# 2011 考研数学一真题试卷

## 一选择题

1.曲线 $y=(x-1)(x-2)^2(x-3)^2(x-4)^2$ 拐点

A（1，0）　B（2，0）　C（3，0）　D（4，0）

2 设数列$\{a_n\}$单调递减，$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0, S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}a_k\,(n=1,2,\ldots)$无界，则幂级数 $\sum\limits_{k=1}^{n}a_k(x-1)^n$ 的收敛域

A(-1,1]　B[-1,1)　C[0,2)　D(0,2]

3.设函数 $f(x)$ 具有二阶连续导数，且 $f(x)>0, f'(0)>0$，则函数 $z=f(x)\ln f(y)$ 在点（0，0）处取得极小值的一个充分条件

A $f(0)>1, f''(0)>0$　B $f(0)>1, f''(0)<0$

C $f(0)<1, f''(0)>0$　D $f(0)<1, f''(0)<0$

4.设 $I=\int_0^{\frac{p}{4}}\ln\sin xdx, J=\int_0^{\frac{p}{4}}\ln\cot xdx, K=\int_0^{\frac{p}{4}}\ln\cos xdx$ 则$I$、$J$、$K$的大小关系是

A I<J<K　B I<K<J　C J<I<K　D K<J<I

5.设 A 为 3 阶矩阵，将 A 的第二列加到第一列得矩阵 B，再交换 B 的第二行与第一行得单位矩阵。记 $P_1=\begin{bmatrix}1&0&0\\1&1&1\\0&0&0\end{bmatrix}, P_2=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}$，则 A=

A $P_1P_2$　B $P_1^{-1}P_2$　C $P_2P_1$　D $P_2^{-1}P_1$

6.设 $A=(a_1,a_2,a_3,a_4)$ 是 4 阶矩阵，$A^*$ 是 A 的伴随矩阵，若 $(1,0,1,0)^T$ 是方程组 $Ax=0$ 的一个基础解系，则 $A^*x=0$ 的基础解系可为

A $a_1,a_3$　B $a_1,a_2$　C $a_1,a_2,a_3$　D $a_2,a_3,a_4$

7.设 $F_1(x),F_2(x)$ 为两个分布函数，其相应的概率密度 $f_1(x),f_2(x)$ 是连续

函数，则必为概率密度的是

A $f_1(x)f_2(x)$ B $2f_2(x)F_2(x)$ C $f_1(x)F_2(x)$ D $f_1(x)F_2(x)+f_2(x)F_1(x)$

8.设随机变量 X 与 Y 相互独立，且 EX 与 EY 存在，记 U=max{x,y},V={x,y},则 E(UV)=

A EUEV B EXEY C EUEY D EXEV

二填空题

9.曲线 $y=\int_0^x \tan t dt(0\le x\le \frac{p}{4})$ 的弧长 s=____________

10.微分方程 $y'+y=e^{-x}\cos x$ 满足条件 y(0)=0 的解为 y=____________

11.设函数 $F(x,y)=\int_0^{xy}\frac{\sin t}{1+t^2}dt$，则 $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\Big|_{x=0}=$ __________

12.设 L 是柱面方程为 $x^2+y^2=1$ 与平面 z=x+y 的交线，从 z 轴正向往 z 轴负向看去为逆时针方向，则曲线积分 $\oint xzdx+xdy+\frac{y^2}{2}dz=$ __________

13.若二次曲面的方程为 $x^2+3y^2+z^2+2axy+2xz+2yz=4$，经正交变换化为 $y_1^2+4z_1^2=4$，则 $a=$_______________

三解答题

15 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}(\frac{\ln(1+x)}{x})^{\frac{1}{e^x-1}}$

16 设 $z=f(xy,yg(x))$，其中函数 f 具有二阶连续偏导数，函数 g(x)可导，且在 x=1 处取得极值 g(1)=1,求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\Big|_{x=1,y=1}$

17 求方程 $k\arctan x-x=0$ 不同实根的个数，其中 k 为参数。

18 证明：1）对任意正整数 n，都有 $\frac{1}{n+1}<\ln(1+\frac{1}{n})<\frac{1}{n}$

2）设 $a_n=1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{\mathrm{n}}-\ln n(n=1,2,\ldots)$，证明 $\{a_n\}$ 收敛。

