

2011 年全国硕士研究生入学统一考试

农学门类联考

数学

一、选择题:1~8 小题,每小题 4 分,共 32 分,下列每题给出的四个选项中,只有一个选项符合题目要求,请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上。

(1) 当 $x \rightarrow 0$ 时,下列函数为无穷大量的是()

- (A) $\frac{\sin 3x}{x}$ (B) $\cot x$ (C) $\frac{1 - \cot x}{x}$ (D) $e^{\frac{1}{x}}$

(2) 设函数 $f(x)$ 可导, $f(0) = 0, f'(0) = 1, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(\sin^3 x)}{\lambda x^k} = \frac{1}{2}$, 则()

- (A) $k = 2, \lambda = 2$ (B) $k = 3, \lambda = 3$ (C) $k = 3, \lambda = 2$ (D) $k = 4, \lambda = 1$

(3) 设 $I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{x} dx, I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{\sin x} dx$, 则()

- (A) $I_1 < \frac{\pi}{4} < I_2$ (B) $I_1 < I_2 < \frac{\pi}{4}$

- (C) $\frac{\pi}{4} < I_1 < I_2$ (D) $I_2 < \frac{\pi}{4} < I_1$

(4) 设函数 $Z = \arctan e^{(-xy)}$, 则 $dz =$ ()

- (A) $-\frac{e^{xy}}{1 + e^{zxy}}(ydx + xdy)$ (B) $\frac{e^{xy}}{1 + e^{zxy}}(ydx - xdy)$

- (C) $-\frac{e^{xy}}{1 + e^{zxy}}(xdy + ydx)$ (B) $\frac{e^{xy}}{1 + e^{zxy}}(ydx + xdy)$

(5) 将二阶矩阵 A 的第 2 列加到第 1 列得矩阵 B , 再交换 B 的第 1 行与第 2 行得单位矩阵, 则 $A =$ ()

- (A) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ (B) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ (C) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ (D) $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

(6) 设 A 为 4×3 矩阵, η_1, η_2, η_3 是非齐次线性方程组 $Ax = \beta$ 的 3 个线性无关的解, k_1, k_2 为任意常数, 则 $Ax = \beta$ 的通解为

- (A) $\frac{\eta_2 + \eta_3}{2} + k_1(\eta_2 - \eta_1)$

- (B) $\frac{\eta_2 - \eta_3}{2} + k_1(\eta_2 - \eta_1)$

- (C) $\frac{\eta_2 + \eta_3}{2} + k_1(\eta_3 - \eta_1) + k_2(\eta_2 - \eta_1)$

- (D) $\frac{\eta_2 - \eta_3}{2} + k_2(\eta_2 - \eta_1) + k_2(\eta_3 - \eta_1)$

(7) 设随机事件, A, B 满足 $A \subset B$ 且 $0 < P(A) < 1$, 则必有()

- (A) $P(A) \geq P(A | A \cup B)$ (B) $P(A) \leq P(A | A \cup B)$

- (C) $P(B) \geq P(B | A)$ (D) $P(A) \leq P(B | \bar{A})$

8. 设总体 X 服从参数为 $\lambda (\lambda > 0)$ 的泊松分布上, $X_1, X_2, \dots, X_n (n \geq 2)$ 为来自总体的简单随机样本, 则对应的统计量 $T_1 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i, T_2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n-1} X_i + \frac{1}{n} X_n$, 有()

(A) $ET_1 > ET_2, DT_1 > DT_2$

(B) $ET_1 > ET_2, DT_1 < DT_2$

(C) $ET_1 < ET_2, DT_1 > DT_2$

(D) $ET_1 < ET_2, DT_1 < DT_2$

二、填空题:9~14 小题,每小题 4 分,共 24 分,请将答案写在答题纸指定位置上。

(9) 设函数 $f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} (1+3t)^{\frac{1}{x}}$, 则 $f'(x) =$ _____.

(10) 曲线 $y = x^3 - 3x^2 + 3x + 1$ 在其拐点处的切线方程式是 _____.

(11) 反常积分 $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x(x^2+1)}$ = _____.

(12) 设函数 $z = (2x+y)^{3xy}$, 则 $\left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_{(1,3)} =$ _____.

