2012 考研数学必看：很详细的考研数学全程辅导书选择及复习规划

考研数学全程复习权威资料书及用书时间安排 （状元必备）	1、课本：同济大学第六版《高等数学》+同济大学第四版《线性代数》+浙江大学第三版《概率论与数理统计》 （用书时间：2011 年 1 月——2011 年 6 月） 2、高分辅导书：李永乐《复习全书》或原教育部命题组组长王式安《考研数学复习标准全书》 李永乐《基础过关 660 题》或原教育部命题组组长王式安《基础经典习题 600 题》 （时间：2011 年 3 月——2011 年 9 月） 3、辅导班讲义：中国考研数学辅导界顶级辅导名师讲义（时间：2011 年 7 月——2011 年 9 月） 4、大纲：最新考试大纲，主要是里面的样卷，很重要 （时间：2011 年 8 月——2011 年 9 月） 5、真题解析：李永乐《考研数学历年真题解析》或原教育部命题组组长王式安《考研数学历年真题权威解析》 （时间：2011 年 10 月——2011 年 12 月） 6、模拟题：原教育部命题组组长王式安王式安《最后冲刺 8 套卷》或李永乐《考研数学经典模拟 400 题》 （时间：2011 年 11 月——2011 年 12 月）	
时间	**复习内容**	**注意事项**
第一阶段：基础复习阶段 **1 月—6 月**	把课本细看一遍，例题自己做，并研究例题思路记好笔记。课后题都做一遍，把不会的、做错的或者虽然做对但思路不清的做好记号。	1.把基础的基础一定掌握，尤其是公式要记牢 2.看概念和知识要点的时候，要把一些重点词句划出来；对于开始不太懂的，理解之后一定也把自己的理解写出来。
	第二次看课本，这次是简略回顾基础知识的情况下，重点解决第一阶段没有弄清的知识点，最重要的是把第一阶段做了记号的例题、课后题解决。	主要是找出为什么当时不会或者思路不清，并相应解决相关知识点。
	做一下课本配套的习题	发现仍存在的问题
第二阶段：强化阶段 **7 月—9 月**	用记号对题目进行标识： A:自己会做的 B:有正确思路，但不能完全写出来 C:没有思路或思路错误的。 李永乐《复习全书》或原教育部命题组组长王式安《考研数学复习标准全书》里面的所有题目都自己动手做，B/C 做好记号，并这过程中做好笔记，对冲刺阶段查缺补漏极为重要。	1.对基础知识和概念一定用心领会和理解，不懂的回课本搞清楚。 2.对每道例题和习题，先动手做一遍，然后再对照书上的答案和解题思路总结和反省，好好把感受写在旁边。 3.做题时，对于第 B\C 种情况记下自己当时为什么做不出来，今后看到何种典型题目，应该具备何种反应和思路。
	比对课本，分析大纲。看看有没有新要求的知识点，回到全书批注，对新增、变知识点重点加强理解。李永乐《基础过关 660 题》或原教育部命题组组长王式安《基础经典习题 600 题》里面的所有题目都自己动手做，B/C 做好记号。并这过程中做好笔记。	这一阶段一定要解决前面所有留下的问题。 辅导班讲义：中国考研数学辅导界顶级辅导名师讲义一定要再亲自做 2 遍，这样增强复习效果。辅导班老师特别是有命题阅卷背景的名师总结的辅导资料极为重要，直接洞穿了命题规律和命题陷阱、考生弱点。
第三阶	真题模拟考场：李永乐《考研数学历年真题解析》或原教育部命题组组长王式安《考研	争取 3 天一套，严格按照时间来做。定时（3h/套）

段：真题研究及冲刺模拟阶段 10 月—12 月	数学历年真题权威解析》	
	做模拟题，强化记忆。选一本模拟题即可。 原教育部命题组组长王式安王式安《最后冲刺 8 套卷》，此书与真题同源，强烈推荐！所有题都是原命题人员命制的，直击考题，整体难度比真题难一些。 李永乐《考研数学经典模拟 400 题》，此书以常规题为主，难度方面，整体上比真题稍微难一些。	1. 定时（3h/套） 2 打分 清楚地了解自己的情况。 3. 全面、系统、详细的总结. 切忌草草看一遍答案，说声“原来如此” 4. 每做几套，回头总结在哪些知识点，哪些章节，哪种类型的题目中容易出问题，分析原因，制订对策。
第四阶段：状态保持阶段 2012 年 1 月	课本+大纲+笔记 自己看书，每看到一节，争取自己能回忆起相关知识点以及延伸，并在笔记上找出当初做错的题目	此阶段是查缺不漏的阶段，千万别再陷入题海里！常规题型一定要会做。
	为了保持考场状态：要作题，不断的作题。 原教育部命题组组长王式安王式安《最后冲刺 8 套卷》或李永乐《考研数学经典模拟 400 题》可再重新做一遍 熟练程度要求：就是看到题目就有思路，就能快速地写出来。	1. 不要过分强调做题数量：做题，尤其是做套题，是训练考试速度和准确度的有效手段，做套题后，必须好好总结，这样才可能使你做过的题目成为你掌握了的题目。 2. 不要过分强调难题、偏题：真正的考题并不困难，绝大多数（甚至全部）都是常规题目。因此，我们在复习中需要提高的是常规题目的快速解题能力

2012 考研数学寒假学习计划明细

日期	用时	《高等数学》课本	《寒假配套 **100** 题》
第一天	**7** 小时	第一章：函数与极限（第一节、第二节）	无
第二天	**5** 小时	第一章：函数与极限（第三节、第四节）	无
第三天	**6** 小时	第一章：函数与极限（第五节、第六节）	无
第四天	**5** 小时	第一章：函数与极限（第七节、第八节）	无
第五天	**9** 小时	第一章：函数与极限（第九节、第十节、总复习）	无
第六天	**10** 小时	第二章：导数与微分（第一节、第二节）	无
第七天	**7** 小时	第二章：导数与微分（第三节、第四节）	无
第八天	**6** 小时	第二章：导数与微分（第五节、总复习题 **2**）	无
第九天	**5** 小时	第三章：微分中值定理与导数应用（第一节）	无
第十天	**5** 小时	第三章：微分中值定理与导数应用（第二节）	无
第十一天	**5** 小时	第三章：微分中值定理与导数应用（第三节）	无
第十二天	**5** 小时	第三章：微分中值定理与导数应用（第四节）	无
第十三天	**5** 小时	第三章：微分中值定理与导数应用（第五节）	无
第十四天	**5** 小时	第三章：微分中值定理与导数应用（第六节）	无
第十五天	**5** 小时	第三章：微分中值定理与导数应用（第七节）	无
第十六天	**6** 小时	《寒假配套 **100** 题》	**1—20** 题
第十七天	**6** 小时	《寒假配套 **100** 题》	**21—40** 题
第十八天	**6** 小时	《寒假配套 **100** 题》	**41—60** 题
第十九天	**6** 小时	《寒假配套 **100** 题》	**61—80** 题
第二十天	**6** 小时	《寒假配套 **100** 题》	**81—100** 题

2012 考研数学寒假学习重要指导思想

标题	具体要求
计划用书	**1**、同济大学第五**/**六版《高等数学》上册 **2**、海文考研《寒假配套特训 **100** 题》
主要任务	**1**、《高等数学》上册的一元微分学，即前三章 **2**、海文考研《寒假配套特训 **100** 题》
主要目标	**1**、通过对教材《高等数学》上册的一元微分学，即前三章的复习理解大纲中要求的三基——基本概念、基本理论、基本方法。 **2**、通过学习海文考研《寒假配套特训 **100** 题》进一步巩固课本基础知识，练习考研基本题型。
复习方法	**1**、 把课本细看一遍，例题自己做，并研究例题思路记好笔记。课后题都做一遍，把不会的、做错的或者虽然做对但思路不清的做好记号。为下一阶段的复习做好充分的准备。 **2**、通过学习海文考研《寒假配套特训 **100** 题》进一步巩固课本基础知识，自己动笔做题，把每个例题弄懂。为后续的复习打下一个扎实的基础。
注意事项	**1.**基础知识一定掌握，尤其是公式要记牢 **2.**看概念和知识要点的时候，要把一些重点词句划出来；对于开始不太懂的，理解之后一定也把自己的理解写出来。
计划用时	**1**、同济大学第五**/**六版《高等数学》上册前三章：**90** 小时 **2**、海文考研《寒假配套特训 **100** 题》：**30** 小时

《寒假配套特训 100 题》

特训题 1、 设 $f(e^x+1)=e^{2x}+e^x+x$，求 $f(x)$.

解 令 $e^x+1=u$， $x=\ln(u-1)$

$$f(u)=(u-1)^2+(u-1)+\ln(u-1)=u^2-u+\ln(u-1)$$

于是 $f(x)= {}^2x- x+\ln(x$

特训题 2、 求极限 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\left[\sin x-\sin\left(\sin x\right)\right]\sin x}{x^4}$

解： $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(\sin x-\sin\sin x)\sin x}{x^4}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x-\sin\sin x}{x^3}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos x-\cos(\sin x)\cdot\cos x}{3x^2}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\cos x(1-\cos(\sin x))}{3x^2}=\lim_{x\to0}\frac{\sin(\sin x)\cdot\cos x}{6x}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{6x}=\frac{1}{6}$$

特训题 3、 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3^{n+1}-2^n}{2^{n+1}+3^n}$.

解 分子、分母用 3^n 除之，

$$原式=\lim_{n\to\infty}\frac{3-\left(\frac{2}{3}\right)^n}{2\left(\frac{2}{3}\right)^n+1}=3$$

（注：主要用当$|r|<1$时，$\lim\limits_{n\to\infty}r^n=0$）

特训题 4、 求下列各极限

（1）$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$ （2）$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}{x}$

解 （1）解一 $原式=\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+x)-(1-x)}{x\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)}=\frac{2}{2}=1$

解二 $原式=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{1+x}-1\right)-\left(\sqrt{1-x}-1\right)}{x}$

$$\xlongequal{等价无穷小量代换}\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x-\left(-\frac{x}{2}\right)}{x}=1$$

解三 用洛必达法则 1

$$原式=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2\sqrt{1+x}}-\left(\frac{(-1)}{2\sqrt{1-x}}\right)}{1}=1$$

（2）解一 $原式=\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+x)-(1-x)}{x\left[\left(\sqrt[3]{1+x}\right)^2+\left(\sqrt[3]{1+x}\right)\left(\sqrt[3]{1-x}\right)+\left(\sqrt[3]{1-x}\right)^2\right]}=\frac{2}{3}$

解二 类似（1）中解二用等价无穷小量代换

解三 类似（1）中解三用洛必达法则

（2）$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$

解 $原式=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right)$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdots\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n+1}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{2n}=\frac{1}{2}$$

特训题 5、 求下列极限

（1）$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{2}{x}\right)^{x+10}$ （2）$\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{\frac{1}{x}}$

解 （1）$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{2}{x}\right)^{x+10}=\lim\limits_{x\to\infty}\left[1+\left(-\frac{2}{x}\right)\right]^{\left(-\frac{x}{2}\right)\left(\frac{2(x+10)}{-x}\right)}$

$$=\lim_{x\to\infty}\left\{\left[1+\left(-\frac{2}{x}\right)\right]^{\left(-\frac{x}{2}\right)}\right\}^{(-2)\left(1+\frac{10}{x}\right)}=e^{-2}$$

（2）解一　$\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{\frac{1}{x}}=\frac{\lim\limits_{x\to0}(1-x)^{\frac{1}{x}}}{\lim\limits_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}}=\frac{\lim\limits_{x\to0}[1+(-x)]^{\left(-\frac{1}{x}\right)\cdot(-1)}}{e}=\frac{e^{-1}}{e}=e^{-2}$

解二　$\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{1+x-2x}{1+x}\right)^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to0}\left[1+\left(\frac{-2x}{1+x}\right)\right]^{\left(\frac{1+x}{-2x}\right)\left(\frac{-2}{1+x}\right)}=e^{-2}$

特训题 6、　求下列极限

（1）$\lim\limits_{x\to0}(1+\tan x)^{\cot x}$　　（2）$\lim\limits_{x\to1}x^{\frac{4}{x-1}}$