19 已知函数 f(x,y) 具有二阶连续偏导数，且 f(1,y)=0, f(x,1)=0, $\iint\limits_D f(x,y)dxdy = a$，其中 $D=\{(x,y)|0\le x\le 1, 0\le y\le 1\}$，计算二重积分 $I=\iint\limits_D xy\int_{xy}''(x,y)dxdy$。

20. $a_1=(1,0,1)^T$，$a_2=(0,1,1)^T$，$a_3=(1,3,5)^T$不能由$b_1=(1,a,1)^T$，$b_2=(1,2,3)^T$，$b_3=(1,3,5)^T$线性表出，• 求$a$；，将$b_1$，$b_2$，$b_3$由$a_1$，$a_2$，$a_3$线性表出。

21. A 为三阶实矩阵，$R(A)=2$，且 $A\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\\ -1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 0 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}$

（1）求 A 的特征值与特征向量；（2）求 A。

22.

| X | 0 | 1 |
|---|---|---|
| P | 1/3 | 2/3 |

| Y | -1 | 0 | 1 |
|---|---|---|---|
| P | 1/3 | 1/3 | 1/3 |

$P(X^2=Y^2)=1$

求：（1）（X，Y）的分布；（2）Z=XY 的分布；（3）$r_{XY}$

23. 设$x_1, x_2, \ldots x_n$为来自正态总体$N(m_0, s^2)$的简单随机样本，其中$m_0$已知，$s^2>0$未知，$\bar{x}$和$S^2$分别表示样本均值和样本方差。

1）求参数$s^2$的最大似然估计$\hat{s}^2$

2）计算 E($\hat{s}^2$)和 D($\hat{s}^2$)

**答案：**

CCABDDDB

**填空题：**

9. $\ln(1+\sqrt{2})$　　10 $y=e^{-x}\sin x$　　11 4　　12 $p$　　13 $a=1$　　14 $m(m^2+s^2)$

**15 解：原式=** $\lim\limits_{x\to 0}[1+(\frac{\ln(1+x)-x}{x})^{\frac{x}{\ln(1+x)-x}}]^{\frac{1}{e^{x-1}}\frac{\ln(1+x)-x}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-x}{x(e^x-1)}}=e^{\frac{\frac{1}{1+x}-1}{x^2}}=e^{\frac{1}{2}}$

16 **由** g(x) **可导且在** x=1 **处取极值** g(1)=1 **所以** $g'(1)=0$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=f_1'[xy,yg(x)]y+f_2'[xy,yg(x)]yg'(x)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f_1'[xy,yg(x)]+y[xf_{11}''(xy,yg(x)+g(x)f_{12}''(xy,yg(x)]$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f_x'(1,1)+f_{11}''(1,1)+f_{12}''(1,1)$$

**17 解：**

令 $f(x)=k\arctan\ x-x$

$f'(x)=\dfrac{k-1-x^2}{1+x^2}$

(1)当 $k-1\le 0$,即 $k\le 1$时， $f'(x)\le 0$(除去可能一点外　$f'(x)<0)$,所以 $f(x)$单调减少，

又因为 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=+\infty,\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$,所以方程只有一个根。

（2）当 $k-1>0$,即 $k>1$时，由 $f'(x)=0$得 $x=\pm\sqrt{k-1}$,

当 $x\in(-\infty,-\sqrt{k-1})$时， $f'(x)<0$,当 $x\in(-\sqrt{k-1},\sqrt{k-1})$时， $f'(x)>0$;

当 $x\in(\sqrt{k-1},+\infty)$时， $f'(x)<0$,

所以 $x=-\sqrt{k-1}$为极小点，　$x=\sqrt{k-1}$为极大点

极小值为 $-k\arctan\ \sqrt{k-1}+\sqrt{k-1}$,极大值为 $k\arctan\ \sqrt{k-1}-\sqrt{k-1}$,

令 $\sqrt{k-1}=t$,当 $k>1$时， $t>0$,令 $g(t)=k\arctan\ \sqrt{k-1}-\sqrt{k-1}=(1+t^2)\arctan\ t-t$,

