2011 年考研数学试题（数学二）

一、选择题

1. 已知当 $x \to 0$ 时，函数 $f(x) = 3\sin x - \sin 3x$ 与 cx^k 是等价无穷小，则

A k=1, c=4　B k=a, c=-4　C k=3, c=4　D k=3, c=-4

2. 已知 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导，且 $f(0)=0$，则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2 f(x) - 2f(x^3)}{x^3} =$

A $-2f'(0)$　B $-f'(0)$　C $f'(0)$　D 0

3. 函数 $f(x) = \ln\left|(x-1)(x-2)(x-3)\right|$ 的驻点个数为

A 0　B 1　C 2　D 3

4. 微分方程 $y' - \lambda^2 y = e^{\lambda x} + e^{-\lambda x}\ (\lambda > 0)$ 的特解形式为

A $a(e^{\lambda x} + e^{-\lambda x})$　B $ax(e^{\lambda x} + e^{-\lambda x})$

C $x(ae^{\lambda x} + be^{-\lambda x})$　D $x^2(ae^{\lambda x} + be^{-\lambda x})$

5 设函数 $f(x)$ 具有二阶连续导数，且 $f(x) > 0, f'(0) > 0$，则函数 $z = f(x)\ln f(y)$ 在点（0，0）处取得极小值的一个充分条件

A $f(0) > 1, f''(0) > 0$　B $f(0) > 1, f''(0) < 0$

C $f(0) < 1, f''(0) > 0$　D $f(0) < 1, f''(0) < 0$

6. 设 $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\sin x dx, J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\cot x dx, K = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\cos x dx$ 则 I、J、K 的大小关系是

A I<J<K　B I<K<J　C J<I<K　D K<J<I

7. 设 A 为 3 阶矩阵，将 A 的第二列加到第一列得矩阵 B，再交换 B 的第二行与第一行得单位矩阵。记 $P_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, P_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$，则 A=

A P_1P_2　B $P_1^{-1}P_2$　C P_2P_1　D $P_2^{-1}P_1$

8 设 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$ 是 4 阶矩阵，A^* 是 A 的伴随矩阵，若 $(1,0,1,0)^T$ 是方程组 $Ax=0$ 的一个基础解系，则 $A^*x=0$ 的基础解系可为

A α_1, α_3　B α_1, α_2　C $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$　D $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$

二、填空题

9. $\lim\limits_{x\to 0}(\frac{1+2^{x}}{2})^{\frac{1}{x}}=$

10. 微分方程 $y'+y=e^{-x}\cos x$满足条件$y(0)=0$的解$y=$

11. 曲线 $y=\int_{0}^{x}\tan tdt(0\le x\le \frac{\pi}{4})$ 的弧长 s=____________

12. 设函数 $f(x)=\begin{cases}\lambda^{-},x>0\\0,x\le 0\end{cases},\lambda>0$ ，则 $\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx=$

13. 设平面区域 D 由 y=x,圆 $x^2+y^2=2y$ 及 y 轴所组成，则二重积分 $\iint\limits_{D}xyda=$__________

14. 二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^{\ 2}+3x_2^{\ 2}+x_3^{\ 2}+2x_1x_2+2x_1x_3+2x_2x_3$ ，则 f 的正惯性指数为

____

三、解答题

15. 已知函数 $F(x)=\dfrac{\int_{0}^{x}\ln(1+t^2)dt}{x^{\alpha}}$ ，设 $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=\lim\limits_{x\to 0^{+}}F(x)=0$ ，试求 α 的取值范围。

16. 设函数 y=y(x)有参数方程 $\begin{cases}x=\frac{1}{3}t^3+t+\frac{1}{3}\\ y=\frac{1}{3}t^3-t+\frac{1}{3}\end{cases}$ ，求 y=y(x)的数值和曲线 y=y(x)的凹凸区间及拐点。

17. 设 $z=f(xy,yg(x))$ ，其中函数 f 具有二阶连续偏导数，函数 g(x)可导，且在 x=1 处取得极值 g(1)=1,求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\Big|_{x=1,y=1}$

18. 设函数 y(x)具有二阶导数，且曲线 l:y=y(x)与直线 y=x 相切于原点，记 α 是曲线 l 在点（x,y)外切线的倾角 $\frac{d\alpha}{dx}=\frac{dy}{dx}$，求 y(x)的表达式。

19. 证明：1）对任意正整数 n，都有 $\frac{1}{n+1}<\ln(1+\frac{1}{n})<\frac{1}{n}$

2）设 $a_n=1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{\mathrm{n}}-\ln n(n=1,2,\ldots)$,证明 $\{a_n\}$ 收敛。