（3）$\lim\limits_{x\to0}(\cos x)^{\cot^2 x}$

解　（1）令　$\tan x=t$ 则 $\cot x=\frac{1}{t}$，当 $x\to0$ 时 $t\to0$

于是　$\lim\limits_{x\to0}(1+\tan x)^{\mathrm{c}\ \propto\ \mathrm{t}}\doteq\lim\limits_{t\to0}(1+t)^{\frac{1}{t}}=e$

（2）令 $x-1=t$ 则 $x=1+t$，当 $x\to1$ 时，$t\to0$

于是　$\lim\limits_{x\to1}x^{\frac{4}{x-1}}=\lim\limits_{t\to0}(1+t)^{\frac{4}{t}}=\lim\limits_{t\to0}\left[(1+t)^{\frac{1}{t}}\right]^4=e^4$

（3）$\lim\limits_{x\to0}(\cos x)^{\cot^2 x}=\lim\limits_{x\to0}(1-\sin^2 x)^{\frac{\cos^2 x}{2\sin^2 x}}=\lim\limits_{x\to0}\left[1+(-\sin^2 x)\right]^{\frac{1}{(-\sin^2 x)}\cdot\frac{\cos^2 x}{(-2)}}$

$=e^{-\frac{1}{2}}$

特训题 7、　求下列极限

（1）$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n^2+k}}$　　（2）$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2+n+k}$

解　（1）$\because\ \frac{n}{\sqrt{n^2+n}}\le\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n^2+k}}\le\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$

而　$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}}=$

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}=1$

由夹逼定理可知　$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n^2+k}}=1$

（2）$\because\ \frac{1+2+\cdots+n}{n^2+n+n}\le\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2+n+k}\le\frac{1+2+\cdots+n}{n^2+n+1}$

而　$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+2+\cdots+n}{n^2+2n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2}n(n+1)}{n(n+2)}=-$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+2+\cdots+n}{n^2+n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2}n(n+1)}{n^2+n+1}=\frac{1}{2}$$

则夹逼定理可知 $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2+n+k}=\frac{1}{2}$

特训题 8、 求 $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{n^2+k^2}$.

分析 如果还想用夹逼定理中方法来考虑

$$\frac{n^2}{n^2+n^2}\le\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{n^2+k^2}\le\frac{n^2}{n^2+1^2}$$

而 $\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{n^2+n^2}=\frac{1}{2}$，$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{n^2+1^2}=1$

由此可见，无法再用夹逼定理，因此我们改用定积分定义来考虑.

解
$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{n^2+k^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2}$$

$$=\int_0^1\frac{dx}{1+x^2}=\arctan x\Big|_0^1=\frac{\pi}{4}$$

特训题 9、 求 $\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}-\sin\frac{1}{n}}{\sin^3\frac{1}{n}}$.

解 离散型不能直接用洛必达法则，故考虑

$$\lim_{x\to0}\frac{x-\sin x}{\sin^3 x}\xlongequal{\text{等价无穷小代换}}\lim_{x\to0}\frac{x-\sin x}{x^3}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{3x^2}=\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{6x}=\frac{1}{6}$$

$\therefore$原式$=\frac{1}{6}$.

特训题 10、 求 $\lim_{x\to0}\frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^{10}}$.

解 若直接用“$\frac{0}{0}$”型洛必达法则 1，则得 $\lim_{x\to0}\frac{\left(\frac{2}{x^3}\right)e^{-\frac{1}{x^2}}}{10x^9}=\lim_{x\to0}\frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{5x^{12}}$（不好办了，分母 x 的次数反而增加），为了避免分子求导数的复杂性，我们先用变量替换，令 $\frac{1}{x^2}=t$，

于是 $$\lim_{x\to0}\frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^{10}}=\lim_{t\to+\infty}\frac{e^{-t}}{t^{-5}}=\lim_{t\to+\infty}\frac{t^5}{e^t}$$（“$\frac{\infty}{\infty}$”型）

$$=\lim_{t\to+\infty}\frac{5t^4}{e^t}=\cdots=\lim_{t\to+\infty}\frac{5!}{e^t}=0$$

特训题 11、求 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{e^x-1}\right)$.

解 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{e^x-1}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(e^x-1)-x}{x(e^x-1)}$ （“$\dfrac{0}{0}$”型）

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{(e^x-1)+xe^x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x}{e^x+e^x+xe^x}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{2+x}=\dfrac{1}{2}$

特训题 12、 求 $\lim\limits_{x\to 0}(\dfrac{1}{\sin^2 x}-\dfrac{\cos^2 x}{x^2})$.

解 原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2-\sin^2 x\cdot\cos^2 x}{x^2\sin^2 x}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2-\frac{1}{4}\sin^2 2x}{x^4}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x-\frac{4}{4}\sin 2x\cos 2x}{4x^3}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\frac{1}{4}\sin 4x}{2x^3}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 4x}{6x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4\sin 4x}{12x}=\dfrac{4}{3}$

特训题 13、设函数 $f(x)=\begin{cases}x^2+1, & |x|\le c\\ \dfrac{2}{|x|}, & |x|>c\end{cases}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续，则 $c=$______.

解：1

分析：由 $\lim\limits_{x\to c^+}f(x)=\lim\limits_{x\to c^-}f(x)\Rightarrow c^2+1=\dfrac{2}{c}\Rightarrow c=1$

特训题 14、 求 $\lim\limits_{x\to 0^+}x^{\sin^2 x}$.

解 令 $y=x^{\sin^2 x}$， $\ln y=\sin^2 x\ln x$

$\lim\limits_{x\to 0^+}\ln y=\lim\limits_{x\to 0^+}\sin^2 x\ln x=0$（见 2 中例 3）

$\therefore \lim\limits_{x\to 0^+}y=e^0=1$

特训题 15、 求 $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\cot^2 x}$（前面已用重要公式的方法）.

解 令 $y=(\cos x)^{\cot^2 x}$， $\ln y=\cot^2 x\ln\cos x$

$\lim\limits_{x\to 0}\ln y=\lim\limits_{x\to 0}\cot^2 x\ln\cos x=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\cos x}{\tan^2 x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\cos x}{x^2}$

（“$\frac{0}{0}$”型）$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{-\tan x}{2x}=-\frac{1}{2}$，$\therefore \lim\limits_{x\to 0} y=e^{-\frac{1}{2}}$

特训题 16、 求$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x}\right)^{x}$.

解 令$y=\left(\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x}\right)^{x}$，$\ln y=x\ln\left(\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x}\right)$

$$\lim_{x\to\infty}\ln y=\lim_{x\to\infty}\frac{\ln\left(\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}=\lim_{t\to 0}\frac{\ln(\sin t+\cos t)}{t}$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{\cos t-\sin t}{\sin t+\cos t}=1$$

$\therefore \lim\limits_{x\to\infty} y=e$

特训题 17、 求极限$\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\ln\frac{\sin x}{x}$.

解：$\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\ln\frac{\sin x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\ln\left(1+\frac{\sin x}{x}-1\right)$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{3x^2}=-\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{6x}=-\frac{1}{6}$$

特训题 18、 求$\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1-\cos 2x)\arctan 3x}{(e^x-1)\ln(1+2x)\sin 5x}$.

解 用等价无穷小量代换

原式$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}(2x)^2\cdot(3x)}{x\cdot(2x)\cdot(5x)}=\frac{3}{5}$

特训题 19、 求$\lim\limits_{x\to 0}\frac{3\sin x+x^2\cos\frac{1}{x}}{(1+\cos x)\ln(1+x)}$.

解 这个极限虽是“$\frac{0}{0}$”型，但分子、分母分别求导数后的极限不存在，因此不能用洛必达法则.

原式$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{1+\cos x}\left[\frac{3\frac{\sin x}{x}+x\cos\frac{1}{x}}{\frac{\ln(1+x)}{x}}\right]=\frac{3}{2}$

特训题 20、 求$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x-x+\frac{1}{6}x^3}{x^5}$.

解 $\because \sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+o(x^5)$ （当$x\to 0$时）

$\therefore$原式$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{x^5}{5!}+o(x^5)}{x^5}=\dfrac{1}{5!}=\dfrac{1}{120}$

特训题 21、 设 $f'(x_0)=2$，求 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+3\Delta x)-f(x_0-2\Delta x)}{\Delta x}$.

解 原式$=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\left[f(x_0+3\Delta x)-f(x_0)\right]-\left[f(x_0-2\Delta x)-f(x_0)\right]}{\Delta x}$

$$=3\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+3\Delta x)-f(x_0)}{3\Delta x}+2\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0-2\Delta x)-f(x_0)}{(-2\Delta x)}$$

$$=3f'(x_0)+2f'(x_0)=5f'(x_0)=10$$

特训题 22、 设曲线 $y=f(x)$ 与 $y=\sin x$ 在原点相切，求 $\lim\limits_{n\to\infty}nf(\dfrac{2}{n})$.

解 由题设可知 $f(0)=0$， $f'(0)=(\sin x)'\big|_{x=0}=1$

于是 $$\lim_{n\to\infty}nf\left(\frac{2}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{f\left(\frac{2}{n}\right)-f(0)}{\frac{2}{n}-0}\cdot 2=f'(0)\cdot 2=2$$

特训题 23、 设 $a>0$， $x_1=b>0$， $x_2=\dfrac{1}{2}\left(x_1+\dfrac{a}{x_1}\right)$， $\cdots x_n=\dfrac{1}{2}\left(x_{n-1}+\dfrac{a}{x_{n-1}}\right)$ 求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

解 $\because x_n\ge\sqrt{x_{n-1}\cdot\dfrac{a}{x_{n-1}}}=\sqrt{a}>0$（算术平均值≥几何平均值）

又 $x_{n+1}-x_n=\dfrac{1}{2}\left(x_n+\dfrac{a}{x_n}\right)-x_n=\dfrac{a-x_n^2}{2x_n}\le 0$，则 $x_{n+1}\le x_n$

因此 $\{x_n\}$ 单调减少，又有下界，根据准则 1，$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$ 存在

把 $x_n=\dfrac{1}{2}\left(x_{n-1}+\dfrac{a}{x_{n-1}}\right)$ 两边取极限，得 $A=\dfrac{1}{2}\left(A+\dfrac{a}{A}\right)$

$A^2=a$，$\because$A>0，$\therefore$取 $A=\sqrt{a}$，于是 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\sqrt{a}$

特训题 24、 求下列函数在分段点处的极限

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin 2x}{x} & x<0\\[2mm] \dfrac{x^2}{1-\cos x} & x>0\end{cases}$$

解 $f(0-0)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\sin 2x}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}2\dfrac{\sin 2x}{2x}=2$

$$f(0+0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{x^2}{1-\cos x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x^2}{\frac{1}{2}x^2}=2$$

$\therefore \lim\limits_{x\to 0} f(x)=2$

特训题 25、 求$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\dfrac{\sin x}{|x|}\right)$.

解 $\lim\limits_{x\to 0^-}\left(\dfrac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\dfrac{\sin x}{(-x)}\right)=2-1=1$

$\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{2e^{-\frac{4}{x}}+e^{-\frac{3}{x}}}{e^{-\frac{4}{x}}+1}+\dfrac{\sin x}{x}\right)=0+1=1$

$\therefore \lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\dfrac{\sin x}{|x|}\right)=1$

特训题 26、 设$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+ax+b}{\sin(x^2-1)}=3$，求 a 和 b.

解 由题设可知$\lim\limits_{x\to 1}(x^2+ax+b)=0$，$\therefore$1+a+b=0

再对极限用洛必达法则

$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+ax+b}{\sin(x^2-1)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x+a}{2x\cos(x^2-1)}=\dfrac{2+a}{2}=3 \quad a=4,b=-5$

特训题 27、 $f(x)$连续，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos(\sin x)}{(e^{x^2}-1)f(x)}=1$，则 $f(0)=$ __________

解：$\dfrac{1}{2}$

分析：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{2}\sin^2 x}{x^2 f(x)}=1$,则$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{2}}{f(x)}=1$，由 $f(x)$连续，则 $f(0)=\dfrac{1}{2}$

特训题 28、 讨论函数

$$f(x)=\begin{cases} e^{\frac{1}{x}} & x<0 \\ 0 & x=0 \\ x\sin\dfrac{1}{x} & x>0 \end{cases}$$

在点 $x=0$ 处的连续性。

解 因 $f(0-0)=\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-} e^{\frac{1}{x}}=0$

$f(0+0)=\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} x\sin\dfrac{1}{x}=0$

$f(0)=0$

即有 $f\left(0-0\right)=f\left(0+0\right)=f\left(0\right)$，故 $f\left(x\right)$ 在点 $x=0$ 连续.