(13) 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, 且 3 阶矩阵 B 满足 $ABC = D$,

则 $|B^{-1}| =$ _____.

(14) 设二维随机变量 (X, Y) 服从正态分布 $N(\mu, \mu; \sigma^2, \sigma^2; 0)$, 则 $E(XY^2) =$ _____.

三、解答题:15-23 小题,共 94,请将解答写在答题纸指定的位置上解答应写出文字说明,证明过程或演算步骤.

(15) (本题满分 10 分)

设函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{e^x - \cos x}{x}, & x \neq 0, \\ a, & x = 0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续,求

(I) a 的值;

(II) $f'(x)$.

(16) (本题满分 10 分)

求不定积分 $\int \frac{\arcsin \sqrt{x+1}}{\sqrt{x}} dx$

(17) (本题满分 11 分)

设函数 $y = y(x)$ 是微分方程 $xy' + (x-2y)dx = 0$ 满足条件 $y(1) = 2$ 的解,求曲线 $y = y(x)$ 与 x 轴所围图形的面积 S.

(18) (本题满分 10 分)

证明:当 $0 < x < \frac{\pi}{2}$ 时, $\frac{\pi}{2} < x \sin x + 2 \cos x < 2$.

(19) (本题满分 10 分)

计算二重积分 $\iint_D y dx dy$, 其中 $D = \{(x, y) \mid x^2 + (y-1)^2 \leq 1, x \geq 0\}$ (20) (本题满分 10 分)

已知 $\alpha_1 = (1, 2, 1)^T, \alpha_2 = (1, 1, 2)^T, \alpha_3 = (1, -1, 4)^T, \beta = (1, 0, a)$, 问 a 为何值时,

(I) β 不能由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示;

(II) β 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示,并写出一般表达式.

(21) (本题满分 11 分)

已知 1 是矩阵 $A = \begin{pmatrix} 0 & a & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 的二重特征值.

- (I) 求 a 的值;
 - (II) 求可逆矩阵 P 和对角矩阵 Q 使 $P^{-1}AP=Q$
- (22)(本题满分 10 分)

设随机变量 X 与 Y 的概率分布分别为

X	0	1
P	1/3	2/3

Y	-1	0	1
P	1/3	1/3	1/3

且 $P(X^2=Y^2)=1$

- (I) 求二维随机变量(X,Y)的概率分布;
- (II) 求 $Z=XY$ 的概率分布;
- (III) 求 X 与 Y 的相关系数 ρ_{XY} .

(23)(本题满分 11 分)

设二维随机变量(X,Y)服从区域 G 上的均匀分布,其中 G 是由 $x-y=0, x+y=2$ 与 $y=0$ 所围成的三角形区域.

- (I) 求 X 的边缘密度 $f_X(x)$;
- (II) 求 $P\{X-Y \leq 1\}$.

2011 年农学联考真题答案

一、选择题

(1) 没有看到准确的题目，从现有的题目看 B 与 C 均为无穷大量。

(2) 选 (C)

解：因为

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(\sin^3 x)}{\lambda x^k} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(\sin^3 x) - f(0)}{\sin^3 x} \cdot \frac{\sin^3 x}{\lambda x^k} = f'(0) \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{\lambda x^k} = \frac{1}{\lambda} \lim_{x \rightarrow 0} x^{3-k} = \frac{1}{2}$$

所以 $\lambda = 2$, $k = 3$, 选 (C)。

(3) 选 (A)

解：当 $0 < x < \frac{\pi}{4}$ 时， $\sin x < x$ ，故 $\frac{\sin x}{x} < 1 < \frac{x}{\sin x}$ ，所以有

$$I_1 = \int_0^{\pi/4} \frac{\sin x}{x} dx < \int_0^{\pi/4} dx < \int_0^{\pi/4} \frac{x}{\sin x} dx = I_2$$

即 $I_1 < \frac{\pi}{4} < I_2$ ，选 (A)。

(4) 选 (A)

解： $dz = \frac{-e^{-xy}}{1+e^{-2xy}}(xdy + ydx) = \frac{-e^{xy}}{1+e^{2xy}}(xdy + ydx)$ ，选 (A)。

(5) 选 (D)