20. 一容器的内侧是由图中曲线绕 y 旋转一周而成的曲面，该曲面由 $x^2+y^2=2y(y\ge\frac{1}{2}),x^2+y^2=1(y\le\frac{1}{2})$ 连接而成。

（1）求容器的容积。

（2）若从容器内将容器的水从容器顶部全部抽出，至少需要多少功？（长度单位：m；重力加速度为 gm/s^2 ；水的密度为 $10^3kg/m^3$ ）

21.已知函数 f(x,y)具有二阶连续偏导数，且 f(1,y)=0,f(x,1)=0, $\iint\limits_D f(x,y)dxdy=a$，其中 $D=\{(x,y)|0\le x\le 1,0\le y\le 1\}$，计算二重积分 $I=\iint\limits_D xy\int_{xy}''(x,y)dxdy$。

22.

X	0	1
P	1/3	2/3

Y	-1	0	1
P	1/3	1/3	1/3

$P(X^2=Y^2)=1$

求：(1)(X，Y)的分布；(2)Z=XY 的分布；(3) ρ_{XY}

23.A 为三阶实矩阵， $R(A)=2$，且 $A\begin{pmatrix}1&1\\0&0\\-1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&1\\0&0\\1&1\end{pmatrix}$

(1)求 A 的特征值与特征向量；(2)求 A

参考答案

选择题：CBCC ABDD

填空题：

9. $\sqrt{2}$　10. $y=e^{-x}\sin x$　11. $\ln(\sqrt{2}+1)$　12. $\dfrac{1}{\lambda}$　13 $\dfrac{7}{12}$　14. 2

解答题：

15.解：

当$a\le 0$,因为$\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=+\infty$,所以结论不正确

当$a>0$, $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\int_0^x\ln(1+t^2)dt}{x^a}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(1+x^2)}{ax^{a-1}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x}{1+x^2}\dfrac{1}{a(a-1)x^{a-2}}=0$,得$a>0$

$\lim\limits_{x\to0^+}F(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\int_0^x\ln(1+t^2)dt}{x^a}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\ln(1+x^2)}{ax^{a-1}}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{x^2}{ax^{a-1}}=0$得$2>a-1$,所以$a<3$

于是$1<a<3$

16.解：

sss17.解：

$\dfrac{\partial z}{\partial x}=f_1'[xy,yg(x)]y+f_2'[xy,yg(x)]yg'(x)$

$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f_1'[xy,yg(x)]+y[xf_{11}''(xy,yg(x)+g(x)f_{12}''(xy,yg(x)]$

$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f_x'(1,1)+f_{11}''(1,1)+f_{12}''(1,1)$

18.解：

$\dfrac{dy}{dx}=\tan\alpha$,两边对$x$求导得:$\sec^2\alpha\dfrac{d\alpha}{dx}=y''$,即$(1+y'^2)y'=y''$,

于是有$\begin{cases}y''=(1+y'^2)y'\\y(0)=0,y'(0)=1\end{cases}$,令$y'=p$,则$y''=\dfrac{dp}{dx}$,于是有$\dfrac{dp}{dx}=p(1+p^2)$,变量分离得

$\ln\dfrac{p}{\sqrt{1+p^2}}=x+C_1$,带入初始条件得$C_1=\ln\dfrac{1}{\sqrt{2}}$,故$\dfrac{p}{\sqrt{1+p^2}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}e^x$,

平方解得：$p=\dfrac{e^x}{\sqrt{2-e^{2x}}}$, $y=\int\dfrac{e^x}{\sqrt{2-e^{2x}}}dx=-\sqrt{2-e^{2x}}+C_2$

因为$y(o)=0$,所以$C_2=\sqrt{2}$,故$y=\sqrt{2}-\sqrt{2-e^{2x}}$.

19.解：

(1) $f(x)=\ln(1+x)$在$[0,\frac{1}{n}]$应用中值定理, $\ln(1+\frac{1}{n})=\ln(1+\frac{1}{n})-\ln 1=\frac{1}{1+\xi}\frac{1}{n}$

$0<\xi<\frac{1}{n}$, $\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\frac{1}{1+\xi}<1$, 即$\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\frac{1}{n}<\ln(1+\frac{1}{n})<1\frac{1}{n}$

(2) $a_{n+1}=1+1/2+\ldots+\frac{1}{n+1}-\ln(n+1)$

$a_{n+1}-a_n=\frac{1}{n+1}-\ln(n+1)+\ln n=\frac{1}{n+1}-\frac{1}{\xi}, n<\xi<n+1$