特训题 29、 讨论函数

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\ln(1-x)}{x} & x<0\\ \dfrac{1}{2} & x=0\\ \dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x} & x>0\end{cases}$$

在点 $x=0$ 的连续性.

解 $f\left(0-0\right)=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{\ln(1-x)}{x}=\lim\limits_{x\to0^-}\ln(1-x)^{\frac{1}{x}}=-1$

$$f\left(0+0\right)=\lim_{x\to0^+}\frac{\sqrt{1+x}-1}{x}=\lim_{x\to0^+}\frac{1}{\sqrt{1+x}+1}=\frac{1}{2}$$

因 $f\left(0-0\right)\neq f\left(0+0\right)$，因而 $\lim\limits_{x\to0}f\left(x\right)$ 不存在，故 $f\left(x\right)$ 在点 $x=0$ 不连续.

特训题 30、 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x} & x\neq 0\\ k & x=0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续，求常数 k.

解 $\because\lim\limits_{x\to0}f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}=1$

$f\left(0\right)=k$，由连续性可知 $k=1$

特训题 31、 求函数 $f(x)=\dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{x-1}$ 的间断点，并确定其类型.

解 显然 $x=1$ 是间断点，由于

$$\lim_{x\to1}\frac{\sqrt[3]{x}-1}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{\sqrt[3]{x}-1}{\left(\sqrt[3]{x}-1\right)\left(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1\right)}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1}=\frac{1}{3}$$

所以 $x=1$ 是 $f\left(x\right)$ 的可去间断点.

特训题 32、 求函数 $f(x)=\dfrac{x^2-2x}{|x|\left(x^2-4\right)}$ 的间断点，并确定其类型.

解 所给函数在点 $x=0$，-2，2 没有定义，因此 $x=0$，-2，2 是所给函数的间断点.下面确定它们的类型.
对于 $x=0$，由于

$$f(0-0)=\lim_{x\to0^-}\frac{x(x-2)}{-x(x-2)(x+2)}=-\frac{1}{2},\quad f(0+0)=\lim_{x\to0^+}\frac{x(x-2)}{x(x-2)(x+2)}=\frac{1}{2}$$

故 $x=0$ 是第一类间断点，且为跳跃间断点.
对于 $x=-2$，由于

$$f(-2-0)=f(-2+0)=\lim_{x\to -2}\frac{x(x-2)}{|x|(x-2)(x+2)}=\infty$$

故 $x=-2$ 是第二类间断点，且为无穷间断点.
对于 $x=2$，由于

$$f(2-0)=f(2+0)=\lim_{x\to 2}=\frac{x(x-2)}{x(x-2)(x+2)}=\frac{1}{4}$$

故 $x=2$ 是第一类间断点，且为可去间断点.若补充定义 $f(2)=\frac{1}{4}$，则 $f\left(x\right)$ 在 $x=2$ 连续.

特训题 33、 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有定义，且 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=a$

$$g(x)=\begin{cases} f\left(\frac{1}{x}\right) & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$$

则下列结论中正确的是（　　）

(A) $x=0$ 必是 $g(x)$ 的第一类间断点

(B) $x=0$ 必是 $g(x)$ 的第二类间断点

(C) $x=0$ 必是 $g(x)$ 的连续点

(D) $g(x)$ 在 $x=0$ 处的连续性与 a 的取值有关

解 $\lim\limits_{x\to 0} g(x)=\lim\limits_{x\to 0} f\left(\frac{1}{x}\right)=\lim\limits_{t\to\infty} f(t)=a$

$\therefore$ $a=0$ 时 $x=0$ 是 $g(x)$ 的连续点，$a\neq 0$ 时，$x=0$ 是 $g(x)$ 的可去间断点故选 D.

特训题 34、 求 $\lim\limits_{x\to 0}\arctan\left(\frac{\sin x}{x}\right)$.

解 因 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$，而函数 $y=\arctan u$ 在点 $u=1$ 连续，所以

$$\lim_{x\to 0}\arctan\left(\frac{\sin x}{x}\right)=\arctan\left(\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\right)=\arctan 1=\frac{\pi}{4}$$

特训题 35、 设 $f(x)$ 在 x=2 处连续，且 $f(2)=3$，求 $\lim\limits_{x\to 2} f(x)\left[\frac{1}{x-2}-\frac{4}{x^2-4}\right]$.

解 由于 $f(x)$ 在 x=2 处连续，且 $f(2)=3$，所以 $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=3$

则 $\lim\limits_{x\to 2} f(x)\left[\frac{1}{x-2}-\frac{4}{x^2-4}\right]=\lim\limits_{x\to 2} f(x)\frac{(x+2)-4}{x^2-4}=\lim\limits_{x\to 2} f(x)\cdot\frac{1}{x+2}$

$=\lim\limits_{x\to 2} f(x)\cdot\lim\limits_{x\to 2}\frac{1}{x+2}=\frac{3}{4}$

特训题 36、 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续，且 $f(a)<a$， $f(b)>b$，证明： $f(x)=x$ 在 (a, b) 内至少有一个根.

证 令 $g(x)=f(x)-x$，可知 $g(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续，

$g(a)=f(a)-a<0$

$g(b)=f(b)-b>0$

由介值定理的推论，可知 $g(x)$ 在 (a, b) 内至少有一个零点，即 $f(x)=x$ 在 (a, b) 内至少有一个根.

特训题 37、 求证：方程 $e^x+e^{-x}=4+\cos x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内恰有两个根.

证 令 $f(x)=e^x+e^{-x}-\cos x-4$，它是偶函数，所以只需讨论 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内恰有一个根.

$f(0)=-3<0$， $f(2)=e^2+e^{-2}-\cos 2-4>0$

$f(x)$ 在 $\left[0,2\right]$ 上连续，根据介值定理推论，至少有一个 $\xi\in(0,2)$，使 $f(\xi)=0$.

又因为 $f'(x)=e^x-e^{-x}+\sin x>0\left(x>0\right)$，所以 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内单调增加，因此， $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内最多只有一个零点，于是 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内恰有一个零点，由偶函数的对称性， $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内恰有两个零点，也即所给方程在 $(-\infty,+\infty)$ 内恰有两个根.

特训题 38、 设 $f\left(x\right)=\left(x-a\right)g\left(x\right)$，其中 $g\left(x\right)$ 在点 a 处连续，求 $f'\left(a\right)$。

解 $\because$ 没有假设 $g\left(x\right)$ 可导，所以不能用导数的乘法公式，我们就用导数的定义

$$f'\left(a\right)=\lim_{x\to a}\frac{f\left(x\right)-f\left(a\right)}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{\left(x-a\right)g\left(x\right)-0}{x-a}$$

$$=\lim_{x\to a}g\left(x\right)=g\left(a\right)。$$

特训题 39、 曲线 $\sin\left(xy\right)+\ln\left(y-x\right)=x$ 在点 $\left(0,1\right)$ 处的切线方程为_________.

解： $y=x+1$.

分析：设 $F(x,y)=\sin(xy)+\ln(y-x)-x$，斜率 $k=-\dfrac{F_x}{F_y}=\dfrac{y\cos(xy)+\dfrac{-1}{y-x}-1}{x\cos(xy)+\dfrac{1}{y-x}}$，在 $(0,1)$ 处， $k=1$，所以切线方程为 $y-1=x$，即 $y=x+1$

特训题 40、 讨论函数

$$y=f\left(x\right)=\left|x\right|=\begin{cases}-x & x<0\\ x & x\geq 0\end{cases}$$

在 $x_0=0$ 处连续性与可导性。

解　函数 $y=f(x)=|x|$ 在 $x_0=0$ 处连续，因为 $f(0)=0$

$$\lim_{x\to0^-} f(x)=\lim_{x\to0^-} f(-x)=0$$

$$\lim_{x\to0^+} f(x)=\lim_{x\to0^+} x=0$$

则 $\lim_{x\to0}|x|=f(0)=0$

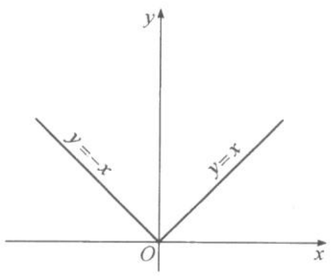
但是，在 $x_0=0$ 处 $f(x)$ 没有导数，因为

$$f'_-(0)=\lim_{\Delta x\to0^-}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to0^-}\frac{|0+\Delta x|-0}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to0^-}\frac{|\Delta x|}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to0^-}\frac{-\Delta x}{\Delta x}=-1$$

$$f'_+(0)=\lim_{\Delta x\to0^+}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to0^+}\frac{|0+\Delta x|-0}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to0^+}\frac{|\Delta x|}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to0^+}\frac{\Delta x}{\Delta x}=1$$



$f'_-(0)\neq f'_+(0)$ 曲线 $y=|x|$ 在原点的切线不存在（见上图）。

特训题 41、　设函数

$$f(x)=\begin{cases} x^2 & x\le1 \\ ax+b & x>1 \end{cases}$$

试确定 a、b 的值，使 $f(x)$ 在点 $x=1$ 处可导。

解∵可导一定连续，∴ $f(x)$ 在 $x=1$ 处也是连续的，

由　$$f(1-0)=\lim_{x\to1^-} f(x)=\lim_{x\to1^-} x^2=1$$

$$f(1+0)=\lim_{x\to1^+} f(x)=\lim_{x\to1^+}(ax+b)=a+b$$

要使 $f(x)$ 在点 $x=1$ 处连续，必须有 $a+b=1$ 或 $b=1-a$

又 $f'_-(1)=\lim_{x\to1^-}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1^-}\dfrac{x^2-1}{x-1}=\lim_{x\to1^-}(x+1)=2$

$$f'_+(1)=\lim_{x\to1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1^+}\frac{ax+b-1}{x-1}=\lim_{x\to1^+}\frac{a(x-1)}{x-1}=a$$

要使 $f(x)$ 在点 $x=1$ 处可导，必须 $f'_-(1)=f'_+(1)$，即 $2=a$

故当 $a=2$，$b=1-a=1-2=-1$ 时，$f(x)$ 在点 $x=1$ 处可导。

特训题 42、求下列函数的导数：

（1）$y=\sqrt{1+x^2}\ln(x+\sqrt{1+x^2})$ （2）$y=\cot^2x-\arccos\sqrt{1-x^2}$

解 （1）$y'=\left(\sqrt{1+x^2}\right)'\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)+\sqrt{1+x^2}\left(\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\right)'$

$$=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)+\sqrt{1+x^2}\left[\frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\cdot\left(1+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)\right]$$

$$=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)+1$$

（2）$y'=\left(\cot^2x\right)'-\left(\arccos\sqrt{1-x^2}\right)'$

$$=-2\cot x\csc^2x+\frac{1}{\sqrt{1-1+x^2}}\cdot\frac{(-x)}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$=-\left(\frac{2\cos x}{\sin^3x}+\frac{x}{|x|\sqrt{1-x^2}}\right)$$

特训题 43、 求下列函数的微分

（1）$y=e^{x^2}\sin\sqrt{x}$ （2）$y=\dfrac{\ln x+\cot x}{\sin x}$

解 （1）$dy=\sin\sqrt{x}de^{x^2}+e^{x^2}d\sin\sqrt{x}=2xe^{x^2}\sin\sqrt{x}dx+\dfrac{\cos\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}\cdot e^{x^2}dx$

$$=e^{x^2}\left(2x\sin\sqrt{x}+\frac{\cos\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}\right)dx$$

（2）$dy=\dfrac{\sin xd(\ln x+\cot x)-(\ln x+\cot x)d\sin x}{(\sin x)^2}$

$$=\frac{1}{\sin x}\left(\frac{1}{x}-\csc^2x\right)dx-\cos x(\ln x+\cot x)dx$$

$$=\left(\frac{1}{x\sin x}-\csc^3x-\cos x\ln x-\cos x\cot x\right)dx$$

特训题 44、 设 $f(x)=x(x-1)(x-2)\cdots(x-100)$，求 $f'(50)$.