解： $A \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = B$ ， $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} B = E$ ，所以 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ，选 (D)。

(6) 选 (C)

解：因为 η_1, η_2, η_3 是 $Ax = \beta$ 的线性无关解，所以 $\eta_3 - \eta_1, \eta_2 - \eta_1$ 是 $Ax = 0$ 的两个线性无关解，而 $\frac{\eta_2 + \eta_3}{2}$ 是 $Ax = \beta$ 的解，故 $\frac{\eta_2 + \eta_3}{2} + k_1(\eta_3 - \eta_1) + k_2(\eta_2 - \eta_1)$ 是 $Ax = \beta$ 的通解，选 (C)。

(7) 选 (B)

解：因为 $0 < P(A) < 1$, $A \subset B$ ，故 $0 < P(A) \leq P(B) \leq 1$ 。又 $A \cup B = B, AB = A$ ，所

以 $P(A|A \cup B) = P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{P(A)}{P(B)} \geq P(A)$ ，选 (B)。

(8) 选 (D)

解：因为 X_1, X_2, \dots, X_n 是来自参数为 λ 的泊松分布的简单随机样本，则有

$E(X_1) = E(X_2) = \dots = E(X_n) = \lambda$ ， $D(X_1) = D(X_2) = \dots = D(X_n) = \lambda$ ，那么

$$E(T_1) = E\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i\right) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E(X_i) = \frac{1}{n} \cdot n\lambda = \lambda$$

$$E(T_2) = E\left(\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} X_i + \frac{1}{n} X_n\right) = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} E(X_i) + \frac{1}{n} EX_n = \frac{1}{n-1} \cdot (n-1)\lambda + \frac{\lambda}{n} = \lambda + \frac{\lambda}{n}$$

所以 $E(T_1) < E(T_2)$ 。

$$D(T_1) = D\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i\right) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n D(X_i) = \frac{1}{n^2} \cdot n\lambda = \frac{\lambda}{n}$$

$$D(T_2) = D\left(\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} X_i + \frac{1}{n} X_n\right) = \frac{1}{(n-1)^2} \sum_{i=1}^{n-1} D(X_i) + \frac{1}{n^2} DX_n = \frac{\lambda}{n-1} + \frac{\lambda}{n^2}$$

所以 $D(T_1) < D(T_2)$ 。

选 (D)。

二、填空题

(9) $(3x+1)e^{3x}$

解: $f(x) = \lim_{t \rightarrow 0} x(1+3t)^{\frac{x}{t}} = x \lim_{t \rightarrow 0} (1+3t)^{\frac{1}{3t} \cdot 3x} = xe^{3x}$

$$f'(x) = e^{3x} + 3xe^{3x} = (1+3x)e^{3x}。$$

(10) $y=2$

解: $y' = 3x^2 - 6x + 3$, $y'' = 6x - 6$, $y''' = 6$, 所以点 (1,2) 为曲线的拐点, 而 $y'(1) = 0$, 所以 $y=2$ 为拐点处的切线方程。

(11) $\frac{1}{2} \ln 2$

解: $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x(x^2+1)} = \int_1^{+\infty} \left(\frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+1}\right) dx = \left[\ln \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right]_1^{+\infty} = \frac{1}{2} \ln 2$

(12) $(2x+y)^{3xy} \left[3y \ln(2x+y) + \frac{6xy}{2x+y}\right]$

解: $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial (2x+y)^{3xy}}{\partial x} = \frac{\partial e^{3xy \ln(2x+y)}}{\partial x} = (2x+y)^{3xy} \left[3y \ln(2x+y) + \frac{6xy}{2x+y}\right]$

$$(13) \quad -\frac{1}{6}$$

解：因为 $|A|=-1, |B|=1, |C|=6, |ABC|=|D|$ ，故 $|B|=\frac{|D|}{|AC|}$ ，所以

$$|B^{-1}|=|B|^{-1}=\frac{|AC|}{|D|}=-\frac{1}{6}。$$

$$(14) \quad \underline{\mu(\sigma^2 + \mu^2)}$$

解：因为 $\rho=0$ ，故 X 与 Y 相互独立，即有 $E(XY^2)=EXE(Y^2)=\mu E(Y^2)$ ，而 $Y \sim N(\mu, \sigma^2)$ ，所以 $DY=E(Y^2)-(EY)^2$ ，即 $E(Y^2)=DY+(EY)^2=\sigma^2+\mu^2$ ，故 $E(XY^2)=\mu(\sigma^2+\mu^2)$ 。

