)$ 在 $x = a$ 处 ()

(A) 取得极大值

(B) 取得极小值

(C) 没有极值

(D) 是否取得极值与 k 有关

(3) 函数 $f(x, y) = \cos \frac{x}{y}$ 在点 $(\pi, 2)$ 处的全微分为 ()

(A) $-\frac{1}{4}(2dx + \pi dy)$

(B) $-\frac{1}{4}(2dx - \pi dy)$

(C) $\frac{1}{4}(2dx + \pi dy)$

(D) $\frac{1}{4}(2dx - \pi dy)$

(4) 设 $I = \iint_{|x|+|y| \leq 2} \frac{dxdy}{2 + \cos^2 x + \cos^2 y}$, 则

(A) $\frac{1}{4} < I < \frac{1}{2}$

(B) $\frac{1}{2} < I < 1$

(C) $1 < I < 2$

(D) $2 < I < 4$

(5) 设向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关, 则下列向量组中线性无关的是 ()

(A) $\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_1 - \alpha_3, \alpha_1 + \alpha_3$

(B) $\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 - \alpha_1$

(C) $\alpha_1 - \alpha_2, \alpha_2 - \alpha_3, \alpha_3 - \alpha_1$ (D) $\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 - \alpha_3, \alpha_3 - \alpha_1$

(6) 设 A 为 2 阶可逆矩阵, A^* 为 A 的伴随矩阵, 将 A 的第一行乘以 -1 得到矩阵 B , 则 ()

(A) A^{-1} 的第一行乘以 -1 得到矩阵 B^{-1} (B) A^{-1} 的第一列乘以 -1 得到矩阵 B^{-1}

(C) A^* 的第一行乘以 -1 得到矩阵 B^* (D) A^* 的第一列乘以 -1 得到矩阵 B^*

(7) 设随机变量 X 的分布为则

X	-2	-1	0	1	2
p	0.1	0.3	0.2	0.3	0.1

 $D(X-0.7) =$ ()

(A) 0

(B) 0.7

(C) 1.4

(D) 2.1

(8) 设总体 X 服从参数为 λ ($\lambda > 0$) 的泊松分布, X_1, X_2, \dots, X_n 为来自总体 X 的简单随机样本,

记 $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$, $T = a\bar{X} + (\bar{X})^2$, 其中 a 为常数, 若 $ET = \lambda^2$, 则 $a =$ ()

(A) $-\frac{1}{n}$

(B) $\frac{1}{n}$

(C) -1

(D) 1

二、填空题: 9 14 小题, 每小题 4 分, 共 24 分. 请将答案写在答题纸指定位置上.

(9) 当 $x \rightarrow 0$, $\frac{\ln(1-2x^2)}{x}$ 与 $1 - e^{kx}$ 是等价无穷小, 常数 $k =$ _____

(10) 函数 $f(x) = \frac{1 - \cos x}{x(x-1)\sin x}$ 的可去间断点为 $x =$ _____.

(11) 已知函数 $y = y(x)$ 由方程 $xy^2 - \ln(x+1) + \ln y = 1$ 确定, 则 $\frac{dy}{dx} \Big|_{x=0} =$ _____.

(12) 反常积分 $\int_0^{+\infty} x^3 e^{-x^2} dx =$ _____.

(13) 设 2 阶矩阵 A 的特征值为 1, 2, 则行列式 $|A - 3A^*| =$ _____.

(14) 设随机变量 X 的概率密度 $f(x) = \begin{cases} 2x, & 0 < x < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$, Y 表示对 X 的 3 次独立重复观测中事件

$\left\{X \leq \frac{1}{2}\right\}$ 发生的次数, 则 $P\{Y \leq 2\} = \underline{\hspace{2cm}}$.

三、解答题: 15~23 小题, 共 94 分. 请将解答写在答题纸指定位置上. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(15) (本题满分 10 分)

设曲线 $y = x^3 + 2x + x + C$ 在其拐点处的切线通过坐标原点, 求常数 C .

(16) (本题满分 10 分)

求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x \sin x - x(x^2 + 1)}{\cos x - \cos^2 x}$.

(17) (本题满分 10 分)

设函数 $f(x - y^2, x^2 \sin \pi y)$, f 具有二阶连续的偏导数, 求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \Big|_{(1,1)}$.

(18) (本题满分 10 分)

求不定积分 $\int \frac{x \ln(1+x^2)}{(1+x^2)^2} dx$.

(19) (本题满分 10 分)

设函数 $y = y(x)$ 是微分方程 $(e^y + e^{-y} + 2)dx - (x+2)^2 dy = 0$ 满足条件 $y(0) = 0$ 的解.

(I) 求 $y(x)$;

(II) 曲线 $y = y(x)$ 是否在水平渐近线和铅直渐近线? 若存在, 写出其方程.

(20) (本题满分 11 分)

设矩阵 $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 6 \\ 1 & a \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$, 当 a 取何值时, 存在矩阵 X 使得 $AX = B$, 并求出矩阵 X .

(21) (本题满分 11 分)

设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & a & 0 \end{pmatrix}$ 相似于对角矩阵.

(I) 求 a 的值;

(II) 求可逆矩阵 P 和对角矩阵 Λ , 使得 $P^{-1}AP = \Lambda$.

(22)(本题满分 11 分)

设随机变量 X 的概率密度 $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{3}x^2, & -1 < x < 2 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$. 令随机变量 $Y = \begin{cases} 1, & X \geq 0 \\ -1, & X < 0 \end{cases}$.

(I) 求 Y 的概率分布;

(II) 求 $Cov(X, Y)$.

(23)(本题满分 11 分)

设二维随机变量 (X, Y) 服从 D 上的均匀分布, 其中 D 是由直线 $y = x$ 和曲线 $y = x^2$ 围成的平面区域.

(I) 求 X 和 Y 的边缘概率密度 $f_X(x)$ 和 $f_Y(y)$;

(II) 求 $E(XY)$.