解 令 $g(x)=x(x-1)(x-2)\cdots(x-49)($

则 $\quad f(x)=(x-50)g(x)$

因此 $\quad f'(x)=g(x)+(x-50)g'(x)$

$$f'(50)=g(50)=(50!)(-1)^{50}(50!)=(50!)^2$$

特训题 45、 设 $f(x)$ 可微，$y=f(\ln x)e^{f(x)}$，求 dy.

解 $\quad dy=f(\ln x)de^{f(x)}+e^{f(x)}d(f(\ln x))$

$=f'(x)e^{f(x)}f(\ln x)dx+\dfrac{1}{x}f'(\ln x)e^{f(x)}dx$

$=e^{f(x)}\left[f'(x)f(\ln x)+\dfrac{1}{x}f'(\ln x)\right]dx$

特训题 46、 设 $y=y(x)$ 由方程 $\arctan(x^2+y^2)=ye^{\sqrt{x}}$ 所确定，求 $\dfrac{dy}{dx}$ 和 dy .

解一 对方程两边关于 x 求导，y 看作 x 的函数，按中间变量处理.

$$\frac{1}{1+\left(x^2+y^2\right)^2}(2x+2yy')=y'e^{\sqrt{x}}+\frac{y}{2\sqrt{x}}e^{\sqrt{x}}$$

$$y'\left[\frac{2y}{1+\left(x^2+y^2\right)^2}-e^{\sqrt{x}}\right]=\frac{y}{2\sqrt{x}}e^{\sqrt{x}}-\frac{2x}{1+\left(x^2+y^2\right)^2}$$

$$y'=\frac{\dfrac{y}{2\sqrt{x}}e^{\sqrt{x}}-\dfrac{2x}{1+\left(x^2+y^2\right)^2}}{\dfrac{2y}{1+\left(x^2+y^2\right)^2}-e^{\sqrt{x}}}=\frac{ye^{\sqrt{x}}\left[1+\left(x^2+y^2\right)^2\right]-4\sqrt{x}x}{4y\sqrt{x}-2\sqrt{x}\left[1+\left(x^2+y^2\right)^2\right]e^{\sqrt{x}}}$$

于是，$dy=\dfrac{ye^{\sqrt{x}}\left[1+\left(x^2+y^2\right)^2\right]-4\sqrt{x}x}{4y\sqrt{x}-2\sqrt{x}\left[1+\left(x^2+y^2\right)^2\right]e^{\sqrt{x}}}dx$

解二 对方程两边求微分，根据一阶微分形式不变性.

$$d\left[\arctan(x^2+y^2)\right]=d\left[ye^{\sqrt{x}}\right]$$

$$\frac{1}{1+\left(x^2+y^2\right)^2}d\left(x^2+y^2\right)=e^{\sqrt{x}}dy+yde^{\sqrt{x}}$$

$$\frac{2}{1+\left(x^2+y^2\right)^2}\left(xdx+ydy\right)=e^{\sqrt{x}}dy+\frac{y}{2\sqrt{x}}e^{\sqrt{x}}dx$$

$$\left[\frac{2y}{1+\left(x^2+y^2\right)^2}-e^{\sqrt{x}}\right]dy=\left[\frac{y}{2\sqrt{x}}e^{\sqrt{x}}-\frac{2x}{1+\left(x^2+y^2\right)^2}\right]dx$$

$$\frac{4y\sqrt{x}-2\sqrt{x}\left[1+\left(x^2+y^2\right)^2\right]e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}\left[1+\left(x^2+y^2\right)^2\right]}dy=\frac{ye^{\sqrt{x}}\left[1+\left(x^2+y^2\right)^2\right]-4\sqrt{x}x}{2\sqrt{x}\left[1+\left(x^2+y^2\right)^2\right]}dx$$

$$dy=\frac{ye^{\sqrt{x}}\left[1+\left(x^2+y^2\right)^2\right]-4\sqrt{x}x}{4y\sqrt{x}-2\sqrt{x}\left[1+\left(x^2+y^2\right)^2\right]e^{\sqrt{x}}}dx$$

于是 $$\frac{dy}{dx}=\frac{ye^{\sqrt{x}}\left[1+\left(x^2+y^2\right)^2\right]-4\sqrt{x}x}{4y\sqrt{x}-2\sqrt{x}\left[1+\left(x^2+y^2\right)^2\right]e^{\sqrt{x}}}$$

特训题 47、 求 $y=\sqrt[3]{\dfrac{x(x+1)(x+2)}{(x^2+1)(e^x+x)}}$ 的导数 y'.

解 $\ln y=\dfrac{1}{3}\left[\ln x+\ln(x+1)+\ln(x+2)-\ln(x^2+1)-\ln(e^x+x)\right]$

对 x 求导，得

$$\frac{1}{y}y'=\frac{1}{3}\left[\frac{1}{x}+\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x+2}-\frac{2x}{x^2+1}-\frac{e^x+1}{e^x+x}\right]$$

因此，$y'=\dfrac{1}{3}\sqrt[3]{\dfrac{x(x+1)(x+2)}{(x^2+1)(e^x+x)}}\left[\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{1}{x+2}-\dfrac{2x}{x^2+1}-\dfrac{e^x+1}{e^x+x}\right]$

特训题 48、 设 $\begin{cases}x=\ln(1+t^3)\\ y=t^2\sin t\end{cases}$，求 $\dfrac{dy}{dx}$.

解 $$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{2t\sin t+t^2\cos t}{\frac{3t^2}{1+t^3}}$$

$$=\frac{\left(1+t^3\right)\left(2t\sin t+t^2\cos t\right)}{3t^2}=\frac{\left(1+t^3\right)\left(2\sin t+t\cos t\right)}{3t}$$

特训题 49、 证明曲线 $y=\dfrac{1}{x}(x>0)$ 上任一点 $\left(x_0,\dfrac{1}{x_0}\right)$ 处切线与两坐标轴所围成的直角三角形面积恒为 2.

证 所求切线方程为 $y-\dfrac{1}{x_0}=\dfrac{-1}{x_0^2}\left(x-x_0\right)$

令 $y=0$，得切线截 x 轴的截距 $X=2x_0$，

令 $x=0$，得切线截 y 轴的截距 $Y=\dfrac{2}{x_0}$，

直角三角形面积 $S=\frac{1}{2}XY=\frac{1}{2}(2x_0)\left(\frac{2}{x_0}\right)=2$

特训题 50、求曲线$\begin{cases}x=1+t^2\\ y=t^3\end{cases}$在 $t=2$ 处的切线方程.

解 $x_0=1+2^2=5$，$y_0=2^3=8$. $\frac{dy}{dx}=\frac{3t^2}{2t}=\frac{3}{2}t$

$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=2}=3$，故切线方程为 $y-8=3(x-5)$

即 $3x-y-7=0$

特训题 51、设函数 y=y(x)由参数方程$\begin{cases}x=t^2+2t,\\ y=\ln(1+t)\end{cases}$确定，则曲线 y=y(x)在 x=3 处的法线与 x 轴交点的横坐标是

(A) $\frac{1}{8}\ln 2+3$.　　(B) $-\frac{1}{8}\ln 2+3$.

(C) $-8\ln 2+3$.　　(D) $8\ln 2+3$.　　[A]

【详解】 当 x=3 时，有 $t^2+2t=3$，得 $t=1, t=-3$（舍去，此时 y 无意义），于是

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=1}=\left.\frac{\frac{1}{1+t}}{2t+2}\right|_{t=1}=\frac{1}{8}$$，可见过点 x=3(此时 y=ln2)的法线方程为:

$$y-\ln 2=-8(x-3),$$

令 y=0, 得其与 x 轴交点的横坐标为：$\frac{1}{8}\ln 2+3$，故应(A).

特训题 52、设函数 $y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases}x=t^3+3t+1\\ y=t^3-3t+1\end{cases}$ 确定，则曲线 $y=y(x)$ 向上凸的 x 取值范围为________________

【分析】 判别由参数方程定义的曲线的凹凸性，先用由 $\begin{cases}x=x(t)\\ y=y(t)\end{cases}$

定义的 $\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{y''(t)x'(t)-x''(t)y'(t)}{(x'(t))^3}$ 求出二阶导数, 再由 $\frac{d^2y}{dx^2}<0$ 确定 x 的取值范围.

【详解】 $\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{3t^2-3}{3t^2+3}=\frac{t^2-1}{t^2+1}=1-\frac{2}{t^2+1}$,

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)\frac{dt}{dx}=\left(1-\frac{2}{t^2+1}\right)'\frac{1}{3(t^2+1)}=\frac{4t}{3(t^2+1)^3},$$

令 $\frac{d^2y}{dx^2}<0 \Rightarrow t<0$.

又 $x=t^3+3t+1$ 单调增，在 $t<0$ 时，$x\in(-\infty,1)$。($\because t=0$ 时，$x=1\Rightarrow x\in(-\infty,1]$ 时，曲线凸.)

特训题 53、设 $f(x)$ 在 $[0,3]$ 上连续，在 $(0,3)$ 内可导，且 $f(0)+f(1)+f(2)=3$，$f(3)=1$，试证：必存在 $\xi\in(0,3)$，使 $f'(\xi)=0$。

证 $\because f(x)$ 在 $[0,3]$ 上连续，$\therefore f(x)$ 在 $[0,2]$ 上连续，且有最大值 M 和最小值 m，于是 $m\le f(0)\le M$；$m\le f(1)\le M$；$m\le f(2)\le M$，故 $m\le\frac{1}{3}[f(0)+f(1)+f(2)]\le M$。

由连续函数介值定理可知，至少存在一点 $c\in[0,2]$，使得

$$f(c)=\frac{1}{3}[f(0)+f(1)+f(2)]=1$$

因此 $f(c)=f(3)$，且 $f(x)$ 在 $[c,3]$ 上连续，$(c,3)$ 内可导，由罗尔定理得出必存在 $\xi\in(c,3)\subset(0,3)$，使得 $f'(\xi)=0$。

特训题 54、 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，且 $3\int_{\frac{2}{3}}^{1}f(x)dx=f(0)$.

求证：存在 $\xi\in(0,1)$ 使 $f'(\xi)=0$

证 由积分中值定理可知，存在 c，使得 $\int_{\frac{2}{3}}^{1}f(x)dx=f(c)\left(1-\frac{2}{3}\right)$

得到 $f(c)=3\int_{\frac{2}{3}}^{1}f(x)dx=f(0)$

对 $f(x)$ 在 $[0,c]$ 上用罗尔定理（三个条件都满足），

故存在 $\xi\in(0,c)\subset(0,1)$，使 $f'(\xi)=0$

特训题 55、设 $x>0$，试证：$\frac{x}{1+x}<\ln(1+x)<x$.

证 令 $f(t)=\ln(1+t)$，它在 $[0,x]$ 上满足拉格朗日中值定理条件，

$\because f'(t)=\frac{1}{1+t}$，$\therefore \ln(1+x)-\ln 1=\frac{1}{1+\xi}[x-0]$，$(0<\xi<x)$

因此 $\ln(1+x)=\frac{x}{1+\xi}$ $(0<\xi<x)$

于是 $\frac{x}{1+x}<\ln(1+x)<x$ 成立.

特训题 56、 设不恒为常数的函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，(a,b) 内可导，且 $f(a)=f(b)$，证明 (a,b) 内至少有一点 ξ，使得 $f'(\xi)>0$.

证　由题意可知存在 $c\in(a,b)$ 使得　$f(c)\neq f(a)=f(b)$

如果 $f(c)>f(a)$，则 $f(x)$ 在 $[a,\ c]$ 上用拉格朗日中值定理存在 $\xi_1\in(a,c)$，使 $f'(\xi_1)=\dfrac{f(c)-f(a)}{c-a}>0$

如果 $f(b)>f(c)$，则 $f(x)$ 在 $[c,\ b]$ 上用拉格朗日中值定理存在 $\xi_2\in(c,b)$，使 $f'(\xi_2)=\dfrac{f(b)-f(c)}{b-c}>0$，

因此，必有 $\xi\in(a,b)$，使得 $f'(\xi)>0$　成立.