三、解答题

(15) 解：

(I) 因为 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \cos x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} (e^x + \sin x) = 1$ ，而 $f(0) = a$ ，故 $a = 1$ 时

$f(x)$ 在 $x=0$ 处连续。

$$(II) \text{ 当 } x \neq 0 \text{ 时, } f'(x) = \frac{(e^x + \sin x)x - (e^x - \cos x)}{x^2} = \frac{e^x(x-1) + x \sin x + \cos x}{x^2}$$

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{e^x - \cos x}{x} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \cos x - x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + \sin x - 1}{2x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{2x} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{2x} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

$$\text{故 } f'(x) = \begin{cases} \frac{e^x(x-1) + x \sin x + \cos x}{x^2} & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$$

$$(16) \text{ 解: } \int \frac{\arcsin \sqrt{x} + 1}{\sqrt{x}} dx = \int \frac{\arcsin \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx + \int \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2\sqrt{x} + 2 \int \arcsin \sqrt{x} d\sqrt{x}$$

对 $\int \arcsin \sqrt{x} d\sqrt{x}$ ，令 $\sqrt{x} = t$ ，则

$$\begin{aligned}\int \arcsin \sqrt{x} d\sqrt{x} &= \int \arcsin t dt = t \arcsin t - \int \frac{t}{\sqrt{1-t^2}} dt = t \arcsin t + \sqrt{1-t^2} + C_0 \\ &= \sqrt{x} \arcsin \sqrt{x} + \sqrt{1-x} + C_0\end{aligned}$$

所以原式 = $2\sqrt{x} + 2\sqrt{x} \arcsin \sqrt{x} + 2\sqrt{1-x} + C$ 。

(17) 解: $xdy + (x-2y)dx = 0$, 即 $\frac{dy}{dx} - \frac{2}{x} \cdot y = -1$, 故

$$\begin{aligned}y &= e^{-\int(\frac{-2}{x})dx} [\int(-1)e^{\int(\frac{-2}{x})dx} dx + C] = x^2[\int(-\frac{1}{x^2})dx + C] \\ &= x^2(\frac{1}{x} + C) = x + Cx^2\end{aligned}$$

代入初始条件 $y(1) = 2$, 得 $C=1$, 故 $y = x^2 + x$ 。

曲线 $y = x^2 + x$ 与 x 轴交点为 $(-1, 0)$, $(0, 0)$, 所以

$$S = |\int_{-1}^0 (x^2 + x) dx| = |(\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2)|_{-1}^0| = |-\frac{1}{6}| = \frac{1}{6}$$

(18) 证明: 令 $f(x) = x \sin x + 2 \cos x, 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$

则 $f'(x) = \sin x + x \cos x - 2 \sin x = x \cos x - \sin x$

$f''(x) = -x \sin x + \cos x - \cos x = -x \sin x < 0, 0 < x < \frac{\pi}{2}$

即 $f'(x)$ 在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 内单调递减, 又 $f'(x)$ 在 $x=0$ 处连续, 故 $f'(x) < f'(0) = 0$, 即 $f(x)$

在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 内单调递减, 又 $f(x)$ 在 $x=0$ 及 $x=\frac{\pi}{2}$ 处连续, 故 $f(\frac{\pi}{2}) < f(x) < f(0)$, 即

$$\frac{\pi}{2} < x \sin x + 2 \cos x < 2$$

(19) 解: 利用极坐标变换, 令 $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$, 则

$$\iint_D y dx dy = \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^{2 \sin \theta} (r \sin \theta) r dr = \int_0^{\pi/2} \frac{8}{3} \sin^4 \theta d\theta = \frac{\pi}{2}$$

(20) 解: β 能否由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示, 也就是 $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \beta$ 是否有解, 而

$$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 | \beta) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & a \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & a-1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & a-3 \end{pmatrix}$$

(I) 当 $a \neq 3$ 时, $r(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \neq r(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta)$, 方程组 $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \beta$ 无解,