显然 $g(0)=0$,因为 $g'(t)=2t\arctan\ t>0$,所以 $g(t)>g(0)=0$(当 $t>0$),

即 $k\arctan\ \sqrt{k-1}-\sqrt{k-1}>0$,极小值 $-k\arctan\ \sqrt{k-1}+\sqrt{k-1}<0$,

极大值 $k\arctan\ \sqrt{k-1}-\sqrt{k-1}>0$,

又因为 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=+\infty,\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$,所以方程有三个根，分　别位于

$(-\infty,\sqrt{k-1})$,$(-\sqrt{k-1},\sqrt{k-1})$及（$\sqrt{k-1},+\infty$）内。

## 18 证明：

(1) $f(x)=\ln(1+x)$在$[0,\frac{1}{n}]$应用中值定理，$\ln(1+\frac{1}{n})=\ln(1+\frac{1}{n})-\ln 1=\frac{1}{1+x}\frac{1}{n}$

$0<x<\frac{1}{n},\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\frac{1}{1+x}<1$，即$\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\frac{1}{n}<\ln(1+\frac{1}{n})<1\frac{1}{n}$

(2)$a_{n+1}=1+1/2+\ldots+\frac{1}{n+1}-\ln(n+1)$

$a_{n+1}-a_n=\frac{1}{n+1}-\ln(n+1)+\ln n=\frac{1}{n+1}-\frac{1}{x},n<x<n+1$

其中$a_{n+1}-a_n<0,a_{n+1}<a_n$即$\{a_n\}$单调递减

$a_n=1+1/2+\ldots+\frac{1}{n}>\ln(1+\frac{1}{1})+(1+\frac{1}{2})+\ldots+\ln(1+\frac{1}{n})-\ln n$

$=\ln 2-\ln 3/2+\ldots+\ln\frac{n+1}{n}-\ln n$

$=\ln(n+1)-\ln n=\ln\frac{n+1}{n}>0$

$\{a_n\}$单调递减有界，故收敛。

## 19.解：

$$I=\iint\limits_D xyf''_{xy}(x,y)dxdy=\int_0^1 xdx\int_0^1 yf''_{xy}(x,y)dy$$

$$\int_0^1 yf''_{xy}(x,y)dy=\int_0^1 ydf'_x(x,y)=yf'_{xy}(x,y)\Big|_0^1-\int_0^1 f'_x(x,y)dy,$$

于是，$I=\int_0^1 xdx\int_0^1 yf''_{xy}(x,y)dy=\int_0^1 xf'_x(x,1)dx-\int_0^1 xdx\int_0^1 yf'_x(x,y)dy$

$$=xf(x,1)\Big|_0^1-\int_0^1 xdx\int_0^1 yf'_x(x,y)dy=-\int_0^1 dy\int_0^1 xf'_x(x,y)dx$$

$$=-[\int_0^1 xf_x(x,y)\Big|_0^1 dy-\int_0^1 dy\int_0^1 f_x(x,y)dx]=\int_0^1 dy\int_0^1 f\ (x,y)dx=\iint\limits_D f(x,y)dxdy=a$$

## 20 解：

1) $\mathbf{Q}$ $|a_1,a_2,a_3|=\begin{vmatrix}1&0&1\\0&1&3\\1&1&5\end{vmatrix}=1\neq 0$ $\quad\therefore r(a_1,a_2,a_3)=3$

又 $\mathbf{Q}$ $a_1,a_2,a_3$不能由 $b_1$，$b_2$，$b_3$线性表示， $\therefore r(b_1,b_2,b_3)<3$，于是 $|b_1,b_2,b_3|=0$，解得 $a=5$

2)$(a_1,a_2,a_3,b_1,b_2,b_3)=\begin{pmatrix}1&0&1&1&1&1\\0&0&3&1&2&3\\1&1&5&1&3&5\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&1&1&1&1\\0&1&3&1&2&3\\0&1&4&0&2&4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&1&1&1&1\\0&1&3&1&2&3\\6&0&1&-1&0&1\end{pmatrix}$