特训题 57、　设 $f''(x)<0$， $f(0)=0$，证明对任意 $x_1>0$， $x_2>0$ 恒有

$f(x_1+x_2)<f(x_1)+f(x_2)$

证　不妨假设 $x_1\le x_2$，由拉格朗日中值定理有

① $f(x_1)=f(x_1)-f(0)=(x_1-0)f'(\xi_1)$，　$0<\xi_1<x_1$

② $f(x_1+x_2)-f(x_2)=[(x_1+x_2)-x_2]f'(\xi_2)$， $x_2<\xi_2<x_1+x_2$，从而可知 $\xi_1<\xi_2$，

$\because f''(x)<0$，$\therefore f'(x)$ 单调减少，于是 $f'(\xi_1)>f'(\xi_2)$

这样由①②两式可知　$f(x_1)>f(x_1+x_2)-f(x_2)$

因此，$f(x_1+x_2)<f(x_1)+f(x_2)$　成立.

特训题 58、　设 $f(x)$ 在 $[a,\ b]$ 上连续，$(a,\ b)$ 内可导，且 $b>a>0$，证明：存在 $\xi\in(a,b)$，$\eta\in(a,b)$ 使

$f'(\eta)=\dfrac{a+b}{2}\cdot\dfrac{f'(\xi)}{\xi}$

证　考虑柯西中值定理（$g(x)$ 待定）

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(\eta)(b-a)}{g(b)-g(a)}$$

最后一步是把分子用拉格朗日中值定理.
再把欲证的结论变形，

$$\frac{f'(\xi)}{2\xi}=\frac{f'(\eta)}{a+b}=\frac{f'(\eta)(b-a)}{b^2-a^2}$$

两式比较，看出令 $g(x)=x^2$ 即可.

类似地，欲证 $f'(\eta)=\dfrac{b^2+ab+a^2}{3}\cdot\dfrac{f'(\xi)}{\xi^2}$，则取 $g(x)=x^3$ 即可

特训题 59、设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上二阶可导，且 $f(0)=f'(0)=f'(1)=0$， $f(1)=1$.

求证：存在 $x \in (0,1)$，使得 $\left|f''(x)\right| \geq 4$

证　先把 $f(x)$ 在 $x=0$ 处展成拉格朗日型余项的一阶泰勒公式

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{1}{2!}f''(\xi_1)x^2 \qquad (0<\xi_1<x)$$

再把 $f(x)$ 在 $x=1$ 处展成拉格朗日型余项的一阶泰勒公式

$$f(x)=f(1)+f'(1)(x-1)+\frac{1}{2!}f''(\xi_2)(x-1)^2 \qquad (x<\xi_2<1)$$

在上面两个公式中皆取 $x=\frac{1}{2}$ 则得

$$f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{8}f''(\xi_1) \qquad \left(0<\xi_1<\frac{1}{2}\right)$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right)=1+\frac{1}{8}f''(\xi_2) \qquad \left(\frac{1}{2}<\xi_2<1\right)$$

两式相减，得 $f''(\xi_1)-f''(\xi_2)=8$，于是 $\left|f''(x_1)\right|+\left|f''(x_2)\right| \geq 8$

因此　　$\max\left\{\left|f''(x_1)\right|,\left|f''(x_2)\right|\right\} \geq 4$

亦即证明存在 $x \in (0,1)$，使 $\left|f''(x)\right| \geq 4$

特训题 60、　设在 $[0,1]$ 上 $f''(x)>0$，则 $f'(0)$，$f'(1)$，$f(1)-f(0)$ 或 $f(0)-f(1)$ 的大小顺序是（　　）

（A）　$f'(1)>f'(0)>f(1)-f(0)$　　　（B）$f'(1)>f(1)-f(0)>f'(0)$

（C）　$f(1)-f(0)>f'(1)>f'(0)$　　　（D）$f'(1)>f(0)-f(1)>f'(0)$

解　选 (B)

$\because$ 根据拉格朗日中值定理 $f(1)-f(0)=f'(\xi)(1-0)=f'(\xi)$

其中 $0<\xi<1$，又 $f''(x)>0$，$\therefore$ $f'(x)$ 单调增加

因此，　$f'(1)>f'(\xi)>f'(0)$

特训题 61、 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，且满足 $f(a)=0$，如果 $f'(x)$ 单调增加，求证 $\varphi(x)=\dfrac{f(x)}{x-a}$ 在 (a,b) 内单调增加.

证　$\varphi'(x)=\dfrac{(x-a)f'(x)-f(x)}{(x-a)^2}$

用拉格朗日中值定理

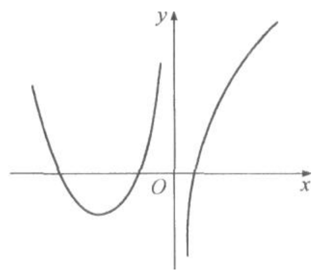
$$f(x)=f(x)-f(a)=f'(\xi)(x-a) \qquad (a<\xi<x)$$

于是 $$\varphi'(x)=\frac{f'(x)-f'(\xi)}{x-a}$$

$\because$ $f'(x)$是单调增加，$\therefore$ $f'(x)>f'(\xi)$

因此 $\varphi'(x)>0$，则$\varphi(x)$在(a,b)内单调增加

特训题 62、设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续，其导函数的图形如图所示，则 $f(x)$ 有（　　）

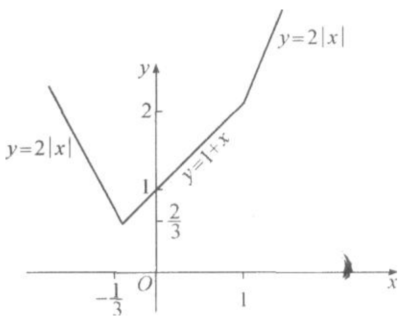


（A） 一个极小值点和两个极大值点
（B） 两个极小值点和一个极大值点
（C） 两个极小值点和两个极大值点
（D） 三个极小值点和一个极大值点

解　有三个驻点和一个不可导点，考察它们两侧导数的符号，用第一充分判别法可知，最小驻点为极大值点，另一个较小驻点为极小值点，原点为不可导点是极大值点，最大的驻点为极小值点，故应选 C

特训题 63、讨论 $f(x)=\max\left\{2|x|,|1+x|\right\}$ 的极值.

解 $$f(x)=\begin{cases}1+x & -\frac{1}{3}<x<1\\ 2|x| & x\geq 1或x\leq -\frac{1}{3}\end{cases}$$



$\therefore f\left(-\frac{1}{3}\right)=\frac{2}{3}$ 为极小值

特训题 64、 设 $f(x)$ 在 x_0 邻域内有定义，且

$\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{(x-x_0)^n}=k$，其中 n 为正整数，$k\neq 0$ 为常数，讨论（对 n） $f(x_0)$ 是否为极值.

解 $\frac{f(x)-f(x_0)}{(x-x_0)^n}=k+\alpha(x)$，其中 $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)=0$

$$f(x)-f(x_0)=k(x-x_0)^n+\alpha(x)(x-x_0)^n$$

（ i ）若 n 为正偶数，当 $|x-x_0|<\delta$（充分小），

则 $f(x)-f(x_0)$ 与 k 同号，当 $k>0$， $f(x_0)$ 为极小值；当 $k<0$， $f(x_0)$ 为极大值.

（ ii ）若 n 为正奇数，当 $|x-x_0|<\delta$（充分小），则 $f(x)-f(x_0)$ 在 x_0 两侧异号，所以 $f(x_0)$ 不是极值.

特训题 65、 设 $f(x)=\int_0^1|t(t-x)|dt$， $0<x<1$，求 $f(x)$ 的极值、单调区间和凹凸区间.

解： $f(x)=\int_0^x t(x-t)dt+\int_x^1 t(t-x)dt=\int_0^x(tx-t^2)dt+\int_x^1(t^2-tx)dt$

$$=(x\cdot\frac{t^2}{2}-\frac{t^3}{3})\Big|_0^x+(\frac{t^3}{3}-x\cdot\frac{t^2}{2})\Big|_x^1=(\frac{x^3}{2}-\frac{x^3}{3})+(\frac{1}{3}-\frac{x}{2})-(\frac{x^3}{3}-\frac{x^3}{2})$$

$$=\frac{x^3}{6}+\frac{1}{3}-\frac{x}{2}+\frac{x^3}{6}=\frac{x^3}{3}-\frac{x}{2}+\frac{1}{3}.$$

$f'(x)=x^2-\frac{1}{2}$,令 $f'(x)=0$，得 $x=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$.因为 $0<x<1$，所以 $x=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

$f'(x)>0$，得 $\frac{\sqrt{2}}{2}<x<1$

$f'(x)<0$，得 $0<x<\frac{\sqrt{2}}{2}$

因此， $f(x)$ 的单调增区间是 $(\frac{\sqrt{2}}{2},1)$；单调减区间是 $(0,\frac{\sqrt{2}}{2})$.

由 $f''(x)=2x$，可知 $(0,1)$ 为凹区间.

由 $f'(\frac{\sqrt{2}}{2})=0, f''(\frac{\sqrt{2}}{2})>0,$ 知 $f(\frac{\sqrt{2}}{2})=-\frac{\sqrt{2}}{6}+\frac{1}{3}$ 为极小值.

特训题 66、 设 $y=(1+\sin x)^x$，则 $dy\Big|_{x=\pi}=$ ________.

【分析】 本题属基本题型，幂指函数的求导（或微分）问题可化为指数函数求导或取对数后转化为隐函数求导.

【详解】 方法一： $y=(1+\sin x)^x=e^{x\ln(1+\sin x)}$，于是

$$y' = e^{x\ln(1+\sin x)}\cdot[\ln(1+\sin x)+x\cdot\frac{\cos x}{1+\sin x}],$$

从而 $\quad dy\big|_{x=\pi} = y'(\pi)dx = -\pi dx.$

方法二： 两边取对数，$\ln y = x\ln(1+\sin x)$，对 x 求导，得

$$\frac{1}{y}y' = \ln(1+\sin x)+\frac{x\cos x}{1+\sin x},$$

于是 $y' = (1+\sin x)^x\cdot[\ln(1+\sin x)+x\cdot\frac{\cos x}{1+\sin x}]$，故

$$dy\big|_{x=\pi} = y'(\pi)dx = -\pi dx.$$

特训题 67、 曲线 $y=\frac{(1+x)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{x}}$ 的斜渐近线方程为__________

【分析】 本题属基本题型，直接用斜渐近线方程公式进行计算即可.

【详解】 因为 a= $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(1+x)^{\frac{3}{2}}}{x\sqrt{x}}=1,$

$$b=\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-ax\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{(1+x)^{\frac{3}{2}}-x^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{x}}=\frac{3}{2},$$

于是所求斜渐近线方程为 $y=x+\frac{3}{2}.$

【评注】 如何求垂直渐近线、水平渐近线和斜渐近线，是基本要求，应熟练掌握。这里应注意两点：1）当存在水平渐近线时，不需要再求斜渐近线；2）若当 $x\to\infty$ 时，极限 $a=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}$ 不存在，则应进一步讨论 $x\to+\infty$ 或 $x\to-\infty$ 的情形，即在右或左侧是否存在斜渐近线，本题定义域为 x>0，所以只考虑 $x\to+\infty$ 的情形.

特训题 68、 当 $x\to 0$ 时，$\alpha(x)=kx^2$ 与 $\beta(x)=\sqrt{1+x\arcsin x}-\sqrt{\cos x}$ 是等价无穷小，则 k= ________

【分析】 题设相当于已知 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\beta(x)}{\alpha(x)}=1$，由此确定 k 即可.