故此时 β 不能由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示。

(II) 当 $a = 3$ 时, $r(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = r(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta) = 2$, 线性方程组 $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \beta$

有解, β 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示, 且因 $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 | \beta) \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,

则 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$, 于是 $\beta = (2k-1)\alpha_1 + (-3k+2)\alpha_2 + k\alpha_3$ 。

(21) 解:

(I) 1 是 A 的二重特征值, 设 λ 是 A 的另一个特征值, 则 $\text{tr}A = 1+1+\lambda = 0+1+0 = 1$,

所以 $\lambda = -1$, 即 $|-E-A| = 0$, 即 $\begin{vmatrix} -1 & -a & -1 \\ -1 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 2a = 0$, 所以 $a = 0$ 。

(II) $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, 对于特征值 $\lambda = 1$, 有 $E - A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,

故对应于 $\lambda = 1$ 的两个线性无关的特征向量为 $\xi_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \xi_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$;

对于 $\lambda = -1$, 有 $-E - A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ -1 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, 故对应于

$\lambda = -1$ 的特征向量 $\xi_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ 。

$$\text{取 } P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \text{ 则有 } P^{-1}AP = Q.$$

(22) 解:

(I) 因为 $P(X^2 = Y^2) = 1$, 所以 $P(X^2 \neq Y^2) = 1 - 1 = 0$, 则

$$P(X = 1, X^2 \neq Y^2) = P(X = 1, Y = 0) = P(X = 1 | X^2 \neq Y^2)P(X^2 \neq Y^2) = 0$$

又 $P(X = 0, X^2 \neq Y^2) = P(X = 0, Y = 1) + P(X = 0, Y = -1) = 0$, 则

$$P(X = 0, Y = 1) = P(X = 0, Y = -1) = 0$$

$$\text{而 } P(X = 0, Y = 0) = P(X = 0) - P(X = 0, Y = 1) - P(X = 0, Y = -1) = \frac{1}{3}$$

$$P(X = 1, Y = -1) = P(Y = -1) - P(X = 0, Y = -1) = \frac{1}{3}$$

$$P(X = 1, Y = 1) = P(Y = 1) - P(X = 0, Y = 1) = \frac{1}{3}$$

故 (X, Y) 的概率分布为

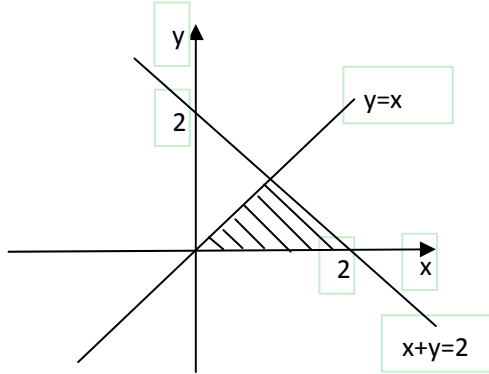
X \ Y	-1	0	1	
0	0	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$
1	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$
	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	

$$(II) EX = 0 \cdot \frac{1}{3} + 1 \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{3}, \quad EY = (-1) \cdot \frac{1}{3} + 0 \cdot \frac{1}{3} + 1 \cdot \frac{1}{3} = 0$$

$$\text{而 } \rho_{XY} = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sqrt{DX} \sqrt{DY}} = \frac{EXY - EXEY}{\sqrt{DX} \sqrt{DY}}$$

$$EXY = (-1) \cdot 1 \cdot \frac{1}{3} + 1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{3} = 0, \text{ 故 } \rho_{XY} = 0.$$

(23) 解:



可知 $S_G = 1$, 故 $f(x, y) = \begin{cases} 1, & (x, y) \in G \\ 0, & (x, y) \notin G \end{cases}$

$$(I) f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy = \begin{cases} \int_0^x f(x, y) dy = x, & 0 < x < 1 \\ \int_0^{2-x} f(x, y) dy = 2 - x, & 1 < x < 2 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

$$(II) P(X - Y \leq 1) = \iint_{x-y \leq 1} f(x, y) dx dy = \int_0^1 dx \int_0^x dy + \int_1^{3/2} dx \int_{x-1}^{2-x} dy = \frac{3}{4}.$$