$\to\begin{pmatrix}1&0&0&2&1&0\\0&1&0&4&2&0\\0&0&1&-1&0&1\end{pmatrix}$于是 $\begin{cases}b_1=2a_1+4a_2-a_3\\b_2=a_1+2a_2+0a_3\\b_1=0a_1+0a_2+a_3\end{cases}$

## 21.解：

1)

令$a_1=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$，$a_2=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$则$\mathrm{A}a_1=-a_1, Aa_2=a_2$,

根据特征值向量的定义，$A$的特征值为$l_1=-1, l_2=1$,对应的线性无关的特征向量为

$a_1=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$，$a_2=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$$\mathbf{Q}\, r(A)=2<3, \therefore |A|=0$故$l_3=0$

令$a_3=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$为矩阵$A$的相应于$l_3=0$的特征向量$\mathbf{Q}\,A$为实矩阵，所以有$\begin{cases}a_1^{\mathrm{T}}a_3=0\\a_2^{\mathrm{T}}a_3=0\end{cases}$

即$\begin{cases}x_1-x_3=0\\x_1+x_3=0\end{cases}$解得$\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$

2）$a_1a_2a_3$单位化得：$r_1=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}, r_2=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, r_3=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$,令$\mathrm{Q}=(r_1,r_2,r_3)=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{2}}&0\\0&0&1\\-\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{2}}&0\end{pmatrix}$,

则$Q^TAQ=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$,于是$A=Q\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}Q^T=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}$

## 22.解：

1)$P(X^2=Y^2)=1\Rightarrow P(X^2\neq Y^2)=0$,即$P(X=0,Y=1)=P(X=0,Y=-1)=P(X=1,Y=0)=0$

$P(Y=1)=P(X=0,Y=1)+P(X=1,\ Y=1)=\frac{1}{3}$

$\therefore P(X=1,Y=1)=\frac{1}{3}$,同理如图：

| Y | -1 | 0 | 1 | |
|---|---|---|---|---|
| X | 0 | 1/3 | 0 | 1/3 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 1/3 | 0 | 1/3 | 1/3 |
| 1 | 1/3 | 1/3 | 1/3 | |

2) $Z$取值为$-1$、$0$、$1$

$P(XY=-1)=P(X=1,Y=-1)=\frac{1}{3}, P(XY=0)=P(X=0,Y=0)+P(X=0,Y=1)$

$+P(X=0,Y=-1)+P(X=0,Y=1)=\frac{1}{3}$

$P(XY=1)=P(X=1,Y=1)=\frac{1}{3}$

| Z | -1 | 0 | 1 |
|---|---|---|---|
| P | 1/3 | 1/3 | 1/3 |

3) $EX=\frac{2}{3}, EY=0, EXY=0, DX=\frac{2}{9}, DY=\frac{2}{3}, r_{XY}=0$

23. **解：**

(1)似然函数$L=f(x_1)f(x_2)\dots f(x_n)=\dfrac{1}{(\sqrt{2p})^n s^n}e^{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-m_0)^2}{2s^2}}$

取对数得，$\ln L=-n\ln\sqrt{2p}-\dfrac{n}{2}\ln s^2-\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-m_0)^2}{2s^2}$

令$\dfrac{d}{ds^2}\ln L=-\dfrac{n}{2s^2}+\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-m_0)^2}{2s^4}=0$得

$s^2$的极大似然估计值$s^2=\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-m_0)^2$.

(2)因为$\dfrac{1}{s^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-m_0)^2\sim c^2(n)$.所以$E\dfrac{1}{s^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-m_0)^2=n$

于是$E\hat{s}^2=\dfrac{s^2}{n}E(\dfrac{1}{s^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-m_0)^2)=s^2$,

$D\hat{s}^2=\dfrac{s^4}{n}D(\dfrac{1}{s^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-m_0)^2)=2s^4$

因为$\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-m_0)}{s^2}\sim c^2(n)$,所以有$D(\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-m_0)}{s^2})=2n$

右式$=D(\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-m_0)}{s^2})=D(n\hat{s}^2/s^2)=2n$

则$D(\hat{s}^2)=2n\dfrac{s^4}{n^2}=\dfrac{2s^4}{n}$