【详解】 由题设，$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\beta(x)}{\alpha(x)}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x\arcsin x}-\sqrt{\cos x}}{kx^2}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x\arcsin x+1-\cos x}{kx^2(\sqrt{1+x\arcsin x}+\sqrt{\cos x})}$$

$$=\frac{1}{2k}\lim_{x\to 0}\frac{x\arcsin x+1-\cos x}{x^2}=\frac{3}{4k}=1，得 k=\frac{3}{4}.$$

【评注】 无穷小量比较问题是历年考查较多的部分，本质上，这类问题均转化为极限的计算.

特训题 69、 设函数 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+|x|^{3n}}$，则 f(x)在 $(-\infty,+\infty)$ 内

(A) 处处可导. (B) 恰有一个不可导点.

(C) 恰有两个不可导点. (D) 至少有三个不可导点. [ ]

【分析】 先求出 f(x)的表达式，再讨论其可导情形.

【详解】 当 $|x|<1$ 时，$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+|x|^{3n}}=1$；

当$|x|=1$时，$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+1}=1$；

当$|x|>1$时，$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}|x|^3(\frac{1}{|x|^{3n}}+1)^{\frac{1}{n}}=|x|^3$.

即 $f(x)=\begin{cases}-x^3, & x<-1,\\ 1, & -1\le x\le 1,\\ x^3, & x>1.\end{cases}$ 可见 f(x)仅在 x=± 1时不可导，故应选(C).

【评注】 本题综合考查了数列极限和导数概念两个知识点.

特训题 70、设函数 $f(x)=\dfrac{1}{e^{\frac{x}{x-1}}-1}$, 则

(A) x=0,x=1 都是 f(x)的第一类间断点.
（B） x=0,x=1 都是 f(x)的第二类间断点.
(C) x=0 是 f(x)的第一类间断点，x=1 是 f(x)的第二类间断点.
(D) x=0 是 f(x)的第二类间断点，x=1 是 f(x)的第一类间断点. [ ]

【分析】 显然 x=0,x=1 为间断点，其分类主要考虑左右极限.
【详解】 由于函数 f(x)在 x=0,x=1 点处无定义，因此是间断点.

且 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\infty$，所以 x=0 为第二类间断点；

$\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=0$，$\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=-1$，所以 x=1 为第一类间断点，故应选(D).

【评注】 应特别注意：$\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x}{x-1}=+\infty$，$\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{x}{x-1}=-\infty$. 从而$\lim\limits_{x\to 1^+}e^{\frac{x}{x-1}}=+\infty$，$\lim\limits_{x\to 1^-}e^{\frac{x}{x-1}}=0$.

特训题 71、 若$x\to 0$时，$(1-ax^2)^{\frac{1}{4}}-1$ 与$x\sin x$是等价无穷小，则 a=_________ .

【分析】 根据等价无穷小量的定义，相当于已知$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1-ax^2)^{\frac{1}{4}}}{x\sin x}=1$，反过来求 a. 注意在计算过程中应尽可能地应用无穷小量的等价代换进行化简.

【详解】 当$x\to 0$时，$(1-ax^2)^{\frac{1}{4}}-1\sim -\frac{1}{4}ax^2$，$x\sin x\sim x^2$.

于是，根据题设有 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1-ax^2)^{\frac{1}{4}}}{x\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-\frac{1}{4}ax^2}{x^2}=-\frac{1}{4}a=1$，故 a=-4.

特训题 72、 设函数 y=f(x)由方程$xy+2\ln x=y^4$所确定，则曲线 y=f(x)在点(1,1)处的切线方程是________ .

【分析】 先求出在点(1,1)处的导数，然后利用点斜式写出切线方程即可.

【详解】 等式$xy+2\ln x=y^4$两边直接对 x 求导，得

$$y+xy'+\frac{2}{x}=4y^3y',$$

将 x=1,y=1 代入上式，有 $y'(1)=1$. 故过点(1,1)处的切线方程为

$$y-1=1\cdot(x-1)，即 \quad x-y=0.$$

特训题 73、 $y=2^x$的麦克劳林公式中x^n项的系数是 ______________

【分析】 本题相当于先求 y=f(x)在点 x=0 处的 n 阶导数值 $f^{(n)}(0)$，则麦克劳林公式中 x^n 项的系数是

____

【详解】 因为 $y'=2^x\ln 2$， $y''=2^x(\ln 2)^2$， $\cdots, y^{(x)}=2^x(\ln 2)^n$，于是有

$y^{(n)}(0)=(\ln 2)^n$，故麦克劳林公式中 x^n 项的系数是 $\dfrac{y^{(n)}(0)}{n!}=\dfrac{(\ln 2)^n}{n!}$.

特训题 74 设$\{a_n\},\{b_n\},\{c_n\}$均为非负数列，且 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0, \lim\limits_{n\to\infty}b_n=1, \lim\limits_{n\to\infty}c_n=\infty$,则必有

(A) $a_n<b_n$ 对任意 n 成立. (B) $b_n<c_n$ 对任意 n 成立.

(C) 极限 $\lim\limits_{n\to\infty}a_nc_n$ 不存在. (D) 极限 $\lim\limits_{n\to\infty}b_nc_n$ 不存在. [ ]

【分析】 本题考查极限概念，极限值与数列前面有限项的大小无关，可立即排除(A),(B)； 而极限 $\lim\limits_{n\to\infty}a_nc_n$ 是 $0\cdot\infty$ 型未定式，可能存在也可能不存在，举反例说明即可；极限 $\lim\limits_{n\to\infty}b_nc_n$ 属 $1\cdot\infty$ 型，必为无穷大量，即不存在.

【详解】 用举反例法，取 $a_n=\dfrac{2}{n}$， $b_n=1$， $c_n=\dfrac{1}{2}n(n=1,2,\cdots)$，则可立即排除(A),(B),(C)，因此正确选项为(D).

特训题 75 设函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\ln(1+ax^3)}{x-\arcsin x}, & x<0,\\ 6, & x=0,\\ \dfrac{e^{ax}+x^2-ax-1}{x\sin\frac{x}{4}}, & x>0,\end{cases}$

问 a 为何值时，f(x)在 x=0 处连续；a 为何值时，x=0 是 f(x)的可去间断点？

【分析】 分段函数在分段点 x=0 连续，要求既是左连续又是右连续，即

$$f(0-0)=f(0)=f(0+0).$$

【详解】 $f(0-0)=\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{\ln(1+ax^3)}{x-\arcsin x}=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{ax^3}{x-\arcsin x}$

$$=\lim_{x\to0^-}\frac{3ax^2}{1-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}=\lim_{x\to0^-}\frac{3ax^2}{\sqrt{1-x^2}-1}$$

$$=\lim_{x\to0^-}\frac{3ax^2}{-\frac{1}{2}x^2}=-6a.$$

$$f(0+0)=\lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^+}\frac{e^{ax}+x^2-ax-1}{x\sin\frac{x}{4}}$$

$$=4\lim_{x\to 0^+}\frac{e^{ax}+x^2-ax-1}{x^2}=4\lim_{x\to 0^+}\frac{ae^{ax}+2x-a}{2x}=2a^2+4.$$

令 $f(0-0)=f(0+0)$，有 $-6a=2a^2+4$，得 $a=-1$ 或 $a=-2$.

当 a=-1 时，$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=6=f(0)$，即 f(x)在 x=0 处连续.

当 a=-2 时，$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=12\neq f(0)$，因而 x=0 是 f(x)的可去间断点.

【评注】 本题为基本题型，考查了极限、连续与间断等多个知识点，其中左右极限的计算有一定难度，在计算过程中应尽量利用无穷小量的等价代换进行简化.

特训题 76、设函数 y=y(x)由参数方程$\begin{cases} x=1+2t^2, \\ y=\int_1^{1+2\ln t}\frac{e^u}{u}du \end{cases}(t>1)$所确定，求$\frac{d^2y}{dx^2}\Big|_{x=9}$.

【分析】 本题为参数方程求二阶导数，按参数方程求导的公式进行计算即可. 注意当 x=9 时，可相应地确定参数 t 的取值.

【详解】 由 $\frac{dy}{dt}=\frac{e^{1+2\ln t}}{1+2\ln t}\cdot\frac{2}{t}=\frac{2et}{1+2\ln t}$， $\frac{dx}{dt}=4t$，

得 $$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{\frac{2et}{1+2\ln t}}{4t}=\frac{e}{2(1+2\ln t)},$$

所以 $$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)\frac{1}{\frac{dx}{dt}}=\frac{e}{2}\cdot\frac{-1}{(1+2\ln t)^2}\cdot\frac{2}{t}\cdot\frac{1}{4t}$$

$$=-\frac{e}{4t^2(1+2\ln t)^2}.$$

当 x=9 时，由 $x=1+2t^2$ 及 t>1 得 t=2，故

$$\frac{d^2y}{dx^2}\Big|_{x=9}=-\frac{e}{4t^2(1+2\ln t)^2}\Big|_{t=2}=-\frac{e}{16(1+2\ln 2)^2}.$$

特训题 77、设 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n-1)x}{nx^2+1}$，则 $f(x)$ 的间断点为 $x=$___ .

【分析】 本题属于确定由极限定义的函数的连续性与间断点. 对不同的 x，先用求极限的方法得出 $f(x)$ 的表达式，再讨论 $f(x)$ 的间断点.

【详解】 显然当 $x=0$ 时，$f(x)=0$；

当 $x\neq 0$ 时， $$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{(n-1)x}{nx^2+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{(1-\frac{1}{n})x}{x^2+\frac{1}{n}}=\frac{x}{x^2}=\frac{1}{x},$$

所以 $f(x)=\begin{cases}0, & x=0\\ \frac{1}{x}, & x\neq 0\end{cases}$,

因为 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}=\infty\neq f(0)$

故 $x=0$ 为 $f(x)$ 的间断点.

特训题 78、设函数 $y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases}x=t^3+3t+1\\ y=t^3-3t+1\end{cases}$ 确定，则曲线 $y=y(x)$ 向上凸的 x 取值范围为____________________

【分析】判别由参数方程定义的曲线的凹凸性，先用由 $\begin{cases}x=x(t)\\ y=y(t)\end{cases}$

定义的 $\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{y''(t)x'(t)-x''(t)y'(t)}{(x'(t))^3}$ 求出二阶导数, 再由 $\frac{d^2y}{dx^2}<0$ 确定 x 的取值范围.

【详解】 $\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{3t^2-3}{3t^2+3}=\frac{t^2-1}{t^2+1}=1-\frac{2}{t^2+1}$,

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)\frac{dt}{dx}=\left(1-\frac{2}{t^2+1}\right)'\frac{1}{3(t^2+1)}=\frac{4t}{3(t^2+1)^3},$$

令 $\frac{d^2y}{dx^2}<0 \Rightarrow t<0$.

又 $x=t^3+3t+1$ 单调增，在 $t<0$ 时，$x\in(-\infty,1)$。($\because t=0$ 时，$x=1\Rightarrow x\in(-\infty,1]$ 时，曲线凸.)

特训题 79、把 $x\to 0^+$ 时的无穷小量 $\alpha=\int_0^x\cos t^2dt$，$\beta=\int_0^{x^2}\tan\sqrt{t}\,dt$，$\gamma=\int_0^{\sqrt{x}}\sin t^3dt$ 排列起来，使排在后面的是前一个的高阶无穷小，则正确的排列次序是

（A）α,β,γ.　　（B）α,γ,β.

（C）β,α,γ.　　（D）β,γ,α.　　（　）

【分析】对与变限积分有关的极限问题，一般可利用洛必塔法则实现对变限积分的求导并结合无穷小代换求解.

【详解】 $\because \lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\gamma}{\alpha}=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\int_0^{\sqrt{x}}\sin t^3dt}{\int_0^x\cos t^2dt}$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin x^{\frac{3}{2}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\cos x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{x^{\frac{3}{2}}}{2\sqrt{x}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{2}=0,$$

即 $\gamma = \mathrm{o}(\alpha)$.

又 $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\beta}{\gamma} = \lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\int_0^{x^2}\tan\sqrt{t}dt}{\int_0^{\sqrt{x}}\sin t^3 dt} = \lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\tan x\cdot 2x}{\sin x^{\frac{3}{2}}\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{x}}} = \lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{2x^2}{\dfrac{1}{2}x} = 0$,

即 $\beta = \mathrm{o}(\gamma)$.