其中$a_{n+1}-a_n<0, a_{n+1}<a_n$即$\{a_n\}$单调递减

$a_n=1+1/2+\ldots+\frac{1}{n}>\ln(1+\frac{1}{1})+(1+\frac{1}{2})+\ldots+\ln(1+\frac{1}{n})-\ln n$

$=\ln 2-\ln 3/2+\ldots+\ln\frac{n+1}{n}-\ln n$

$=\ln(n+1)-\ln n=\ln\frac{n+1}{n}>0$

$\{a_n\}$单调递减有界，故收敛。

20. 解：

(1) $V=\pi\int_{\frac{1}{2}}^{2}(2y-y^2)dy+\int_{-1}^{\frac{1}{2}}(1-y^2)dy=\frac{9\pi}{4}$

(2) $W=\int_{\frac{1}{2}}^{2}(2y-y^2)\rho g\pi x_1{}^2dy+\int_{-1}^{\frac{1}{2}}(1-y^2)\rho g\pi x_2{}^2dy$

$=\int_{\frac{1}{2}}^{2}(2-y)\rho g\pi(2y-y^2)dy+\int_{-1}^{\frac{1}{2}}(2-y)\rho g\pi(1-y^2)dy$

$=\rho g\pi\cdot 24\ \frac{17}{24}$.

21. 解：

$I=\iint_D xyf''_{xy}(x,y)dxdy=\int_0^1 xdx\int_0^1 yf''_{xy}(x,y)dy$

$\int_0^1 yf''_{xy}(x,y)dy=\int_0^1 ydf'_x(x,y)=yf'_{xy}(x,y)\Big|_0^1-\int_0^1 f'_x(x,y)dy$,

于是，$I=\int_0^1 xdx\int_0^1 yf''_{xy}(x,y)dy=\int_0^1 xf'_x(x,1)dx-\int_0^1 xdx\int_0^1 yf'_x(x,y)dy$

$=xf(x,1)\Big|_0^1-\int_0^1 xdx\int_0^1 yf'_x(x,y)dy=-\int_0^1 dy\int_0^1 xf'_x(x,y)dx$

$=-[\int_0^1 xf_x(x,y)\Big|_0^1 dy-\int_0^1 dy\int_0^1 f_x(x,y)dx]=\int_0^1 dy\int_0^1 f(x,y)dx=\iint_D f(x,y)dxdy=a$

22. 解：

$$1)\because\left|\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\right|=\begin{vmatrix}101\\013\\115\end{vmatrix}=1\neq0 \qquad \therefore r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=3$$

又$\because\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$不能由$\beta_1$，$\beta_2$，$\beta_3$线性表示，$\therefore r(\beta_1，\beta_2，\beta_3)<3$，于是$\left|\beta_1，\beta_2，\beta_3\right|=0$，解得$a=5$

$$2)(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1，\beta_2，\beta_3)=\begin{pmatrix}1&0&11&1&1\\0&0&31&2&3\\1&1&51&3&5\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&11&1&1\\0&1&31&2&3\\0&1&40&2&4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&11&1&1\\0&1&31&2&3\\6&0&1-1&0&1\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}100\ 2\ 10\\010\ 4\ 20\\001-101\end{pmatrix}\text{于是}\begin{cases}\beta_1=2\alpha_1+4\alpha_2-\alpha_3\\\beta_2=\alpha_1+2\alpha_2+0\alpha_3\\\beta_1=0\alpha_1+0\alpha_2+\alpha_3\end{cases}$$

23.解：

令$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$，$\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$则$A\alpha_1=-\alpha_1,A\alpha_2=\alpha_2$，

根据特征值向量的定义，A的特征值为$\lambda_1=-1,\lambda_2=1$，对应的线性无关的特征向量为

$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$，$\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\because r(A)=2<3,\therefore\left|A\right|=0$故$\lambda_3=0$

令$\alpha_3=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$为矩阵$A$的相应于$\lambda_3=0$的特征向量$\because A$为实矩阵，所以有$\begin{cases}\alpha_1{}^T\alpha_3=0\\\alpha_2{}^T\alpha_3=0\end{cases}$

即$\begin{cases}x_1-x_3=0\\x_1+x_3=0\end{cases}$解得$\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$

2）$\alpha_1\alpha_2\alpha_3$单位化得：$r_1=\frac{1}{\sqrt2}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix},r_2=\frac{1}{\sqrt2}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},r_3=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$，令$Q=(r_1,r_2,r_3)=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt2}&\frac{1}{\sqrt2}&0\\0&0&1\\-\frac{1}{\sqrt2}&\frac{1}{\sqrt2}&0\end{pmatrix}$，

则$Q^TAQ=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$，于是$A=Q\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}Q^T=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}$