从而按要求排列的顺序为α、γ、β，故选（B）.

特训题 80、设 $f(x) = |x(1-x)|$，则

（A） $x=0$ 是 $f(x)$ 的极值点，但$(0,0)$不是曲线 $y=f(x)$ 的拐点.

（B） $x=0$ 不是 $f(x)$ 的极值点，但$(0,0)$是曲线 $y=f(x)$ 的拐点.

（C） $x=0$ 是 $f(x)$ 的极值点，且$(0,0)$是曲线 $y=f(x)$ 的拐点.

（D） $x=0$ 不是 $f(x)$ 的极值点，$(0,0)$也不是曲线 $y=f(x)$ 的拐点.　　（　　　）

【分析】求分段函数的极值点与拐点，　按要求只需讨论$x=0$两方 $f'(x)$，$f''(x)$ 的符号.

【详解】 $f(x) = \begin{cases} -x(1-x), & -1 < x \le 0 \\ x(1-x), & 0 < x < 1 \end{cases}$,

$f'(x) = \begin{cases} -1+2x, & -1 < x < 0 \\ 1-2x, & 0 < x < 1 \end{cases}$,

$f''(x) = \begin{cases} 2\ , & -\ 1<x\ < \\ -2\ , & 0<x\ < \end{cases}$,

从而$-1 < x < 0$时，$f(x)$凹，$1 > x > 0$时，$f(x)$凸，于是$(0,0)$为拐点.

又 $f(0)=0$，$x \ne 0$、1时，$f(x) > 0$，从而$x=0$为极小值点.

所以，$x=0$是极值点，$(0,0)$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点，故选（C）.

特训题 81、设函数 $f(x)$ 连续，且 $f'(0) > 0$，则存在$\delta > 0$，使得

（A） $f(x)$ 在 $(0,\delta)$ 内单调增加.

（B） $f(x)$ 在 $(-\delta,0)$ 内单调减小.

（C）对任意的 $x\in(0,\delta)$ 有 $f(x) > f(0)$.

（D）对任意的 $x\in(-\delta,0)$ 有 $f(x) > f(0)$.　　　　(　　)

【分析】可借助于导数的定义及极限的性质讨论函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 附近的局部性质.

【详解】由导数的定义知

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}>0,$$

由极限的性质，$\exists\delta>0$，使$|x|<\delta$时，有

$$\frac{f(x)-f(0)}{x}>0$$

即 $\delta>x>0$时，$f(x)>f(0)$,

$-\delta<x<0$时，$f(x)<f(0)$,

故选（C）.

特训题 82、求极限$\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^3}\left[\left(\frac{2+\cos x}{3}\right)^x-1\right]$.

【分析】此极限属于$\frac{0}{0}$型未定式. 可利用罗必塔法则, 并结合无穷小代换求解.

【详解 1】 原式$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x\ln\left(\frac{2+\cos x}{3}\right)}-1}{x^3}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(\frac{2+\cos x}{3}\right)}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(2+\cos x)-\ln 3}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2+\cos x}\cdot(-\sin x)}{2x}$$

$$=-\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{1}{2+\cos x}\cdot\frac{\sin x}{x}=--$$

【详解 2】 原式$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x\ln\left(\frac{2+\cos x}{3}\right)}-1}{x^3}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(\frac{2+\cos x}{3}\right)}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(1+\frac{\cos x-1}{3}\right)}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{3x^2}=-\frac{1}{6}$$

特训题 83、设函数 $f(x)$ 在（$-\infty,+\infty$）上有定义，在区间$[0,2]$上，$f(x)=x(x^2-4)$，若对任意的 x 都满足 $f(x)=kf(x+2)$，其中k为常数.

（Ⅰ）写出 $f(x)$ 在$[-2,0]$上的表达式;

（Ⅱ）问 k 为何值时，$f(x)$ 在 $x=0$ 处可导.

【分析】分段函数在分段点的可导性只能用导数定义讨论.

【详解】(Ⅰ)当$-2\le x<0$, 即$0\le x+2<2$时,

$$f(x)=kf(x+2)=k(x+2)[(x+2)^2-4]=kx(x+2)(x+4).$$

(Ⅱ)由题设知 $f(0)=0$.

$$f'_+(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x(x^2-4)}{x}=-4$$

$$f'_-(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{kx(x+2)(x+4)}{x}=8k.$$

令 $f'_-(0)=f'_+(0)$，得$k=-\frac{1}{2}$.

即当$k=-\frac{1}{2}$时, $f(x)$在$x=0$处可导.

特训题 84、设$e<a<b<e^2$，证明$\ln^2 b-\ln^2 a>\frac{4}{e^2}(b-a)$.

【分析】文字不等式可以借助于函数不等式的证明方法来证明, 常用函数不等式的证明方法主要有单调性、极值和最值法等.

【详证 1】设$\varphi(x)=\ln^2 x-\frac{4}{e^2}x$，则

$$\varphi'(x)=2\frac{\ln x}{x}-\frac{4}{e^2}$$

$$\varphi''(x)=2\frac{1-\ln x}{x^2},$$

所以当$x>e$时，$\varphi''(x)<0$，故$\varphi'(x)$单调减小，从而当$e<x<e^2$时,

$$\varphi'(x)>\varphi'(e^2)=\frac{4}{e^2}-\frac{4}{e^2}=0,$$

即当$e<x<e^2$时，$\varphi(x)$单调增加.

因此，当$e<a<b<e^2$时，$\varphi(b)>\varphi(a)$，即

$$\ln^2 b-\frac{4}{e^2}b>\ln^2 a-\frac{4}{e^2}a$$

故 $$\ln^2 b-\ln^2 a>\frac{4}{e^2}(b-a).$$

【详证 2】设$\varphi(x)=\ln^2 x-\ln^2 a-\frac{4}{e^2}(x-a)$，则

$$\varphi'(x)=2\frac{\ln x}{x}-\frac{4}{e^2}$$

$$\varphi''(x)=2\frac{1-\ln x}{x^2},$$

$\therefore x>e$时，$\varphi''(x)<0 \quad \Rightarrow \varphi'(x)$□ ，从而当$e<x<e^2$时,

$$\varphi'(x) > \varphi'(e^2) = \frac{4}{e^2} - \frac{4}{e^2} = 0,$$

$\Rightarrow e < x < e^2$时，$\varphi(x)$单调增加.

$\Rightarrow e < a < b < e^2$时，$\varphi(x) > \varphi(a) = 0$。令$x = b$有$\varphi(b) > 0$

即
$$\ln^2 b - \ln^2 a > \frac{4}{e^2}(b-a).$$

【详证 3】证 对函数$\ln^2 x$在$[a,b]$上应用拉格朗日定理，得

$$\ln^2 b - \ln^2 a > \frac{2\ln\xi}{\xi}(b-a),\quad a < \xi < b.$$

设$\varphi(t) = \frac{\ln t}{t}$，则$\varphi'(t) = \frac{1-\ln t}{t^2}$，

当$t > e$时，$\varphi'(t) < 0$，所以$\varphi(t)$单调减小，

从而$\varphi(\xi) > \varphi(e^2)$，即

$$\frac{\ln\xi}{\xi} > \frac{\ln e^2}{e^2} = \frac{2}{e^2},$$

故
$$\ln^2 b - \ln^2 a > \frac{4}{e^2}(b-a)$$

特训题 85、曲线$y = \frac{x+4\sin x}{5x-2\cos x}$的水平渐近线方程为______________

$$\because\ \lim_{x\to\infty} y = \lim_{x\to\infty}\frac{1+\dfrac{4\sin x}{x}}{5-\dfrac{2\cos x}{x}} = \frac{1}{5}$$

特训题 86、设函数 $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^3}\displaystyle\int_0^x \sin t^2 dt, & x \neq 0 \\ a, & x = 0 \end{cases}$ 在 x=0 处连续，则 a=___________

$$\because\ \lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0}\frac{sm(x^2)}{3x^2} = \frac{1}{3}$$

特训题 87、设函数$y = y(x)$由方程 $y = 1 - xe^y$ 确定，则 $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0} =$ ______________

当 x=0 时，y=1，

又把方程每一项对 x 求导，$y' = -e^y - xe^y y'$

$y'(1+xe^y)=-e^y$ $\qquad$ $y'\big|_{x=0}=-\dfrac{e^y}{1+xe^y}\Big|_{\substack{x=0\\y=1}}=-e$

特训题 88、设函数 $y=f(x)$ 具有二阶导数，且 $f'(x)>0,\ \ f''(x)>0,\ \ \Delta x$ 为自变量 x 在点 x_0 处的增量，Δy与dy分别为$f(x)$在点x_0处对应增量与微分, 若 $\Delta x>0$，则（　　）

（A） $0<dy<\Delta y$ 　　（B） $0<\Delta y<dy$

（C） $\Delta y<dy<0$ 　　（D） $dy<\Delta y<0$

由 $f'(x)>0$可知$f(x)$严格单调增加

$f''(x)>0$可知$f(x)$是凹的

即知

特训题 89、设函数$g(x)$可微, $h(x)=e^{1+g(x)}, h'(1)=1, g'(1)=2$, 则 $g(1)$等于（　　）

（A） $\ln 3-1$ 　　（B） $-\ln 3-1$

（C） $-\ln 2-1$ 　　（D） $\ln 2-1$

$\because\ \ h'(x)=g'(x)e^{1+g(x)}$，$1=2e^{1+g(1)}$

特训题 90、试确定 A，B，C 的常数值，使 $e^x(1+Bx+Cx^2)=1+Ax+o(x^3)$ 其中 $o(x^3)$ 是当 $x\to 0$时比x^3的高阶无穷小.

解：泰勒公式 $e^x=1+x+\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{6}+o(x^3)$ 代入已知等式得

$$[1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+o(x^3)][1+Bx+Cx^2]=1+Ax+o(x^3)$$

整理得

$$1+(B+1)x+(C+B+\frac{1}{2})x^2+\left(\frac{B}{2}+C+\frac{1}{6}\right)+o(x^3)=1+Ax+o(x^3)$$

比较两边同次幂函数得

$B+1=A$ 　　①

$C+B+\dfrac{1}{2}=0$ 　　②

$\dfrac{B}{2}+C+\dfrac{1}{6}=0$ 　　③

式②-③得 　$\dfrac{B}{2}+\dfrac{1}{3}=0$ 　则$B=-\dfrac{2}{3}$

代入①得 　$A=\dfrac{1}{3}$

代入②得 　$C=\dfrac{1}{6}$

特训题 91、设数列$\{x_n\}$满足$0<x_1<\pi$，$x_{n+1}=\sin x_n(n=1,2,3,\cdots)$

证明：（1）$\lim\limits_{n\to\infty} x_{n+1}$存在，并求极限

（2）计算$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{x_{n+1}}{x_n}\right)^{\frac{1}{x_n^2}}$

证：（1）$\because x_2=\sin x_1,\ \therefore 0<x_2\le 1,$因此$n\ge 2$

$x_{n+1}=\sin x_n\le x_n,\{x_n\}$单调减少有下界$(\because\quad x_n\ge 0)$

根据准则 1，$\lim\limits_{n\to\infty} x_n=A$存在

在 $x_{n+1}=\sin x_n$ 两边取极限得 $A=\sin A\quad\therefore A=0$

因此$\lim\limits_{n\to\infty} x_{n+1}=0$

（2）原式$=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{\sin x_n}{x_n}\right)^{\frac{1}{x_n^2}}$　　为"1^∞"型

$\because$　离散散不能直接用洛必达法则

先考虑　$\lim\limits_{t\to 0}\left(\dfrac{\sin t}{t}\right)^{\frac{1}{t^2}}=e^{\lim\limits_{t\to 0}\frac{1}{t^2}\left[\ln\frac{\sin t}{t}\right]}$

用洛必达法则$=e^{\lim\limits_{t\to 0}\frac{1}{2t}\cdot\frac{1}{\frac{\sin t}{t}}\cdot\frac{(t\cos t-\sin t)}{t^2}}$

$$=e^{\lim\limits_{t\to 0}\frac{t\cos t-\sin t}{2t^3}}=e^{\lim\limits_{t\to 0}\frac{t\left[1-\frac{t^2}{2}+0(t^2)\right]-\left[t-\frac{t^3}{6}+0(t^3)\right]}{2t^3}}$$

$$=e^{\lim\limits_{t\to 0}\frac{\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{6}\right)t^3+0(t^3)}{2t^3}}=e^{-\frac{1}{6}}$$

特训题 92、证明：当$0<a<b<\pi$时，$b\sin b+2\cos b+\pi b>a\sin a+2\cos a+\dfrac{1}{\pi a}$

证：令 $f(x)=x\sin x+2\cos x+\pi x$

只需证明$0<a<x<\pi$时，$f(x)$单调增加（严格）

$f'(x)=\sin x+x\cos x-2\sin x+\pi$

$\quad=x\cos x-\sin x+\pi$

$f''(x)=\cos x-x\sin x-\cos x=-x\sin x<0$

$\therefore f'(x)$　单调减少（严格）

又 $f'(\pi)=\pi\cos\pi+\pi=0$

故$0<a<x<\pi$时　$f'(x)>0$则$f(x)$单调增加（严格）

$由 b>a 则 f(b)>f(a)$ 得证

特训题 93、已知曲线 L 的方程 $\begin{cases} x=t^2+1 \\ y=4t-t^2 \end{cases} \quad (t\ge 0)$

（I）讨论 L 的凹凸性

（II）过点 $(-1,0)$ 引 L 的切线，求切点 (x_0,y_0)，并写出切线的方程

（III）求此切线与 L（对应 $x\le x_0$ 部分）及 x 轴所围的平面图形的面积

解：（I）$\frac{dx}{dt}=2t,\frac{dy}{dt}=4-2t,\frac{dy}{dx}=\frac{4-2t}{2t}=\frac{2}{t}-1$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dt}\cdot\frac{1}{\frac{dx}{dt}}=\left(-\frac{2}{t^2}\right)\cdot\frac{1}{2t}=-\frac{1}{t^3}<0 \quad (t>0处)$$

$\therefore 曲线 L(在 t>0 处)是凸$

（II）切线方程为 $y-0=\left(\frac{2}{t}-1\right)(x+1)$，设 $x_0=t_0^2+1$，$y_0=4t_0-t_0^2$，

则 $4t_0-t_0^2=\left(\frac{2}{t_0}-1\right)(t_0^2+2),4t_0^2-t_0^3=(2-t_0)(t_0^2+2)$

得 $t_0^2+t_0-2=0,(t_0-1)(t_0+2)=0 \quad \because t_0>0 \quad \therefore t_0=1$

点为（2，3），切线方程为 $y=x+1$

（III）设 L 的方程 $x=g(y)$

则 $S=\int_0^3\left[\left(g(y)-(y-1)\right)\right]dy$

$t^2-4t+y=0$ 解出 $\mathrm{t}=2\pm\sqrt{4-y}$ 得 $x=\left(2\pm\sqrt{4-y}\right)^2+1$

由于（2，3）在 L 上，由 $y=3 得 x=2 可知 x=\left(2-\sqrt{4-y}\right)^2+1=g(y)$

$$S=\int_0^3\left[\left(9-y-4\sqrt{4-y}\right)-(y-1)\right]dy$$

$$=\int_0^3(10-2y)dy-4\int_0^3\sqrt{4-y}dy$$

$$=(10y-y^2)\Big|_0^3+4\int_0^3\sqrt{4-y}d(4-y)=21+4\times\frac{2}{3}\times(4-y)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^3$$

$$=21+\frac{8}{3}-\frac{64}{3}=3-\frac{2}{3}$$

特训题 94、当 $x\to 0^+$ 时，与 $\sqrt{x}$ 等价的无穷小量是

(A) $1-e^{\sqrt{x}}$.　(B) $\ln(1+\sqrt{x})$.　(C) $\sqrt{1+\sqrt{x}}-1$.　(D) $1-\cos\sqrt{x}$.　【　】

【答案】 应选(B).

【分析】 利用已知无穷小量的等价代换公式，尽量将四个选项先转化为其等价无穷小量，再进行比较分析找出正确答案.

【详解】 当 $x\to 0^+$ 时，有 $1-e^{\sqrt{x}}=-(e^{\sqrt{x}}-1)\sim-\sqrt{x}$；$\ln(1+\sqrt{x})\sim\sqrt{x}$；

$$\sqrt{1+\sqrt{x}}-1\sim\frac{1}{2}\sqrt{x}；\ 1-\cos\sqrt{x}\sim\frac{1}{2}(\sqrt{x})^2=\frac{1}{2}x.$$ 可见应选(B).

特训题 95、设函数 $f(x)$在 x=0 处连续，下列命题错误的是：

(A) 若 $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{x}$ 存在，则 $f(0)=0$.　(B) 若 $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)+f(-x)}{x}$ 存在，则 $f(0)=0$.

(C) 若 $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{x}$ 存在，则 $f'(0)$ 存在.　(D) 若 $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)-f(-x)}{x}$ 存在，则 $f'(0)$ 存在

【　】

【答案】 应选(D).

【分析】 本题为极限的逆问题，已知某极限存在的情况下，需要利用极限的四则运算等进行分析讨论。

【详解】(A),(B)两项中分母的极限为 0，因此分子的极限也必须为 0，均可推导出 $f(0)=0$.

若 $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{x}$ 存在，则 $f(0)=0,\ f'(0)=\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=0$，可见(C)也正确，故应选(D). 事实上，可举反例：$f(x)=|x|$ 在 x=0 处连续，且

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(-x)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{|x|-|-x|}{x}=0$$ 存在，但 $f(x)=|x|$ 在 x=0 处不可导 .

特训题 96、曲线 $y=\frac{1}{x}+\ln(1+e^x)$，渐近线的条数为

(A) 0.　(B) 1.　(C) 2.　(D) 3.　【　】

【答案】 应选(D).

【分析】 先找出无定义点，确定其是否为对应垂直渐近线；再考虑水平或斜渐近线。

【详解】 因为 $\lim\limits_{x\to0}[\frac{1}{x}+\ln(1+e^x)]=\infty$，所以 $x=0$ 为垂直渐近线；

又 $\lim\limits_{x\to-\infty}[\frac{1}{x}+\ln(1+e^x)]=0$，所以 y=0 为水平渐近线；

进一步，$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{y}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}[\frac{1}{x^2}+\frac{\ln(1+e^x)}{x}]=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(1+e^x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{1+e^x}=1$，

$$\lim_{x\to+\infty}[y-1\cdot x]=\lim_{x\to+\infty}[\frac{1}{x}+\ln(1+e^x)-x]=\lim_{x\to+\infty}[\ln(1+e^x)-x]$$

$$=\lim_{x\to+\infty}[\ln e^x(1+e^{-x})-x]=\lim_{x\to+\infty}\ln(1+e^{-x})=0,$$

于是有斜渐近线：$y=x$.　故应选(D).

特训题 97、 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^3+x^2+1}{2^x+x^3}(\sin x+\cos x)=$______________ .

【答案】 应填 0.

【详解】 因为 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^3+x^2+1}{2^x+x^3}=0$，而 sinx+cosx 有界，故

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3+x^2+1}{2^x+x^3}(\sin x+\cos x)=\mathbf{0}.$$

特训题 98、设函数 $y=\dfrac{1}{2x+3}$，则 $y^{(n)}(0)=$____________ .

【答案】 应填 $\dfrac{1}{3}(-1)^n n!(\dfrac{2}{3})^n$.

【详解】 $y=(2x+3)^{-1}$， $y'=-1\cdot 2(2x+3)^{-2}$， $y''=-1\cdot(-2)\cdot 2^2(2x+3)^{-3}$

一般地， $y^{(n)}=(-1)^n n!\,2^n(2x+3)^{-n-1}$，

从而 $y^{(n)}(0)=\dfrac{1}{3}(-1)^n n!(\dfrac{2}{3})^n$.

特训题 99、设函数 $y=y(x)$ 由方程 $y\ln y-x+y=0$ 确定，试判断曲线 $y=y(x)$ 在点(1, 1)附近的凹凸性.

【分析】 由凹凸性判别方法和隐函数的求导即得.

【详解 1】在 $y\ln y-x+y=0$ 两边对 x 求导得

$$y'\ln y+2y'-1=0$$

解得 $$y'=\frac{1}{\ln y+2}$$

两边对 x 再求导得 $$y''=\frac{-\frac{1}{y}\cdot y'}{(\ln y+2)^2}=-\frac{1}{y(\ln y+2)^3}\ .$$

将 x=1, y=1 代入得 $y''=-\dfrac{1}{8}$

由于二阶导函数 y'' 在 x=1 的附近是连续函数，所以由 $y''=-\dfrac{1}{8}$，可知在 x=1 的附近有 $y''<0$， 故曲线 $y=y(x)$ 在点(1, 1)附近是凸的.

【详解 2】 在 $y\ln y-x+y=0$ 两边对 x 求导得

$$y'\ln y+2y'-1=0$$

两边对 x 再求导得 $$y''\ln y+y'\cdot\frac{1}{y}y'+2y''=0$$

将 x=1, y=1 代入得上两式得 $y'=\dfrac{1}{2}$， $y''=-\dfrac{1}{8}$

由于二阶导函数 y'' 在 x=1 的附近是连续函数，所以由 $y''=-\dfrac{1}{8}$，可知在 x=1 的附近有 $y''<0$，故曲线 $y=y(x)$ 在点(1, 1)附近是凸的.

【详解 3】 将 x 看作 y 的函数，在 $y\ln y-x+y=0$ 两边对 y 求导得

$$x'=\ln y+y\times\frac{1}{y}+1=\ln y+$$

两边再对 y 求导得 $$x''=\frac{1}{y}$$

将 x=1, y =1 代入得式得 $x''=1$. 因为二阶导函数 x'' 在 y=1 的附近是连续函数, 所以由 $x''=1$ 可知在 y=1 的附近有 $x''>0$, 由此可知曲线 $x=x(y)$ 在点(1, 1)附近是凹的, 故曲线 $y=y(x)$ 在点(1, 1)附近是凸的.

特训题 100、 设函数 $f(x)$, $g(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续，在 (a, b) 内具有二阶导数且存在相等的最大值，$f(a)=g(a)$, $f(b)=g(b)$, 证明：存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $f''(\xi)=g''(\xi)$.

【分析】 需要证明的结论与导数有关，自然联想到用微分中值定理，事实上，若令 $F(x)=f(x)-g(x)$，则问题转化为证明 $F''(\xi)=0$，只需对 $F'(x)$ 用罗尔定理，关键是找到 $F'(x)$ 的端点函数值相等的区间(特别是两个一阶导数同时为零的点)，而利用 $F(a)=F(b)=0$, 若能再找一点 $c\in(a,b)$，使得 $F(c)=0$，则在区间 $[a,c],[c,b]$ 上两次利用罗尔定理有一阶导函数相等的两点，再对 $F'(x)$ 用罗尔定理即可。

【证明】 构造辅助函数 $F(x)=f(x)-g(x)$，由题设有 $F(a)=F(b)=0$. 又 $f(x)$, $g(x)$ 在 (a, b) 内具有相等的最大值, 不妨设存在 $x_1\le x_2$，$x_1,x_2\in(a,b)$ 使得

$$f(x_1)=M=\max_{[a,b]}f(x),g(x_2)=M=\max_{[a,b]}g(x),$$

若 $x_1=x_2$，令 $c=x_1$，则 $F(c)=0.$

若 $x_1<x_2$，因 $F(x_1)=f(x_1)-g(x_1)\ge 0,F(x_2)=f(x_2)-g(x_2)\le 0$，从而存在 $c\in[x_1,x_2]\subset(a,b)$，使 $F(c)=0.$

在区间 $[a,c],[c,b]$ 上分别利用罗尔定理知，存在 $\xi_1\in(a,c),\xi_2\in(c,b)$，使得

$$F'(\xi_1)=F'(\xi_2)=0.$$

再对 $F'(x)$ 在区间 $[\xi_1,\xi_2]$ 上应用罗尔定理，知存在 $\xi\in(\xi_1,\xi_2)\subset(a,b)$，有

$$F''(\xi)=0,\quad 即\quad f''(\xi)=g''\ \xi$$